УДК 512.552.22:517.952

Ю.М. БАЗИЛЕВИЧ
Придніпровська державна академія будівництва та архітектури, Дніпро, Україна,
e-mail: *bazilvch@ukr.net.*

І.А. КОСТЮШКО
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна,
e-mail: *kostushkoia5@gmail.com.*

О.Д. СТАНІНА
Дніпропетровський державний університет внутрішніх справ, Дніпро, Україна,
e-mail: *st.olga.d@gmail.com.*

РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ МЕТОДАМИ ДЕКОМПОЗИЦІЇ

Анотація. Описано спрощення системи рівнянь шляхом декомпозиції на незалежні підсистеми або ієрархічної (послідовної) декомпозиції. Розроблено алгебраїчні методи, які дають змогу звести матриці коефіцієнтів до блочно-діагонального або блочно-трикутного вигляду. Це дає можливість значно спростити задачу та у багатьох випадках отримати аналітичний розв'язок.

Ключові слова: матриці, перетворення подібності, диференціальні рівняння у частинних похідних, декомпозиція.

ВСТУП

Під час моделювання деяких прикладних задач виникає потреба у розв'язанні систем диференціальних рівнянь у частинних похідних першого порядку [1, 2]. Для отримання розв'язку цих систем надзвичайно корисним є максимальне спрощення цих систем, а саме зведення заданих матриць до блочно-діагонального чи блочно-трикутного вигляду [3, 4].

Ця стаття є продовженням роботи [5], в якій запропоновано новий підхід до розв'язання систем лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних першого порядку шляхом зведення декількох матриць системи до діагонального або блочно-діагонального вигляду. В цій роботі особливу увагу приділено методу зведення матриць коефіцієнтів до блочно-трикутного вигляду.

Спочатку розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$A\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} u_y \\ v_y \end{pmatrix} = G\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \tag{1}$$

де A, B, G — сталі квадратні матриці, $u = u(x,\ y), v = v(x,\ y)$ — функції, які належить визначити, $u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$.

Невироджені лінійні перетворення системи (1) є такими:

а) заміна змінних $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$, де S — неособлива матриця, U, V — нові функції змінних x, y;

б) множення зліва системи на неособливу матрицю H.

При цьому матриці A, B, G набувають такого вигляду: $\widetilde{A} = HAS$, $\widetilde{B} = HBS$, $\widetilde{G} = HGS$.

За припущенням, що одна з матриць (наприклад, B) є невиродженою, систему (1) можна звести до вигляду

$$B_1\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} + E\begin{pmatrix} u_y \\ v_y \end{pmatrix} = B_2\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

де E — одинична матриця, $B_1 = B^{-1} \cdot A$, $B_2 = B^{-1} \cdot G$. Отже, кількість матриць, які потрібно одночасно перетворити, дорівнює двом: B_i $(i = 1, 2)$.

Загалом матриці мають довільний порядок n. Потрібно визначити перетворення подібності

$$\widetilde{B}_v = S^{-1} B_v S = \begin{bmatrix} \widetilde{B}_{v11} & \widetilde{B}_{v12} & \dots & \widetilde{B}_{v1l} \\ 0 & \widetilde{B}_{v22} & \dots & \widetilde{B}_{v2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \widetilde{B}_{vll} \end{bmatrix}, \ v = 1, 2, \qquad (2)$$

яке зводить обидві матриці до однакового блочно-трикутного вигляду. Тут $\widetilde{B}_{vij}$ — блок матриці $\widetilde{B}_v$, який стоїть в *i*-му стовпці та *j*-му рядку блочно-трикутної матриці. Діагональні блоки $\widetilde{B}_{vij}$ — це квадратні матриці. Потрібно, щоб кількість l діагональних блоків була максимально великою.

Для здійснення перетворень застосовують метод матриць, що комутують, та метод інваріантного підпростору.

Перший з цих методів дає змогу знайти перетворення подібності, що зводить обидві матриці до блочно-діагонального вигляду з двома (як мінімум) блоками на головній діагоналі, або встановити, що таке зведення для цих матриць здійснити не можна.

У випадку, коли дві матриці не можна звести до блочно-діагонального вигляду, застосовують другий метод, призначений для того, щоб звести матриці до блочно-трикутного вигляду або встановити неможливість такого зведення.

Відомо [3], що для того, аби звести дві матриці B_i $(i = 1, 2)$ до блочно-діагонального вигляду, необхідно та достатньо, щоб централізатор цих матриць (множина матриць, які комутують одночасно з обома матрицями), містив матрицю з різними власними числами.

