СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ

УДК 519. 21

**П.С. КНОПОВ**
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *knopov1@yahoo.com*.

# ОПТИМІЗАЦІЯ ТА ІДЕНТИФІКАЦІЯ СТОХАСТИЧНИХ СИСТЕМ[1]

**Анотація.** У роботі наведено огляд деяких широко відомих наукових результатів з теорії стохастичної оптимізації та теорії ризику, одержаних академіком НАН України Ю.М. Єрмольєвим, його колегами та учнями. Розглянуто приклади з теорії параметричного та непараметричного оцінювання.

**Ключові слова:** стохастична оптимізація, оцінювання, розподіл, ризик.

## ВСТУП

1 жовтня 2022 року пішов з життя видатний математик і кібернетик сучасності, академік НАН України Юрій Михайлович Єрмольєв. Він був співзасновником славетної української школи оптимізації і, зокрема, такого важливого її розділу, як теорія стохастичної оптимізації. Розроблені прямі методи стохастичного програмування започаткували новий науковий напрям і принесли Ю.М. Єрмольєву світове визнання. Ця стаття висвітлює деякі актуальні задачі стохастичної оптимізації, які стали предметом досліджень Ю.М. Єрмольєва, його колег та учнів. Однією із актуальних проблем сучасної теорії оптимізації є необхідність прийняття рішень в умовах ризику та невизначеності. Особливість цього класу задач — відсутність повної інформації про функції цілі, функції обмежень та їхні похідні. Такі задачі можна формалізувати в межах загальної теорії стохастичного програмування, де в явному вигляді враховується імовірнісний характер досліджуваних процесів, а також ризик, зумовлений невизначеністю, як невід'ємною рисою процесу прийняття рішень.

## ЗАГАЛЬНА ЗАДАЧА СТОХАСТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Ця задача формулюється як задача мінімізації нелінійної цільової функції $F^0(x)$ за умов обмежень

$$F^i(x) \le 0, \; i = 1, \ldots, m; \; x \in X \subset R^n,$$

де функції мають вигляд математичного сподівання $F^i(x) = Ef^i(x, \omega) = \int f^i(x, \omega) P(d\omega)$ від деякої випадкової функції $f^i(x, \omega)$, $\omega$ — випадковий параметр задачі.

[1] Роботу виконано за часткової підтримки Національного фонду досліджень України. Грант № 2020.02/0121.

Ю.М. Єрмольєв розробив стохастичний квазіградієнтний метод розв'язання задач стохастичного програмування для достатньо широких класів цільових функцій та функцій обмежень [1–11]. Ми не маємо можливості детально зупинитися на всіх проблемах, дотичних до теорії стохастичної оптимізації, і результатах, одержаних Ю.М. Єрмольєвим, його учнями та колегами, тому зупинимось на деяких наукових результатах з цієї проблематики. Стохастичні квазіградієнтні методи можна розглядати як узагальнення методів стохастичної апроксимації на задачі з обмеженнями, методу Монте-Карло на задачі оптимізації, а також як розвиток методів випадкового пошуку. Основна особливість квазіградієнтних методів полягає в тому, що вони не потребують обчислення точних значень функцій цілі й обмежень, а використовують реалізації підінтегральних функцій та їхніх узагальнених градієнтів. Однією з актуальних проблем є дослідження швидкості збіжності ітеративних процедур методів стохастичного програмування, дослідження асимптотичних властивостей стохастичних квазіградієнтних методів (SQM), які дають змогу дослідити швидкість збіжності ітеративних послідовностей та знайти їхній асимптотичний розподіл.

## МЕТОД ЕМПІРИЧНИХ СЕРЕДНІХ

Останнім часом набули широкого застосування й інші методи стохастичного програмування. Одним із таких методів є метод емпіричних середніх. Він полягає в апроксимації функцій математичного сподівання $F^i(x) = Ef^i(x, \omega)$ їхніми емпіричними оцінками $F^i(x, N) = (1/N)\sum_0^N f^i(x, \omega^k)$ і в розв'язуванні наближених детермінованих задач оптимізації вигляду

$$\min\{F^0(x, N) / F^i(x, N) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m; x \in X \subset R^n\}.$$

Метод емпіричних середніх пов'язаний з методами теорії ідентифікації та робастного оцінювання. Ці дослідження проведені у роботах [12–17].

У подальшому розглядатимемо такі методи стохастичної оптимізації та оцінювання:

— емпіричні параметричні методи оптимізації та ідентифікації стохастичних систем;

— непараметричні методи оптимізації та ідентифікації стохастичних систем.

