УДК 681.322.012

Л.Д. ЄЛФІМОВА
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *larisaelf@gmail.com*.

РЕКУРСИВНІ КЛІТИННІ МЕТОДИ МНОЖЕННЯ МАТРИЦЬ

Анотація. Запропоновано два рекурсивні клітинні методи множення матриць парного та непарного порядку, а саме: $n = 2^q r$ та $n = 3^q r$ ($q > 1$, r – порядок клітини, $n / r = m$), які побудовано на основі відомих швидких клітинних методів множення матриць порядку $n = 2\mu r$ ($\mu > 1$) та $n = 3\mu r$ ($\mu > 1$), що застосовуються як базові, коли $\mu = 2^q$ ($q > 0$) та $\mu = 3^q$ ($q > 0$). Надані методи множення клітинних ($m \times m$)-матриць оперують чисельними ($r \times r$))-клітинами, варіюють їхній порядок та характеризуються найменшою на відміну від відомих клітинних методів мультиплікативною складністю, яка дорівнює відповідно $O(1,14m^{2.807})$ та $O(1,17m^{2.854})$ клітинним операціям множення. Нові методи дають змогу отримати клітинні аналоги відомих алгоритмів множення матриць із максимально мінімізованою мультиплікативною складністю, оцінку якої подано на прикладі традиційного алгоритму множення матриць.

Ключові слова: лінійна алгебра, сім’я клітинних методів множення матриць, клітинні аналоги алгоритмів множення матриць.

ВСТУП

Матричні обчисленя є предметом інтенсивних теоретичних та практичних досліджень. Перехід до великомасштабного паралелізму на рівні клітинних операцій дає змогу досягти найвищого ступеню паралелізму обчислень, більш вигідного співввідношення між обсягами обчислень і накладними витратами на їхню організацію, особливо на обмін даними [1].

Клітинні методи розв'язання задач великих розмірів широко використовуються в лінійній алгебрі. Відомо, що до сім’ї клітинних методів множення матриць належать швидкі [2, 4], змішані [3, 4], об’єднаний [5] та ультрашвидкий (узагальнений) [6] клітинні методи, що дають змогу отримати клітинні аналоги відомих алгоритмів множення матриць з мінімізованою мультиплікативною, адитивною та загальною складністю.

Швидкі клітинні методи множення матриць порядку $n = 2\mu r$ ($\mu > 1$) [2] та $n = 3\mu r$ ($\mu > 1$) [4] оперують чисельними ($r \times r$)-клітинами, варіюючи їхній порядок, та мають мультиплікативну складність, яка становить відповідно $O(0.875m^3)$ та $O(0.851m^3)$ клітинних операцій множення, де $m = n / r$.

Змішані клітинні методи являють собою гібриди двох методів. Перший змішаний клітинний метод множення матриць порядку $n = 2^q \mu r$ ($q > 1, \mu > 1$) [3] об’єднує рекурсивний метод Штрассена [7] для множення матриць та швидкий клітинний метод множення матриць порядку $n = 2\mu r$ ($\mu > 1$) [2]. Другий змішаний клітинний метод множення матриць порядку $n = 3^q \mu r$ ($q > 1, \mu > 1$) [4] сполучає рекурсивний метод Лейдермана [8] для множення матриць та швидкий клітинний метод множення матриць порядку $n = 3\mu r$ ($\mu > 1$) [4]. Взаємодія двох методів дає можливість отримати мінімізовану порівняно зі швидким клітинним методом мультиплікативну складність, яка характеризує змішані методи та дорівнює відповідно $O(0.763m^3)$ та $O(0.724m^3)$ клітинним операціям множення.

Об'єднаний клітинний метод множення матриць порядку $n = 2^{\gamma} \cdot 3^{q} \mu r$ $(\gamma > 0, q > 1, \mu > 1)$ [5] являє собою гібрид трьох методів: рекурсивного методу Штрассена [7], методу Лейдермана [8] та швидкого клітинного методу множення матриць порядку $n = 3\mu r \, (\mu > 1)$ [4]. Взаємодія трьох методів забезпечує мультиплікативну складність, яка становить $O(0.627 m^{3})$ клітинних операцій множення.

Ультрашвидкий клітинний метод множення матриць порядку $n = 4\Omega$, де Ω приймає значення $2\mu r, 3\mu r, 2^{q} \mu r, 3^{q} \mu r, 2^{\gamma} \cdot 3^{q} \mu r \, (q > 1, \mu > 1, \gamma > 0)$, оперує клітинними підматрицями, варіює їхній порядок та взаємодіє з відомими клітинними методами множення матриць, мінімізуючи на 12,5% обчислювальну складність отриманих на їхній основі клітинних аналогів відомих алгоритмів множення матриць.

Метою цієї роботи є оптимізація мультиплікативної складності відомих клітинних методів множення матриць. Тут вперше запропоновано два рекурсивні клітинні методи множення матриць парного та непарного порядку, а саме: $n = 2^{q} r$ та $n = 3^{q} r$, які побудовано на основі відомих швидких клітинних методів множення матриць порядку $n = 2\mu r \, (\mu > 1)$ та $n = 3\mu r \, (\mu > 1)$, що застосовуються як базові, коли $\mu = 2^{q} \, (q > 0)$ та $\mu = 3^{q} \, (q > 0)$. Надані методи множення клітинних $(m \times m)$-матриць оперують чисельними $(r \times r)$-клітинами, варіюють їхній порядок та характеризуються найменшою порівняно з відомими клітинними методами мультиплікативною складністю, яка дорівнює відповідно $O(1,14 m^{\log_2 7}) \sim$ $\sim O(1,14 m^{2.807})$ та $O(1.17 m^{\log_3 23}) \sim (1.17 m^{2.854})$ клітинним операціям множення. Нові методи дають змогу отримати клітинні аналоги відомих алгоритмів множення матриць з максимально мінімізованою мультиплікативною складністю, оцінку якої подано на прикладі традиційного алгоритму множення матриць.