У тому разі, коли задані матриці не можна звести до блочно-діагонального вигляду, застосовують метод інваріантного підпростору [3, 4]. Він дає змогу звести матриці B_i $(i = 1, 2)$ до блочно-трикутного вигляду або встановити, що їх не можна звести і до блочно-трикутного вигляду також.

МЕТОД ІНВАРІАНТНОГО ПІДПРОСТОРУ

Можливість зведення матриць до блочно-трикутного вигляду. Метод інваріантного підпростору починають застосовувати з побудови алгебри з одиницею $\varphi(B_i)$, утвореної матрицями B_i. Ця множина матриць є такою, що будь-яка лінійна комбінація або будь-який добуток матриць з цієї множини теж будуть належати цій множині матриць [3].

Критерій можливості зведення матриць до блочно-трикутного вигляду є таким: ранг алгебри $\varphi(B_i)$ має бути меншим за n^2, де n — порядок матриць. Про це свідчить теорема Бернсайда [6, 7].

Обчислення базису радикала. Далі обчислюємо радикал алгебри. Для його знаходження є розрахункові формули [3]. Спочатку складаємо матрицю D

$$D = \begin{bmatrix} Tr(W_1 W_1) & Tr(W_1 W_2) & \dots & Tr(W_1 W_v) \\ Tr(W_2 W_1) & Tr(W_2 W_2) & \dots & Tr(W_2 W_v) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ Tr(W_v W_1) & Tr(W_v W_2) & \dots & Tr(W_v W_v) \end{bmatrix},$$

де Tr — слід матриці (тобто сума її діагональних елементів), $\{W_i\}$ — базис алгебри $\varphi(B_i)$.

Після цього знаходимо загальний розв'язок системи рівнянь $D\mathbf{y}=\mathbf{0}$. Нехай $\mathbf{y}^{(1)}, \ldots, \mathbf{y}^{(p)}$ — лінійно незалежні розв'язки цієї системи. Позначимо $y_k^{(j)}$ $(k=\overline{1,r})$ елементи вектора $\mathbf{y}^{(j)}$. Тоді *j*-й елемент базису радикала (матрицю $G^{(j)}$) знаходимо за формулою [3]

$$G^{(j)}=\sum_{k=1}^{r} y_k^{(j)} W_k .$$

Загальний розв'язок системи рівнянь $D\mathbf{y}=\mathbf{0}$ можна отримати відомими методами. Отже, є можливість отримати базис радикала.

Нетривіальний підпростір, інваріантний відносно матриць $\{B_i\}$. Назвемо Z-множиною перетин усіх ядер елементів радикала алгебри $\varphi(B_i)$. Іншими словами, це множина, яку обертають у нуль усі матриці радикала.

Доведено [3], що у розглянутому випадку Z-множина є нетривіальним підпростором, інваріантним відносно матриць $\{B_i\}$.

Отже, для випадку, коли матриці не можна звести до блочно-діагонального вигляду, але ранг алгебри $\varphi(B_i)$ є меншим ніж n^2, маємо метод побудови нетривіального підпростору, який є інваріантним відносно цих матриць.

Елементи ξ Z-множини знаходимо шляхом розв'язання такої системи рівнянь:

$$\begin{cases} G^{(1)}\xi=0, \\ G^{(2)}\xi=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G^{(k)}\xi=0. \end{cases} \qquad (3)$$

Знайдені вектори базису Z-множини позначимо $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$.

ПОБУДОВА МАТРИЦІ ПЕРЕТВОРЕННЯ S

Одночасно звести пару матриць до блочно-трикутного вигляду можна тоді й тільки тоді, коли існує інваріантний відносно обох матриць підпростір $U \subset \mathbb{C}^n$ розмірності k $(0<k<n)$. Першими k стовпцями матриці перетворення S можна вибрати вектори базису підпростору U, а наступними — вектори, що доповнюють цей базис до базису $\mathbb{C}^n$.

Цей результат вважається загальновідомим.

Отже, потрібно доповнити вектори $\{\xi_{r+1}, \ldots, \xi_n\}$ базису Z-множини до базису всього простору C^n. Як вектори $\{\xi_{r+1}, \ldots, \xi_n\}$ можна використати лінійно незалежні рядки матриці коефіцієнтів системи рівнянь (3). Це пояснюється тим, що: а) ці вектори є лінійно незалежними; б) вони ортогональні векторам $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$.

Приклад 1.

Методом інваріантного підпростору визначити розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$B_1\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix}+B_2\begin{pmatrix} u_y \\ v_y \end{pmatrix}+B_3\begin{pmatrix} u_z \\ v_z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

де $B_1=E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B_3=\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -7 & -4 \end{pmatrix}$, $u=u(x, y, z)$, $v=v(x, y, z)$ — функції, які належить визначити.

Розв'язання прикладу 1.