Перші методи використовують для широкого класу так званих М-оцінок, втім як спостереження вибирається стаціонарний випадковий процес з дискретним або неперервним часом, а невідомі параметри задовольняють деякі апріорні обмеження. Другі методи присвячено дослідженню стохастичних систем, у яких невідомим параметром є елемент деякого функціонального простору. Для дослідження цих задач доводиться розробити, з одного боку, нові методи непараметричної стохастичної оптимізації; з іншого боку, для асимптотичного аналізу оцінок потрібно використовувати сучасний апарат асимптотичного стохастичного аналізу для функціональних просторів. Ми також зупинимося на деяких проблемах застосуваннях теорії стохастичної оптимізації та теорії робастного оцінювання у сучасній теорії ризику.

Перейдемо до стислого викладення розглянутих вище питань і отриманих результатів. Детальніше ці результати наведено у роботах [12–17].

**Емпіричні параметричні моделі оптимізації та ідентифікації стохастичних систем.** Розглянемо таку задачу. Нехай $\{\xi_i, i \in Z\}$ — стаціонарний у вузькому сенсі ергодичний випадковий процес з дискретним параметром, який визначено на повному ймовірнісному просторі $(\Omega, F)$. Він приймає значення у деякому метричному просторі $(Y, B(Y))$, де $J$ — замкнена підмножина $R^l$, $l \ge 1$; $f: J \times Y \to R$ є невід'ємною неперервною за першим аргументом й вимірною за другим.

Маємо спостереження

$$\{\xi_i,\ i = 1, \ldots, n\},\ n \ge 1.$$

Потрібно знайти точки мінімуму та мінімальне значення функції

$$F(u) = Ef(u, \xi_i),\ u \in J.$$

Визначимо таку емпіричну оцінку функції

$$F_n(u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(u, \xi_i).$$

Тоді має місце твердження.

**Теорема 1.** Припустимо, що виконано такі умови:

1) для всіх $c > 0$

$$E\{\max_{\|u\| \le c} f(u, \xi_i)\} < \infty;$$

2) для всіх $z \in Y$ $f(u, z) \to \infty$, $\|u\| \to \infty$;

3) існує єдина точка мінімуму $u_0$ функції $F(u)$.

Тоді існує щонайменше одна точка $u_n(\omega)$, яка мінімізує $F_n(u)$ і може бути вибрана $G_n$-вимірною, де $G_n = \sigma\{\xi_i, i = 1, \ldots, n\}$, та

$$P\{u_n \to u_0,\ F_n(u_n) \to F(u_0),\ n \to \infty\} = 1.$$

**Теорема 2.** Припустимо, що

$$Ef(u, \xi_i) < \infty,\ u \in J,$$

і нехай $u_0$ та $u_n$ — точки мінімуму функцій $F(u)$ та $F_n(u)$ відповідно. Нехай

$$P\{u_n \to u_0,\ n \to \infty\} = 1$$

та виконано такі умови:

1) $u_0$ є внутрішньою точкою $J$;

2) існує замкнений окіл $S$ точки $u_0$ такий, що для всіх $z \in Y$ функція $f(u, z)$, $u \in S$, є двічі неперервно диференційованою на $S$;

3)
$$E\{\max_{u \in S} \|\nabla f(u, \xi_1)\|\} < \infty,$$

де
$$\nabla f(u, z) = \left( \frac{\partial f}{\partial u_j}(u, z) \right)_{j=1}^{l};$$

4)
$$E\left\{\max_{u \in S} \|\Phi(u, \xi_1)\|\right\} < \infty,$$

де
$$\Phi(u, z) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial u_j \partial u_k}(u, z) \right)_{j, k=1}^{l};$$

5) $\det A_0 \ne 0$, де $A_0 = E\{\Phi(u, \xi_1)\}$;

6) послідовність $\xi_i$ задовольняє умову сильного перемішування з коефіцієнтом перемішування

$$\alpha(k)=\sup_{\substack{A_1\in F_{-\infty}^{i}\\ A_2\in F_{i+k}^{\infty}}}|P(A_1\cdot A_2)-P(A_1)P(A_2)|=O(k^{-1-\varepsilon}),\ \varepsilon>0,$$

де $F_k^j=\sigma\{\xi_i,\ k\le i\le j\}$;

7) для деякого $\delta>\dfrac{4}{\varepsilon}$

$$E\{\|\nabla f(u_0,\xi_1)\|^{2+\delta}\}<\infty;$$

8) $g(0)\neq 0$, де $g(\lambda)=(g_{jk}(\lambda))_{j,k=1}^{l}$ — спектральна щільність $\{\nabla f(u_0,\xi_1)$, $i\in Z\}$;

9) $\det A_0\neq 0$.