РЕКУРСИВНИЙ КЛІТИННИЙ МЕТОД МНОЖЕННЯ МАТРИЦЬ ПОРЯДКУ $n = 2^{q} r$ ($q > 1$, r – ПОРЯДОК КЛІТИНИ)

Для побудови рекурсивних клітинних методів множення матриць як парного, так і непарного порядку вихідні матриці A та B, які наведено на рис. 1, декомпозуються на клітини A_{ij} та B_{ij} за заданим порядком r. Унаслідок декомпозиції утворюються клітинні $(m \times m)$-матриці $A = (A_{ij})$ та $B = (B_{ij})$, де $m = n / r$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$. Зовнішній (клітинний) метод оперує чисельними $(r \times r)$-клітинами, варіюючи їхній порядок, а як внутрішні алгоритми використовуються відомі алгоритми множення матриць, що оперують числами. Добутком клітинних $(m \times m)$-матриць $A = (A_{ij})$ та $B = (B_{ij})$ є клітинна матриця $C = (C_{ij})$, яка має ідентичну кожному співмножнику клітинну структуру.

$$
\overset{A}{\begin{bmatrix} \overbrace{A_{11}}^{r} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mm} \end{bmatrix}}
\times
\overset{B}{\begin{bmatrix} \overbrace{B_{11}}^{r} & B_{12} & \cdots & B_{1m} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \cdots & B_{mm} \end{bmatrix}}
=
\overset{C}{\begin{bmatrix} \overbrace{C_{11}}^{r} & C_{12} & \cdots & C_{1m} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m1} & C_{m2} & \cdots & C_{mm} \end{bmatrix}}
$$

Рис. 1

У цьому рекурсивному клітинному методі застосовано відомий швидкий клітинний метод множення матриць порядку $n = 2\mu r$ $(\mu > 1)$ [2] як базовий метод, коли $\mu = 2^q$ $(q > 0)$. Згідно з базовим методом, що складається з трьох етапів, на першому етапі обчислюються клітинні матриці $R^1 = (A_{ij}), \ldots, R^5 = (A_{ij})$ та $F^1 = (B_{ij}), \ldots, F^5 = (B_{ij})$ порядку $m/2$, які складаються з чисельних клітин, що являють собою матричні коефіцієнти, та визначаються за формулами

$$
\begin{gathered}
R_{ik}^1 = (A_{2i-1,\,2k-1} + A_{2i,\,2k}),\ F_{kj}^1 = (B_{2k-1,\,2j-1} + B_{2k,\,2j}),\\
R_{ik}^2 = (A_{2i,\,2k-1} + A_{2i,\,2k}),\ F_{kj}^2 = (B_{2k-1,\,2j} - B_{2k,\,2j}),\\
R_{ik}^3 = (A_{2i-1,\,2k-1} + A_{2i-1,\,2k}),\ F_{kj}^3 = (B_{2k,\,2j-1} - B_{2k-1,\,2j-1}),\\
R_{ik}^4 = (A_{2i,\,2k-1} - A_{2i-1,\,2k-1}),\ F_{kj}^4 = (B_{2k-1,\,2j-1} + B_{2k-1,\,2j}),\\
R_{ik}^5 = (A_{2i-1,\,2k} - A_{2i,\,2k}),\ F_{kj}^5 = (B_{2k,\,2j-1} + B_{2k,\,2j}),
\end{gathered}
\tag{1}
$$

де $i, j, k = 1, 2, \ldots, m/2$; $m = n/r$.

На другому етапі обчислюються сім добутків $Q^1 = (Q_{ij}^1), \ldots, Q^7 = (Q_{ij}^7)$ двох клітинних матриць порядку $m/2$ за формулами

$$
\begin{gathered}
Q_{ij}^1 = \sum_{k=1}^{m/2} R_{ik}^1 F_{kj}^1,\ Q_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{m/2} R_{ik}^2 B_{2k-1,\,2j-1},\\
Q_{ij}^3 = \sum_{k=1}^{m/2} A_{2i-1,\,2k-1} F_{kj}^2,\ Q_{ij}^4 = \sum_{k=1}^{m/2} A_{2i,\,2k} F_{kj}^3,\\
Q_{ij}^5 = \sum_{k=1}^{m/2} R_{ik}^3 B_{2k,\,2j},\ Q_{ij}^6 = \sum_{k=1}^{m/2} R_{ik}^4 F_{kj}^4,\ Q_{ij}^7 = \sum_{k=1}^{m/2} R_{ik}^5 F_{kj}^5,
\end{gathered}
\tag{2}
$$

де $i, j, k = 1, 2, \ldots, m/2$.

На третьому етапі обчислюється клітинна $(m \times m)$-матриця $C = (C_{ij})$, яка складається з чисельних клітин, що визначаються за формулами

$$
\begin{gathered}
C_{2i-1,\,2j-1} = Q_{ij}^1 + Q_{ij}^4 - Q_{ij}^5 + Q_{ij}^7,\\
C_{2i-1,\,2j} = Q_{ij}^3 + Q_{ij}^5,\\
C_{2i,\,2j-1} = Q_{ij}^2 + Q_{ij}^4,\\
C_{2i,\,2j} = Q_{ij}^1 - Q_{ij}^2 + Q_{ij}^3 + Q_{ij}^6,
\end{gathered}
\tag{3}
$$

де $i, j = 1, 2, \ldots, m/2$.