1. Побудова алгебри з одиницею $\varphi(B_i)$, утвореною заданими матрицями. Безпосередня підстановка дає змогу переконатися в тому, що матриці B_2 і B_3 комутують лише з матрицею αE, де α — довільна стала. Це означає, що не можна здійснити одночасний перехід матриць B_i $(i=\overline{1,3})$ до діагонального вигляду.

З'ясуємо, чи можна одночасно звести матриці до блочно-трикутного вигляду. Для цього побудуємо алгебру матриць $\varphi(B_i)$ $(i=\overline{1,3})$.

Початкові матриці B_i $(i=\overline{1,3})$ є лінійно-незалежними. Розглянемо добутки цих матриць:

$$B_1 \cdot B_i = B_i \cdot B_1 = B_i \ \ (i=\overline{1,3});$$

$$B_2 \cdot B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -2B_1 + 3B_2; \ B_2 \cdot B_3 = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -7 & -4 \end{pmatrix} = B_3;$$

$$B_3 \cdot B_2 = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ -11 & -8 \end{pmatrix} = -6B_1 + 3B_2 + 2B_3; \ B_3 \cdot B_3 = \begin{pmatrix} 21 & 12 \\ -21 & -12 \end{pmatrix} = 3B_3.$$

Матриці $B_i \cdot B_j$ $(i, j=\overline{1,3})$ належать лінійній оболонці матриць B_i, отже матриці B_i $(i=\overline{1,3})$ утворюють базис алгебри. Кількість лінійно-незалежних матриць $r=3$, їхній порядок $n=2$. Нерівність $r< n^2$ виконується. Це означає, що систему (4) можна звести до трикутного вигляду.

2. Обчислення радикала алгебри. Складемо матрицю $D(3\times 3)$, $D=\{d_{ij}\}$, $d_{ij}=Tr(B_i \cdot B_j)$, Tr — слід матриці:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Згідно з рівнянням

$$D\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \tag{5}$$

визначимо вектор $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$. Тут $\alpha_1 = 3\alpha_3; \alpha_2 = -6\alpha_3; \alpha_3$ — довільна стала.

Покладемо $\alpha_3 = 1$, отримаємо шуканий вектор

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Побудова матриці перетворення $S(2\times 2)$. Визначимо матрицю G:

$$G = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i B_i = -6\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -7 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Згідно з рівнянням

$$G \cdot \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$$

визначимо вектор $\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$, $\xi_1 = -\xi_2$. Покладемо $\xi_2 = 1$, надалі визначимо перший вектор $\mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ тоді другий вектор $\mathbf{s}_2$ можна вибрати у довільний спосіб, аби вектори $\mathbf{s}_1$ та $\mathbf{s}_2$ були лінійно-незалежними, наприклад, $\mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Отже, отримуємо вектор-стовпці матриці перетворення:

$$S = (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Зведення системи диференціальних рівнянь (4) до трикутного вигляду. Згідно з підстановкою

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \tag{6}$$

система (4) набуває такого вигляду:

$$E \cdot S \cdot \begin{pmatrix} U_x \\ V_x \end{pmatrix} + B_2 \cdot S \cdot \begin{pmatrix} U_y \\ V_y \end{pmatrix} + B_3 \cdot S \cdot \begin{pmatrix} U_z \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Помножимо перетворену систему диференціальних рівнянь на обернену матрицю $S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, отримаємо нову систему рівнянь:

$$E \cdot \begin{pmatrix} U_x \\ V_x \end{pmatrix} + \widetilde{B}_2 \cdot \begin{pmatrix} U_y \\ V_y \end{pmatrix} + \widetilde{B}_3 \cdot \begin{pmatrix} U_z \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

де $\widetilde{B}_2 = S^{-1} \cdot B_2 \cdot S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\widetilde{B}_3 = S^{-1} \cdot B_3 \cdot S = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Система (7) у розгорнутому вигляді є такою:

$$\begin{cases} U_x + U_y + V_y + 3U_z - 7V_z = 0; \\ V_x + 2V_y = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Отже, за допомогою перетворення (6) початкові матриці зведено до трикутного вигляду, а систему (4) значно спрощено.

5. Розв'язання рівнянь. Друге рівняння системи (8) має загальний розв'язок

$$V = f(\varsigma; z), \ \ \varsigma = y - 2x, \tag{9}$$

де f — довільна функція вказаних аргументів.

У перше рівняння системи (8) підставимо (9) і зробимо заміну змінних:

$$\begin{cases} \varsigma = y - 2x; \\ \eta = -2y + 2x. \end{cases} \tag{10}$$

Отримаємо спрощене рівняння для визначення функції $U(\varsigma, \eta, z)$:

$$-U_\varsigma + 3U_z = f_1(\varsigma, z), \tag{11}$$

де $f_1(\varsigma, z) = 7f_z - f_\varsigma$.