Тоді $\sqrt{n}(u_n-u_0)$ збігається за розподілом до $N(0{,}2\pi(A_0)^{-1}g(0)(A_0)^{-1})$, $n\to\infty$, де $A_0=E\Phi(u_0,\xi_1)$.

Якщо також виконуються умови:

10) для деякого $\delta_1>\dfrac{4}{\varepsilon},\ \varepsilon>0$

$$E\{f(u_0,\xi_1)^{2+\delta_1}\}<\infty;$$

11) $g_1(0)\neq 0$, де $g_1(\lambda)$ — спектральна щільність $f(u_0,\xi_1)$,
то $\sqrt{n}(F_n(u_n-F(u_0)))$ збігається за розподілом до $N(0,2\pi g_1(0))$, $n\to\infty$.

Зупинимося тепер на випадку, коли час є неперервним, а саме: нехай у моделі, яка розглядалася вище, замість дискретного часу $i$ маємо неперервний параметр $t$ і сімейство $\{\xi_t,\ t\in[0,T]\}$ задовольняє умови, аналогічні до дискретного часу.

Розглянемо функціонали

$$F(u)=Ef(u,\xi_0),\ u\in J,\ \text{та}\ F_T(u)=\frac{1}{T}\int_0^T f(u,\xi_t)\,dt,\ u\in J.$$

Нехай $u_0$ та $u_T$ — відповідно точки мінімуму $F(u)$ та $F_T(u)$. Тоді для $u_T$ та $F_T(u_T)$ мають місце твердження, аналогічні до теорем 1 та 2.

Для практичних задач особливий інтерес становлять моделі, в яких обмеження на параметр $u$ задаються деякою системою нерівностей, а саме

$$J=\{u\in R^l:\ g(u)=(g_1(u),\ldots,g_m(u))\le 0\},$$

де нерівність $\le 0$ слід розуміти покомпонентно.

Припустимо, що має місце сильна консистентність оцінок $u_n$ та $u_T$ (відповідно для дискретного та неперервного часу), то виникає питання: яким буде асимптотичний розподіл: $\sqrt{n}(u_n-u_0)$ чи $\sqrt{T}(u_T-u_0)$, $n\to\infty$, $T\to\infty$.

Доведено, що у разі, коли $u_0$ буде внутрішньою точкою $J$, то асимптотичний розподіл буде Гаусів. Однак найбільш цікавим є випадок, коли $u_0$ є граничною точкою $J$. Тоді за деяких умов відносно коефіцієнтів перемішування $\alpha(k)$ та моментів доведено, що $\zeta_n=\sqrt{n}(u_n-u_0)$ з дискретним часом та $\sqrt{T}(u_T-u_0)$ з неперервним часом збігається за розподілом до такої задачі квадратичного програмування:

$$\frac{1}{2}x'\Phi(u_0)x+\xi'x\to\min, \tag{1}$$

$$\nabla g_i(u^+)u\le 0, \tag{2}$$

де $\xi\in N(0,B)$, $B=E\{\nabla f(u_0,\xi_0)\nabla f(u_0,\xi_0)'\}$.

Моделі, які розглядалися вище, можна узагальнювати на ширший клас задач, а саме на випадок нестаціонарних моделей оптимізації та ідентифікації.

Розглянемо випадковий процес з дискретним часом $\{\xi_n,\ n=0,1,\dots\}$ на імовірнісному просторі $(\Omega, F, P)$, $\xi_n \in R^m$, $m \geq 1$, $J$ — замкнена підмножина в $R^p$, $p \geq 1$, $\|\cdot\|$ — норма в $R^p$. Нехай функція $f(i, x, y): N \times J \times R^m \to R_+$, $R=(0,\infty)$, є неперервною за другим аргументом та вимірною за третім. Необхідно розв'язати таку задачу:

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(i, x, \xi_i) \to \min_{x\in J}.$$

Якщо існує єдина точка $x^* \in J$ така, що

$$\varliminf_{n\to\infty} E[F_n(x) - F_n(x^*)] > 0,$$

то за умов сильного перемішування на випадкову функцію $f(i, x, \xi_i)$ та скінченність моментів $f(i, x, \xi_i)$ доведено, що

$$P\{\lim_{n\to\infty} \|x_n - x^*\| = 0\} = 1,$$

де $x_n = \arg\min_{x\in J} F_n(x)$.