Розглянемо реалізацію базового клітинного методу (1)–(3) у рекурсивному режимі, де на першому кроці рекурсії формуються сім пар клітинних матриць порядку $m/2$ для виконання операції добутку для кожної пари. При цьому обчислюються клітинні матриці, які містять чисельні клітини-коефіцієнти, що визначаються за формулами (1). Разом з тим формуються матриці, що містять чисельні клітини, які належать вихідним матрицям $A = (A_{ij})$, $B = (B_{ij})$ та визначаються за зазначеними індексами відповідно до формул (2). Сформовані на першому рекурсивному кроці сім пар клітинних матриць порядку $m/2$ є проміжними і вважаються вихідними клітинними матрицями для наступного рекурсивного кроку, де для кожної пари формуються нові сім пар клітинних матриць порядку $m/4$ аналогічно першому рекурсивному кроку. На кожному наступному кроці рекурсії порядок оперувальних клітинних матриць зменшується вдвічі. На останньому кроці метод оперує клітинними (4×4)-матрицями, остаточно формуючи для кожної пари проміжних клітинних матриць цього порядку нові сім пар клітинних (2×2)-матриць для виконання в подальшому обчислення згідно з формулами (2), (3). Для реалізації повного рекурсивного обчислювального процесу клітинний метод потребує $\log_2 m-1$ рекурсивних кроків.

ОЦІНЮВАННЯ МУЛЬТИПЛІКАТИВНОЇ СКЛАДНОСТІ РЕКУРСИВНОГО КЛІТИННОГО МЕТОДУ МНОЖЕННЯ МАТРИЦЬ ПОРЯДКУ $n=2^q r$ $(q>1,\ n/r=m)$

Оскільки базовий клітинний метод (1)–(3) має мультиплікативну складність, яка дорівнює $W_M^{\text{баз}}=7\cdot\left(\dfrac{m}{2}\right)^3=\dfrac{7}{8}m^3=0.875m^3$ клітинним операціям множення, мультиплікативна складність рекурсивного клітинного методу, який побудовано на його основі, визначається за формулою $W_M^{\text{рек}}=7^{(\log_2 m-1)}\cdot 2^3=7^{\log_2 m}\cdot\dfrac{8}{7}=1.14m^{2.807}$ клітинних операцій множення.

Враховуючи, що для кожної клітинної операції множення внутрішній алгоритм потребує $W_M^{\text{внутр}}$ скалярних операцій множення, мультиплікативна складність базового та рекурсивного клітинних методів складає $W_M^{\text{баз}}=0.875m^3=0.875\cdot\dfrac{n^3}{r^3}\cdot W_M^{\text{внутр}}$ скалярних операцій множення, $W_M^{\text{рек}}=0.875m^{(\log_2 m-1)}\cdot\dfrac{n^3}{r^3}\cdot W_M^{\text{внутр}}$ скалярних операцій множення.

Якщо традиційний алгоритм множення матриць, що потребує r^3 скалярних операцій множення, використовується як внутрішній алгоритм, то отриманий на основі цього рекурсивного методу клітинний аналог традиційного алгоритму має мультиплікативну складність, яка дорівнює

$$W_M^{\text{трад}}=0.875^{(\log_2 m-1)}\cdot\frac{n^3}{r^3}\cdot r^3=0.875^{(\log_2 m-1)}\cdot n^3=0.875^{(q-1)}\cdot n^3$$

скалярним операціям множення.

Аналогічно визначається мультиплікативна складність клітинних аналогів інших відомих алгоритмів множення матриць.

ЧИСЕЛЬНИЙ ПРИКЛАД

Розглянемо приклад клітинного методу множення матриць порядку $n=2^q r$, де $q=2, r=3, m=n/r=12/3=4$, який гарантує точність обчислення добутку клітинних матриць. Реалізація цього прикладу потребує один рекурсивний крок $(\log_2 4-1=1)$.

Вихідні матриці A та B порядку $n=12$, які декомпозовано на чисельні клітини заданого порядку $r=3$, наведено на рис. 2. Унаслідок декомпозиції утворено клітинні $(m\times m)$-матриці $A=(A_{ij})$ та $B=(B_{ij})$, де $m=4$, $i, j=1,\ldots,4$.

Формуємо сім пар клітинних матриць порядку $m/2=2$, які наведено на рис. 3. До того ж обчислюємо десять клітинних матриць-коефіцієнтів $R^1=(A_{ij}),\ldots,\ R^5=(A_{ij})$ та $F^1=(B_{ij}),\ldots,\ F^5=(B_{ij})$ за формулами (1), де $i, j, k=1,2$, та формуємо чотири клітинні матриці, які містять чисельні клітини, що належать до вихідних матриць $A=(A_{ij})$ та $B=(B_{ij})$ і визначаються за зазначеними індексами відповідно до формул (2), а саме: $A^3=(A_{2i-1,\,2k-1})$, $A^4=(A_{2i,\,2k})$, $B^2=(B_{2k-1,\,2j-1})$, $B^5=(B_{2k,\,2j})$, де $i, j, k=1,2$.

Враховуючи, що цей приклад складає один рекурсивний крок, далі реалізуємо операцію добутку для кожної сформованої пари за формулами (2) (рис. 3).

У разі, якщо $q>2$, приклад складає два або більше рекурсивні кроки. Наприклад, якщо $q=3$, сформовані на першому рекурсивному кроці сім пар клітинних матриць порядку $m/2=8/2=4$ є проміжними і вважаються вихідними для наступного кроку рекурсії, де для кожної пари формуються нові сім пар клітинних матриць порядку $m/4=8/4=2$ аналогічно першому рекурсивному кроку.