Загальний розв'язок рівняння (11) можна представити так:

$$U(\varsigma, \eta, z) = \varphi(\eta; z + 3\varsigma) - \int_0^\varsigma f_1(\theta, C_1 - 3\theta) d\theta, \tag{12}$$

де φ — довільна функція. При цьому після інтегрування потрібно покласти $C_1 = z + 3\varsigma$. Відповідно до формул (10) можна записати:

$$U(x, y, z) = \varphi(-2y + 2x, z + 3y - 6x) - \int_0^{y-2x} f_1(\theta, C_1 - 3\theta) d\theta, \tag{13}$$

де $C_1 = z + 3y - 6x$.

Функції (9), (13) визначають загальний розв'язок спрощеної системи диференціальних рівнянь (8), зведеної до трикутного вигляду.

6. Перехід до початкових змінних. Згідно з підстановкою (6) отримаємо

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -U + V; \\ v = U. \end{cases} \tag{14}$$

Інакше кажучи, зведення матриць B_2, B_3 до трикутного вигляду дало змогу отримати аналітичний розв'язок системи диференціальних рівнянь (4):

$$\begin{cases} u(x, y, z) = -\varphi(-2y + 2x, z + 3y - 6x) + \displaystyle\int_0^{y-2x} f_1(\theta, C_1 - 3\theta) d\theta + f(y - 2x, z); \\ v = \varphi(-2y + 2x, z + 3y - 6x) - \displaystyle\int_0^{y-2x} f_1(\theta, C_1 - 3\theta) d\theta. \end{cases}$$

Тут f, φ — довільні функції вказаних аргументів, $f_1(\xi, z) = 7f_z(\xi, z) - f_\xi(\xi, z)$, $C_1 = z + 3y - 6x$.

ВИСНОВКИ

У статті описано спрощення системи рівнянь шляхом декомпозиції на незалежні підсистеми або ієрархічної (послідовної) декомпозиції. Перший випадок відповідає зведенню матриць коефіцієнтів до блочно-діагонального вигляду. Це часто дає можливість визначити розв'язки отриманих підсистем диференціальних рівнянь.

Якщо задані матриці коефіцієнтів не можна звести до блочно-діагонального вигляду, роблять спробу звести матриці коефіцієнтів до блочно-трикутного вигляду методом інваріантного підпростору. Фактично, це — ієрархічна декомпозиція на послідовно залежні підсистеми. Після цього перша підсистема не містить змінних інших підсистем. У другій підсистемі наявні лише змінні першої та другої підсистем тощо. Далі для одержання розв'язку чергової підсистеми використовують знайдені розв'язки попередніх підсистем.

Щоб отримати остаточний розв'язок заданої системи рівнянь, здійснюють перехід до початкових змінних.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Smirnov V.I. A course of Higher Mathematics, vol. II. New York: Pergamon press, Addison-Wesley, 1964. 643 p.
2. Гурса Е. Інтегрування рівнянь з частинними похідними першого порядку. Київ: Радянська школа, 1941. 416 с.
3. Bazilevich, Y.N. The best reduction of matrices to block-triangular form for hierarchical decomposition problems *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. Vol. 53, N. 3. P. 456–463. https://doi.org/10.1007/s10559-017-9947-1.
4. Базилевич Ю.Н. Численные методы декомпозиции в линейных задачах механики. Киев: Наук. думка, 1987. 156 с.
5. Bazylevych Y., Kostiushko I. Matrices diagonalization in solution of partial differential equation of the first order. Proc. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: 11th International Conference for Promoting the Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences - AMiTaNS'19* (20–25 June 2019, Albena, Bulgaria). Albena, 2019. Vol. 2164, Iss. 1. 060004-1–060004-7 (2019); https://doi.org /10.1063/1.5130806.
6. Van der Warden V.L. Algebra vol. II. New York: Springer-Verlag, 2003. 294 p..
7. Drozd Y.A., Kirichenko V.V. Finite Dimensional Algebras. Heidelberg: Springer-Verlag, 1994. 262 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-76244-4.

Y.N. Bazylevych, I.A. Kostiushko, O.D. Stanina

SOLVING A SYSTEM OF FIRST-ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS USING DECOMPOSITION METHODS

Abstract. The system of equations is simplified by decomposition into several independent subsystems or by hierarchical (sequential) decomposition. The algebraic methods are developed, which reduce the matrix of coefficients to a block-diagonal or block-triangular form. This significantly simplifies the problem and often makes it possible to obtain an analytical solution.

Keywords: matrices, similarity transformations, partial differential equation, decomposition.

Надійшла до редакції 22.11.2022