Також має місце центральна гранична теорема для величин $\sqrt{n}(x_n - x^*)$, аналогічна до сформульованої вище для стаціонарного випадку.

Якщо обмеження на невідомий параметр задано у вигляді нерівностей, то, як і раніше, знаходження асимптотичного розподілу $\sqrt{n}(x_n - x^*)$ зводиться до задачі квадратичного програмування у вигляді (1), (2).

Зауважимо також, що у разі розв'язання задачі оптимізації

$$F_T(x) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t, x, \xi(t))\, dt \to \min_{x\in J}$$

мають місце твердження, аналогічні до випадку з дискретним часом.

**Параметричні моделі ідентифікації для деяких конкретних регресійних моделей.** Наведемо низку прикладів використання сформульованих вище результатів для деяких регресійних моделей випадкових процесів та полів.

1. Нехай $(x_i, y_i)$, $i \geq 1$, — незалежні однаково розподілені випадкові вектори на повному імовірнісному просторі $(\Omega, F, P)$ зі значеннями в $R^{k+m}$, $x_i \in R^k$, $y_i \in R^m$, $k, m \geq 1$. Нехай також

$$\| a\|^p = \sum_{j=1}^{k} |a_i|^p,\ (a_j)_{j=1}^k \in R^k,\ p=1,\ 2,\ f=(f_j)_{j=1}^k : J \times R^m \to R^k$$

— деяка відома функція, яка є неперервною за першим аргументом та вимірною за другим, а також

$$F_n(u) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \|x_i - f(u, y_i)\|,\ u \in J.$$

Необхідно розв'язати задачу: знайти $\min F_n(u)$ та дослідити його асимптотичну поведінку.

Нехай існує єдина точка $u_0$, що є медіаною для $x_{j1} - f_j(u, y_1)$. Необхідно на підставі спостережень $\{(x_i, y_i), i = 1, \ldots, n\}$ знайти величину $u_n$, яка мінімізує $F_n(u)$. З використанням одержаних результатів представлено умови сильної консистентності $u_n$ та $F_n(u_n)$.

2. Аналогічна задача розглядалася для функціонала

$$F_n(u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \| x_i - f(u, y_i) \|^2, \; u \in J .$$

Нехай

$$z(s, t) = x(s, t) - E\{x(s, t) \setminus F\},$$

$$E\{x(s, t) \setminus F\} = a(s, t)' \theta y(s, t) \text{ з імовірністю } 1,$$

де $\theta \in R^m$ — невідомий параметр, $a' = \{a_1, \ldots, a_m\}$ — неперервна векторна функція, $(x(s, t), y(s, t))$ — випадкове двовимірне Гаусове поле. Якщо за оцінку параметра $\theta$ прийняти оцінку найменших квадратів $\theta_T$, то можна довести, що за деяких умов $\theta_T$ буде сильно консистентною оцінкою $\theta$, а для деякого нормування — й асимптотично нормальною.

3. Розглянемо незалежні Гаусові величини $y_i = N(\mu_i, \sigma_i^2)$ та неперервні строго монотонні функції $g_1$ та $g_2$, до того ж

$$g_1(\mu_i) = \eta_i = \sum_{j=1}^{k} x_{ij} \beta_j^0, \; g_2(\sigma_i^2) \xi_i = \sum_{j=1}^{l} z_{ij} \gamma_j^0 ,$$

де для невідомих параметрів виконується $\beta = (\beta_1^0, \ldots, \beta_k^0) \in B \subset R^k$ та $\gamma^0 = (\gamma_1^0, \ldots, \gamma_k^0) \in \Gamma \subset R^l$.

Потрібно оцінити параметри $\beta^0$ та $\gamma^0$ з використанням спостережень $(y_i, x_i, z_i)$. Функція критерію вибирається у вигляді

$$F_n(\beta, \gamma) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{[y_i - g_1^{-1}(\sum_{j=1}^{k} x_{ij} \beta_j)]^2}{g_2^{-1}(\sum_{j=1}^{l} z_{ij} \gamma_i)} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log 2\pi g_2^{-1} \left( \sum_{j=1}^{l} z_{ij} \gamma_j \right).$$

Із загальних наведених тверджень можна сформулювати умови сильної консистентності величин $\beta_n, \gamma_n$, які мінімізують функціонал $F_n(\beta, \gamma)$.