Для цього прикладу у подальшому знаходимо чисельні клітини C_{ij} клітинної матриці $C=(C_{ij})$ за формулою (3), де $i, j=1,2$. Правильність обчислення значень елементів чисельних клітин матриці $C=(C_{ij})$, яка представлена на рис. 2, покажемо на прикладі їхнього формування для $i, j=1$:

$$C_{11}=C_{2i-1,\,2j-1}=\overset{Q_{11}^1}{\begin{bmatrix}109 & 127 & 56\\ 103 & 134 & 58\\ 38 & 48 & 24\end{bmatrix}}+\overset{Q_{11}^4}{\begin{bmatrix}15 & 18 & 0\\ 24 & 16 & 0\\ 7 & 6 & 0\end{bmatrix}}-\overset{Q_{11}^5}{\begin{bmatrix}48 & 63 & 26\\ 47 & 65 & 27\\ 20 & 26 & 12\end{bmatrix}}+$$

$$+\overset{Q_{11}^7}{\begin{bmatrix}-8 & -8 & -4\\ -14 & -20 & -4\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}}=r\left\{\overset{C_{11}}{\begin{bmatrix}68 & 74 & 26\\ 66 & 65 & 27\\ 25 & 28 & 12\end{bmatrix}}\right.,$$

$$C_{12}=C_{2i-1,\,2j}=\overset{Q_{11}^3}{\begin{bmatrix}4 & -3 & 0\\ 3 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}}+\overset{Q_{11}^5}{\begin{bmatrix}48 & 63 & 26\\ 47 & 65 & 27\\ 20 & 26 & 12\end{bmatrix}}=r\left\{\overset{C_{12}}{\begin{bmatrix}52 & 60 & 26\\ 50 & 63 & 27\\ 21 & 26 & 12\end{bmatrix}}\right.,$$

$$C_{21}=C_{2i,\,2j-1}=\overset{Q_{11}^2}{\begin{bmatrix}51 & 58 & 27\\ 54 & 64 & 30\\ 18 & 22 & 12\end{bmatrix}}+\overset{Q_{11}^4}{\begin{bmatrix}15 & 18 & 0\\ 24 & 16 & 0\\ 7 & 6 & 0\end{bmatrix}}=r\left\{\overset{C_{21}}{\begin{bmatrix}66 & 76 & 27\\ 78 & 80 & 30\\ 25 & 28 & 12\end{bmatrix}}\right.,$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & Q_{11}^{1} & & Q_{11}^{2} & & Q_{11}^{3} & & \\
C_{22} = C_{2i,\,2j} & = & \begin{bmatrix} 109 & 127 & 56 \\ 103 & 134 & 58 \\ 38 & 48 & 24 \end{bmatrix} & - & \begin{bmatrix} 51 & 58 & 27 \\ 54 & 64 & 30 \\ 18 & 22 & 12 \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & + &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
 & Q_{11}^{6} & & & C_{22} \\
+ & \begin{bmatrix} -12 & -6 & -2 \\ 10 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & = & r & \left\{ \begin{bmatrix} 50 & 60 & 27 \\ 62 & 76 & 30 \\ 21 & 26 & 12 \end{bmatrix} \right.
\end{array}.
$$

Аналогічно знаходимо значення елементів інших чисельних клітин матриці $C = (C_{ij})$, яка є розв’язанням задачі обчислення добутку клітинних матриць $A = (A_{ij})$ та $B = (B_{ij})$ порядку $m = 4$.

$$
\begin{array}{ccc}
A = (A_{ij}) & & B = (B_{ij}) \\
\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc}
3 & 6 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 2 & 1 & 3 & 1 & 1 \\
3 & 5 & 1 & 4 & 1 & 1 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline
2 & 4 & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 & 1 \\
5 & 6 & 1 & 4 & 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline
2 & 4 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 4 & 1 & 1 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 3 & 1 & 3 & 4 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline
2 & 3 & 1 & 6 & 5 & 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 4 & 1 \\
1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 4 & 5 & 1 & 6 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right]
& \times &
\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc}
1 & 2 & 1 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 & 1 & 3 & 4 & 1 \\
4 & 3 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 4 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline
5 & 3 & 1 & 1 & 3 & 1 & 4 & 5 & 1 & 6 & 1 & 1 \\
4 & 6 & 1 & 2 & 2 & 1 & 6 & 4 & 1 & 3 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline
1 & 2 & 1 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 & 1 & 5 & 4 & 1 \\
1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline
3 & 4 & 1 & 3 & 4 & 1 & 3 & 4 & 1 & 3 & 4 & 1 \\
2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right] =
\end{array}
$$

$$
C = (C_{ij})
$$

$$
= \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc}
68 & 74 & 26 & 52 & 60 & 26 & 74 & 86 & 26 & 75 & 74 & 26 \\
66 & 65 & 27 & 50 & 63 & 27 & 73 & 90 & 27 & 82 & 70 & 27 \\
25 & 28 & 12 & 21 & 26 & 12 & 31 & 35 & 12 & 30 & 27 & 12 \\ \hline
66 & 76 & 27 & 50 & 60 & 27 & 76 & 84 & 27 & 62 & 68 & 27 \\
78 & 80 & 30 & 62 & 76 & 30 & 92 & 110 & 30 & 96 & 86 & 30 \\
25 & 28 & 12 & 21 & 26 & 12 & 31 & 35 & 12 & 30 & 27 & 12 \\ \hline
49 & 57 & 23 & 43 & 51 & 23 & 60 & 71 & 23 & 60 & 61 & 23 \\
52 & 61 & 22 & 40 & 51 & 22 & 61 & 66 & 22 & 56 & 50 & 22 \\
25 & 28 & 12 & 21 & 26 & 12 & 31 & 35 & 12 & 30 & 27 & 12 \\ \hline
84 & 87 & 30 & 54 & 71 & 30 & 99 & 106 & 30 & 98 & 68 & 30 \\
64 & 80 & 28 & 56 & 74 & 28 & 82 & 96 & 28 & 79 & 76 & 28 \\
25 & 28 & 12 & 21 & 26 & 12 & 31 & 35 & 12 & 30 & 27 & 12
\end{array}\right]
$$

Рис. 2

$$\begin{array}{c} R^1=(R^1_{ij}) \\ \begin{array}{c}r\left\{\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right.\\ \vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 10 & 2 & 4 & 5 & 2 \\ 7 & 7 & 2 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 8 & 9 & 2 & 4 & 8 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 7 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \end{array} \times \begin{array}{c} F^1=(F^1_{ij}) \\ \begin{array}{c}r\left\{\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right.\\ \vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & 2 & 11 & 7 & 2 \\ 6 & 5 & 2 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 4 & 6 & 2 & 8 & 10 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \end{array} = \begin{array}{c} Q^1=(Q^1_{ij}) \\ \begin{array}{c}r\left\{\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right.\\ \vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 109 & 127 & 56 & 150 & 143 & 56 \\ 103 & 134 & 58 & 225 & 165 & 58 \\ 38 & 48 & 24 & 60 & 58 & 24 \\ \hline 118 & 149 & 66 & 188 & 172 & 66 \\ 78 & 101 & 44 & 125 & 131 & 44 \\ 38 & 48 & 24 & 60 & 58 & 24 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} R^2=(R^2_{ij}) \\ \begin{array}{c}r\left\{\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right.\\ \vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 8 & 2 & 4 & 7 & 2 \\ 9 & 8 & 2 & 6 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 8 & 8 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 10 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \end{array} \times \begin{array}{c} B^2=(B_{2i-1,2j-1}) \\ \begin{array}{c}r\left\{\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right.\\ \vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 5 & 6 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 5 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array} = \begin{array}{c} Q^2=(Q^2_{ij}) \\ \begin{array}{c}r\left\{\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right.\\ \vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 51 & 58 & 27 & 59 & 82 & 27 \\ 54 & 64 & 30 & 90 & 116 & 30 \\ 18 & 22 & 12 & 28 & 36 & 12 \\ \hline 54 & 64 & 30 & 78 & 104 & 30 \\ 43 & 57 & 28 & 80 & 104 & 28 \\ 18 & 22 & 12 & 28 & 36 & 12 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} A^3=(A_{2i-1,2j-1}) \\ \begin{array}{c}r\left\{\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right.\\ \vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 6 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 4 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array} \times \begin{array}{c} F^2=(F^2_{ij}) \\ \begin{array}{c}r\left\{\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right.\\ \vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} = \begin{array}{c} Q^3=(Q^3_{ij}) \\ \begin{array}{c}r\left\{\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right.\\ \vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -3 & 0 & -7 & 21 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & -6 & 19 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 5 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 0 & -4 & 14 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -4 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} A^4=(A_{2i,2j}) \\ \begin{array}{c}r\left\{\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right.\\ \vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 6 & 5 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array} \times \begin{array}{c} F^3=(F^3_{ij}) \\ \begin{array}{c}r\left\{\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right.\\ \vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 2 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} = \begin{array}{c} Q^4=(Q^4_{ij}) \\ \begin{array}{c}r\left\{\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right.\\ \vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 15 & 18 & 0 & 17 & 2 & 0 \\ 24 & 16 & 0 & 2 & -6 & 0 \\ 7 & 6 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ \hline 30 & 23 & 0 & 21 & 2 & 0 \\ 21 & 23 & 0 & 2 & -8 & 0 \\ 7 & 6 & 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} R^3=(R^3_{ij}) \\ \begin{array}{c}r\left\{\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right.\\ \vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 9 & 2 & 5 & 3 & 2 \\ 7 & 6 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 3 & 6 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \end{array} \times \begin{array}{c} B^5=(B_{2i,2j}) \\ \begin{array}{c}r\left\{\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right.\\ \vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 4 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array} = \begin{array}{c} Q^5=(Q^5_{ij}) \\ \begin{array}{c}r\left\{\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right.\\ \vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 48 & 63 & 26 & 82 & 53 & 26 \\ 47 & 65 & 27 & 88 & 51 & 27 \\ 20 & 26 & 12 & 32 & 22 & 12 \\ \hline 43 & 53 & 23 & 64 & 47 & 23 \\ 41 & 51 & 22 & 60 & 45 & 22 \\ 20 & 26 & 12 & 32 & 22 & 12 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} R^4=(R^4_{ij}) \\ \begin{array}{c}r\left\{\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right.\\ \vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \times \begin{array}{c} F^4=(F^4_{ij}) \\ \begin{array}{c}r\left\{\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right.\\ \vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 6 & 2 & 8 & 10 & 2 \\ 6 & 4 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 4 & 6 & 2 & 10 & 10 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \end{array} = \begin{array}{c} Q^6=(Q^6_{ij}) \\ \begin{array}{c}r\left\{\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right.\\ \vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} -12 & -6 & -2 & -12 & -14 & -2 \\ 10 & 8 & 2 & 16 & 18 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -10 & -12 & -6 & -8 & -14 & -6 \\ 22 & 30 & 12 & 38 & 44 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} R^5=(R^5_{ij}) \\ \begin{array}{c}r\left\{\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right.\\ \vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -5 & -3 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \times \begin{array}{c} F^5=(F^5_{ij}) \\ \begin{array}{c}r\left\{\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right.\\ \vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 6 & 2 & 10 & 6 & 2 \\ 6 & 8 & 2 & 9 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 6 & 8 & 2 & 6 & 8 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \end{array} = \begin{array}{c} Q^7=(Q^7_{ij}) \\ \begin{array}{c}r\left\{\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right.\\ \vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} -8 & -8 & -4 & -11 & -6 & -4 \\ -14 & -20 & -4 & -17 & -18 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -56 & -62 & -20 & -85 & -56 & -20 \\ -6 & -12 & 0 & -6 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Рис. 3

РЕКУРСИВНИЙ КЛІТИННИЙ МЕТОД МНОЖЕННЯ МАТРИЦЬ ПОРЯДКУ $n = 3^q r$ ($q > 1$, r — порядок клітини)

Вихідні матриці A та B порядку n, які декомпозовано на чисельні клітини A_{ij} та B_{ij} заданого порядку, наведено на рис. 1. Цей рекурсивний клітинний метод побудовано на основі відомого швидкого клітинного методу множення матриць порядку $n = 3\mu r$ ($\mu > 1$) [4], який використовується як базовий, коли $\mu = 3^q$ $(q > 0)$.