**Емпіричні непараметричні методи ідентифікації стохастичних систем.** Розглянемо важливий клас задач ідентифікації, який пов'язаний з визначенням невідомої функції, яка спостерігається з похибками у скінченному числі точок. Сформулюємо більш загальний результат, з якого випливатиме і рішення зазначеної задачі.

Нехай $\{\xi(t) = \xi(t, \omega), \; t \in [0,1]^l\}$, $l \geq 1$, — деяке випадкове поле, яке визначено на імовірнісному просторі $(\Omega, F, P)$, приймає значення у метричному просторі $(Y, B(Y))$ і має неперервні з імовірністю 1 траєкторії.

Позначимо $C[0,1]^k$ простір дійсних неперервних функцій на $[0,1]^k$ з нормою

$$\| \alpha \| = \max_{t \in [0,1]^k} | \alpha(t) | .$$

Припустимо, що $K$ — деяка компактна підмножина на $C[0,1]^{m+l}$, $m \geq 1$. Нехай відома деяка неперервна функція $f\colon [0,1]^l \times J \times Y \to R$, $J = [-c, c]$, така, що

$$\sup_{s\in[0,1]^m,\ t\in[0,1]^l} E|f(s,t,\alpha(s,t),\xi(t))|<\infty,\ \ \alpha\in K.$$

Зазначимо, що

$$\{\zeta(i,n,t),\ \ i\in Z_+^m,\ \ i\le n,\ \ t\in[0,1]^l\},\ \ n\in N^m,$$

і нехай для цього випадкового поля виконано умови:

а) для всіх $i\le n$ $\zeta(i,n,t)$ та $\xi(t)$ мають однакові скінченновимірні розподіли;

б) для кожного $i\le n$ $\zeta(i,n,t)$ має неперервні з імовірністю 1 траєкторії.

Розглянемо функціонал

$$F(\alpha)=E\int_{[0,1]^{m+1}} f(s,t,\alpha(s,t),\xi(t))^2\,dsdt,\ \ \alpha\in K,$$

для якого існує єдиний елемент $\alpha_0\in K$ такий, що

$$F(\alpha_0)=\min_{\alpha\in K}F(\alpha).$$

Цю задачу апроксимуємо такою задачею. Нехай

$$F_n(\alpha)=\frac{1}{\prod_{j=1}^m n_j}\sum_{i\le n}\int_{[0,1]^l} f\big(s(i,n),t,\alpha(s(i,n),t),\zeta(i,n,t)\big)dt,$$

де $\alpha\in K$, $n=(n_j)_{j=1}^m$, $i=(i_j)_{j=1}^m$, $s(i,n)=\left(\dfrac{i_j}{n_j}\right)_{j=1}^m$ і $\alpha_n=\arg\min_{\alpha\in K}F_n(\alpha)$.

Має місце таке твердження.

**Теорема 3.** Нехай

$$E\left\{\max_{\alpha\in K} f^2(s,t,\alpha(s,t),\xi(t))\right\}<\infty.$$

Тоді

$$\|\alpha_n-\alpha_0\|\to 0,\ \ F_n(\alpha_n)\to F(\alpha_0)$$

за імовірністю.

Якщо додатково

$$E\{\max_{\alpha\in K} f^4(s,t,\alpha(s,t),\xi(t))\}<\infty,$$

то маємо збіжність $\|\alpha_n\to\alpha_0\|\to 0$ і $F_n(\alpha_n)$ до $F(\alpha_0)$ з імовірністю 1.

Розглянемо тепер таку задачу.

Нехай $\xi$ — елемент імовірносного простору $(\Omega, F, P)$, що приймає значення на просторі $(Y, B(Y))$, і функція $f:[0,1]^m\times J\times Y\to R$, для якої виконано такі умови:

а) для деякого $y\in Y$ $f(t,x,y)$ є неперервною;

б) для кожного $t\in[0,1]^m$ функція $f(t,x,y)$ є $B(Y)$-вимірною;

в) $E|f(t,\alpha(t),\xi)|<\infty$.

Нехай $\{\xi(i,n), i\in Z_+^m, i\le n\}$ — незалежні спостереження $\xi$, а також

$$F(\alpha)=E\int_{[0,1]^l} f(t,\alpha(t),\xi)\,dt,$$

$\alpha_0$ — єдина на $K$ точка мінімуму $F(\alpha)$.