Базовий клітинний метод складає три етапи. На першому етапі визначаються 28 клітинних матриць порядку $m/3$, які складаються з чисельних клітин, що являють собою матричні коефіцієнти та обчислюються за формулами

$$
\begin{aligned}
R_{ik}^{1} &= A_{3i-2,\,3k-2} + A_{3i-2,\,3k-1} + A_{3i-2,\,3k} - A_{3i-1,\,3k-2} - A_{3i-1,\,3k-1} - \\
&\quad - A_{3i,\,3k-1} - A_{3i,\,3k}, \\
R_{ik}^{2} &= A_{3i-2,\,3k-2} - A_{3i-1,\,3k-2}, \\
R_{ik}^{3} &= -A_{3i-2,\,3k-2} + A_{3i-1,\,3k-2} + A_{3i-1,\,3k-1}, \\
R_{ik}^{4} &= A_{3i-1,\,3k-2} + A_{3i-1,\,3k-1}, \\
R_{ik}^{5} &= -A_{3i-2,\,3k-2} + A_{3i,\,3k-2} + A_{3i,\,3k-1}, \\
R_{ik}^{6} &= -A_{3i-2,\,3k-2} + A_{3i,\,3k-2}, \\
R_{ik}^{7} &= A_{3i,\,3k-2} + A_{3i,\,3k-1}, \\
R_{ik}^{8} &= A_{3i-2,\,3k-2} + A_{3i-2,\,3k-1} + A_{3i-2,\,3k} - A_{3i-1,\,3k-1} - A_{3i-1,\,3k} - \\
&\quad - A_{3i,\,3k-2} - A_{3i,\,3k-1}, \\
R_{ik}^{9} &= -A_{3i-2,\,3k} + A_{3i,\,3k-1} + A_{3i,\,3k}, \\
R_{ik}^{10} &= A_{3i-2,\,3k} - A_{3i,\,3k}, \\
R_{ik}^{11} &= A_{3i,\,3k-1} + A_{3i,\,3k}, \\
R_{ik}^{12} &= -A_{3i-2,\,3k} + A_{3i-1,\,3k-1} + A_{3i-1,\,3k}, \\
R_{ik}^{13} &= A_{3i-2,\,3k} - A_{3i-1,\,3k}, \\
R_{ik}^{14} &= A_{3i-1,\,3k-1} + A_{3i-1,\,3k},
\end{aligned}
\tag{4}
$$

де $i, j, k = 1, 2, \ldots, m/3$; $m = n/r$;

$$
\begin{aligned}
F_{kj}^{1} &= -B_{3k-2,\,3j-1} + B_{3k-1,\,3j-1}, \\
F_{kj}^{2} &= -B_{3k-2,\,3j-2} + B_{3k-2,\,3j-1} + B_{3k-1,\,3j-2} - B_{3k-1,\,3j-1} - B_{3k-1,\,3j} - \\
&\quad - B_{3k,\,3j-2} + B_{3k,\,3j}, \\
F_{kj}^{3} &= B_{3k-2,\,3j-2} - B_{3k-2,\,3j-1} + B_{3k-1,\,3j-1}, \\
F_{kj}^{4} &= -B_{3k-2,\,3j-2} + B_{3k-2,\,3j-1}, \\
F_{kj}^{5} &= B_{3k-2,\,3j-2} - B_{3k-2,\,3j} + B_{3k-1,\,3j}, \\
F_{kj}^{6} &= B_{3k-2,\,3j} - B_{3k-1,\,3j}, \\
F_{kj}^{7} &= -B_{3k-2,\,3j-2} + B_{3k-2,\,3j}, \\
F_{kj}^{8} &= -B_{3k-2,\,3j-2} + B_{3k-2,\,3j} + B_{3k-1,\,3j-2} - B_{3k-1,\,3j-1} - B_{3k-1,\,3j} - B_{3k,\,3j-2} + \\
&\quad + B_{3k,\,3j-1},
\end{aligned}
\tag{5}
$$

$F_{kj}^{9} = B_{3k-1,\,3j-1} + B_{3k,\,3j-2} - B_{3k,\,3j-1}$,

$F_{kj}^{10} = B_{3k-1,\,3j-1} - B_{3k,\,3j-1}$,

$F_{kj}^{11} = -B_{3k,\,3j-2} + B_{3k,\,3j-1}$,

$F_{kj}^{12} = B_{3k-1,\,3j} + B_{3k,\,3j-2} - B_{3k,\,3j}$,

$F_{kj}^{13} = B_{3k-1,\,3j} - B_{3k,\,3j}$,

$F_{kj}^{14} = -B_{3k,\,3j-2} + B_{3k,\,3j}$,

де $i, j, k = 1, 2, \ldots, m/3$; $m = n/r$.

На другому етапі обчислюються 23 добутки $Q^1 = (Q_{ij}^1), \ldots, Q^{23} = (Q_{ij}^{23})$ двох клітинних матриць порядку $m/3$ за формулами

$$Q_{ij}^1 = \sum_{k=1}^{m/3} R_{ik}^1 \cdot B_{3k-1,\,3j-1},\ Q_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{m/3} R_{ik}^2 \cdot F_{kj}^1,\ Q_{ij}^3 = \sum_{k=1}^{m/3} A_{3i-1,\,3k-1} \cdot F_{kj}^2,$$

$$Q_{ij}^4 = \sum_{k=1}^{m/3} R_{ik}^3 \cdot F_{kj}^3,\ Q_{ij}^5 = \sum_{k=1}^{m/3} R_{ik}^4 \cdot F_{kj}^4,\ Q_{ij}^6 = \sum_{k=1}^{m/3} A_{3i-2,\,3k-2} \cdot B_{3k-2,\,3j-2},$$

$$Q_{ij}^7 = \sum_{k=1}^{m/3} R_{ik}^5 \cdot F_{kj}^5,\ Q_{ij}^8 = \sum_{k=1}^{m/3} R_{ik}^6 \cdot F_{kj}^6,\ Q_{ij}^9 = \sum_{k=1}^{m/3} R_{ik}^7 \cdot F_{kj}^7,$$

$$Q_{ij}^{10} = \sum_{k=1}^{m/3} R_{ik}^8 \cdot B_{3k-1,\,3j},\ Q_{ij}^{11} = \sum_{k=1}^{m/3} A_{3i,\,3k-1} \cdot F_{kj}^8,\ Q_{ij}^{12} = \sum_{k=1}^{m/3} R_{ik}^9 \cdot F_{kj}^9, \quad (6)$$

$$Q_{ij}^{13} = \sum_{k=1}^{m/3} R_{ik}^{10} \cdot F_{kj}^{10},\ Q_{ij}^{14} = \sum_{k=1}^{m/3} A_{3i-2,\,3k} \cdot B_{3k,\,3j-2},$$

$$Q_{ij}^{15} = \sum_{k=1}^{m/3} R_{ik}^{11} \cdot F_{kj}^{11},\ Q_{ij}^{16} = \sum_{k=1}^{m/3} R_{ik}^{12} \cdot F_{kj}^{12},$$

$$Q_{ij}^{17} = \sum_{k=1}^{m/3} R_{ik}^{13} \cdot F_{kj}^{13},\ Q_{ij}^{18} = \sum_{k=1}^{m/3} R_{ik}^{14} \cdot F_{kj}^{14},\ Q_{ij}^{19} = \sum_{k=1}^{m/3} A_{3i-2,\,3k-1} \cdot B_{3k-1,\,3j-2},$$

$$Q_{ij}^{20} = \sum_{k=1}^{m/3} A_{3i-1,\,3k} \cdot B_{3k,\,3j-1},\ Q_{ij}^{21} = \sum_{k=1}^{m/3} A_{3i-1,\,3k-2} \cdot B_{3k-2,\,3j},$$

$$Q_{ij}^{22} = \sum_{k=1}^{m/3} A_{3i,\,3k-2} \cdot B_{3k-2,\,3j-1},$$

$$Q_{ij}^{23} = \sum_{k=1}^{m/3} A_{3i,\,3k} \cdot B_{3k,\,3j},\ \text{де}\ i, j, k = 1, 2, \ldots, m/3.$$

На третьому етапі визначається клітинна $(m \times m)$-матриця $C = (C_{ij})$, чисельні клітини якої обчислюються за формулами

$C_{3i-2,\,3j-2} = Q_{ij}^6 + Q_{ij}^{14} + Q_{ij}^{19}$,

$C_{3i-2,\,3j-1} = Q_{ij}^1 + Q_{ij}^4 + Q_{ij}^5 + Q_{ij}^6 + Q_{ij}^{12} + Q_{ij}^{14} + Q_{ij}^{15}$,

$C_{3i-2,\,3j} = Q_{ij}^6 + Q_{ij}^7 + Q_{ij}^9 + Q_{ij}^{10} + Q_{ij}^{14} + Q_{ij}^{16} + Q_{ij}^{18}$,

$$C_{3i-1,\,3j-2} = Q_{ij}^{2} + Q_{ij}^{3} + Q_{ij}^{4} + Q_{ij}^{6} + Q_{ij}^{14} + Q_{ij}^{16} + Q_{ij}^{17},$$
$$C_{3i-1,\,3j-1} = Q_{ij}^{2} + Q_{ij}^{4} + Q_{ij}^{5} + Q_{ij}^{6} + Q_{ij}^{20}, \qquad (7)$$
$$C_{3i-1,\,3j} = Q_{ij}^{14} + Q_{ij}^{16} + Q_{ij}^{17} + Q_{ij}^{18} + Q_{ij}^{21},$$
$$C_{3i,\,3j-2} = Q_{ij}^{6} + Q_{ij}^{7} + Q_{ij}^{8} + Q_{ij}^{11} + Q_{ij}^{12} + Q_{ij}^{13} + Q_{ij}^{14},$$
$$C_{3i,\,3j-1} = Q_{ij}^{12} + Q_{ij}^{13} + Q_{ij}^{14} + Q_{ij}^{15} + Q_{ij}^{22},$$
$$C_{3i,\,3j} = Q_{ij}^{6} + Q_{ij}^{7} + Q_{ij}^{8} + Q_{ij}^{9} + Q_{ij}^{23},$$

де $i, j = 1, 2, \ldots, m/3$.

Розглянемо реалізацію базового клітинного методу (4)–(7) у рекурсивному режимі, де на першому кроці рекурсії формуються 23 пари клітинних матриць порядку $m/3$ для виконання операції добутку для кожної пари. Разом з тим обчислюються клітинні матриці, які складаються з чисельних клітин-коефіцієнтів, що визначаються за формулами (4) і (5). До того ж формуються матриці, які містять чисельні клітини, що належать вихідним матрицям $A = (A_{ij})$, $B = (B_{ij})$ та визначаються за зазначеними індексами відповідно до формул (6). Сформовані на першому рекурсивному кроці 23 пари клітинних матриць порядку $m/3$ є проміжними і розглядаються як вихідні клітинні матриці для наступного рекурсивного кроку, де для кожної з цих пар формуються нові 23 пари клітинних матриць порядку $m/9$ аналогічно першому рекурсивному кроку. На кожному наступному кроці рекурсії порядок оперувальних клітинних матриць зменшується втричі. На останньому кроці метод оперує клітинними (9×9)-матрицями, остаточно формуючи для кожної пари проміжних клітинних матриць заданого порядку нові 23 пари клітинних (3×3)-матриць та виконуючи далі обчислення відповідно до формул (6), (7). Для реалізації повного рекурсивного обчислювального процесу клітинний метод потребує $\log_3 m - 1$ рекурсивних кроків.

Правильність цього клітинного методу стверджуємо за сукупністю тестових прикладів.

ОЦІНЮВАННЯ МУЛЬТИПЛІКАТИВНОЇ СКЛАДНОСТІ РЕКУРСИВНОГО КЛІТИННОГО МЕТОДУ МНОЖЕННЯ МАТРИЦЬ ПОРЯДКУ $n = 3^q r$ $(q > 1,\ n/r = m)$

Оскільки базовий клітинний метод (1)–(3) має мультиплікативну складність, яка дорівнює $W_M^{\text{баз}} = 23 \cdot \left(\frac{m}{3}\right)^3 = \frac{23}{27} m^3 = 0.851\, m^3$ клітинним операціям множення, мультиплікативна складність рекурсивного клітинного методу, який побудовано на його основі, визначається за формулою

$$W_M^{\text{рек}} = 23^{(\log_3 m - 1)} \cdot 3^3 = 23^{\log_3 m} \cdot \frac{27}{23} = 1.17 m^{\log_3 23} \sim 1.17 m^{2.854}$$

клітинних операцій множення.

Враховуючи, що для кожної клітинної операції множення внутрішній алгоритм потребує $W_M^{\text{внутр}}$ скалярних операцій множення, мультиплікативна складність базового та рекурсивного клітинних методів складає $W_M^{\text{баз}} = 0.851 m^3 = 0.851 \cdot \frac{n^3}{r^3} \cdot W_M^{\text{внутр}}$ скалярних операцій множення, $W_M^{\text{рек}} = 0.851 m^{(\log_3 m - 1)} \cdot \frac{n^3}{r^3} \cdot W_M^{\text{внутр}}$ скалярних операцій множення.

Якщо традиційний алгоритм множення матриць, що потребує r^3 скалярних операцій множення, використовується як внутрішній алгоритм, то отриманий на основі цього рекурсивного методу клітинний аналог традиційного алгоритму має мультиплікативну складність, яка дорівнює

$$W_M^{\text{трад}} = 0.851^{(\log_3 m-1)} \cdot \frac{n^3}{r^3} \cdot r^3 = 0.851^{(\log_3 m-1)} \cdot n^3 = 0.851^{(q-1)} \cdot n^3$$

скалярним операціям множення.

Аналогічно визначається мультиплікативна складність клітинних аналогів інших відомих алгоритмів множення матриць.

ВИСНОВКИ

У роботі вперше наведено два рекурсивні клітинні методи парного та непарного порядку, які оперують чисельними клітинами, варіюючи їхній порядок, та відрізняються від відомих клітинних методів найменшою мультиплікативною складністю.

Запропоновані методи розроблено у межах нового підходу до побудови рекурсивних клітинних методів множення матриць. Основою для підходу є застосування відомих швидких клітинних методів множення матриць парного та непарного порядку як базових, що дає змогу отримати клітинні аналоги відомих алгоритмів множення матриць з максимально мінімізованою мультиплікативною складністю.

Нові рекурсивні методи розширюють сім'ю клітинних методів множення матриць та можуть ефективно реалізовуватися у матричних машинах та системах.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Modi J.J. Parallel algorithms and matrix computation. Oxford: Clarendon Press, 1988. 260 p.
2. Jelfimova L.D. A fast cellular method of matrix multiplication. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2008. Vol. 44, N 3. P. 357–361.
3. Jelfimova L.D. A mixed cellular method of matrix multiplication. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2009. Vol. 45, N 1. P. 19–24.
4. Jelfimova L.D. New cellular methods for matrix multiplication. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2013. Vol. 49, N 1. P. 15–25.
5. Jelfimova L.D. A unified cellular method for matrix multiplication. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2013. Vol. 49, N 5. P. 663–672.
6. Jelfimova L.D. An ultrafast cellular method for matrix multiplication. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. Vol. 54, N 6. P. 892–899.
7. Strassen V. Gaussian elimination is not optimal. *Numerische Mathematik*. 1969. Vol. 13. P. 354-356.
8. Laderman J.D. A noncommutative algorithm for multiplying 3 × 3 matrices using 23 multiplications. *Bulletin of the American Mathematical Society.* 1976. Vol. 82, N 1. P. 126–128.

L.D. Jelfimova

RECURSIVE CELLULAR METHODS OF MATRIX MULTIPLICAION

Abstract. Two recursive cellular methods for multiplying matrices of even and odd order, namely: $n = 2^q r$ anda $n = 3^q r$ ($q > 1$, r is the order of the cellules, $n / r = m$) are proposed. These methods are based on the well-known fast cellular methods for multiplying matrices of order $n = 2\mu r$ $(\mu > 1)$ for $\mu = 2^q$ $(q > 0)$ and $n = 3\mu r$ $(\mu > 1)$ for $\mu = 3^q$ $(q > 0)$. New methods for multiplying cellular $(m \times m)$-matrices operate by numerical $(r \times r)$-cellules, variate their order, and are characterized by the lowest (compared to the well-known cellular methods) multiplicative complexity, which equal, respectively, to $O(1,14m^{2,807})$ and $O(1,17m^{2,854})$ cellular operations of multiplication. These methods allow obtaining cellular analogs of the well-known matrix multiplication algorithms with maximally minimized multiplicative complexity, whose estimation is illustrated by the example of the traditional matrix multiplication algorithm.

Keywords: linear algebra, family of cellular matrix multiplication methods, cellular analogs of matrix multiplication algorithms.

Надійшла до редакції 22.02.2022