Задачу мінімізації $F(\alpha)$ апроксимуємо такою задачею. Мінімізувати

$$F_n(\alpha) = \frac{1}{\prod_{j=1}^m n_j} \sum_{i \le n} f(t(i, n), \alpha(t(i, t), \xi)),$$

де $n = (n_j)_{j=1}^m$, $i = (i_j)_{j=1}^m$, $t(i, n) = \left( \frac{i_j}{n_j} \right)_{j=1}^m$ і $\alpha_n = \arg\min_{\alpha \in K} F_n(\alpha)$. Має місце таке твердження.

**Теорема 4.** Нехай

$$E \max_{\alpha \in K} f(t, \alpha(t), \xi)^2 < \infty.$$

Тоді

$$\| \alpha_n - \alpha_0 \| \to 0, \; F_n(\alpha_n) \to F(\alpha_0)$$

за імовірністю.

Якщо

$$E \max (f(t, \alpha(t), \xi))^4 < \infty,$$

то

$$\| \alpha_n - \alpha_0 \| \to 0, \; F_n(\alpha_n) \to F(\alpha_0)$$

з імовірністю 1.

З теорем 3 та 4 випливають такі результати, що пов'язані з проблемами відновлення функції $f$.

Нехай

$$x(i, n, t) = \alpha_0(s(i, n), t) + \zeta(i, n, t), \; t \in [0, 1]^l, \; i \le n,$$

де $\xi(i, n, t)$ — сімейство випадкових полів на $(\Omega, F, P)$.

Потрібно за спостереженнями $x(i, n, t)$ відновити функцію $\alpha_0(s, t)$. Якщо за $F_n(\alpha)$ обрати функціонал

$$F_n(\alpha) = \frac{1}{\prod_{j=1}^m n_j} \sum_{i \le n} \int_{[0, 1]^l} |x(i, n, t) - \alpha(s(i, n), t)| \, dt \tag{3}$$

і $\alpha_n = \arg\min_{\alpha \in K} F_n(\alpha)$, то з теореми 4 випливають збіжності $\alpha_n$ до $\alpha_0$ та $F_n(\alpha_n)$ до $F(\alpha_0)$. Зауважимо, що замість (3) можна розглядати інші функціонали, наприклад функціонал максимальної правдоподібності або функціонал методу найменших квадратів і, нарешті, можна розглянути модель спостереження

$$x(i, n) = \alpha_0(s, i, n) + \xi(i, n)$$

та функціонал

$$F_n(\alpha) = \frac{1}{\prod_{j=1}^m n_j} \sum_{i \le n} |x(i, n) - \alpha(s(i, n))|.$$

Нехай також $\alpha_n = \arg\min_{\alpha \in K} F_n(\alpha)$.

Тоді з теореми 3 випливає, що для $\alpha_n$ та $F_n(\alpha_n)$ мають місце твердження про збіжність, які аналогічні до попередніх тверджень.

Однією з важливих проблем стохастичної оптимізації є дослідження швидкості збіжності наближеного розв'язання до справжнього розв'язання задачі. Особливо цікавим є випадок, коли спостереження є залежними. До того ж істотною виявилася умова гіперперемішування [12, 15], яка характеризує ступінь залежності випадкових величин. Перш ніж вводити поняття гіперперемішування, дамо такі визначення.

**Означення 1.** Нехай $B$ — сепарабельний Банахів простір і $\{\xi_i, i \geq 1\}$ — стаціонарна у вузькому сенсі випадкова послідовність, що задана на імовірнісному просторі $\left(\Omega, \Im, P\right)$ із значеннями в $B$. Нехай $\Im_{mk}$— $\sigma$-алгебра на $\Omega$, що утворена випадковою послідовністю $\{\xi_i, m \leq i \leq k\}$. Для деякого цілого $l$ дійсні випадкові величини $\eta_1, \ldots, \eta_p$, $p \geq 2$, назвемо $l$-вимірними, якщо $-\infty \leq m_1 \leq k_1 < m_2 \leq k_2 < \ldots < m_p \leq k_p \leq +\infty$ та для кожного $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$ неспадні величини $\eta_j$ є $\Im_{m_j k_j}$-вимірними.

**Означення 2.** Випадкову послідовність $\{\xi_i, i \geq 1\}$ з означення 1 назвемо послідовністю з гіперперемішуванням, якщо існують ціле недодатне число $l_0$ та незростальні функції $\alpha, \beta: \{l, l_0\} \to [1, +\infty)$ і $\gamma: \{l, l_0\} \to [0, 1]$, що задовольняють співвідношення

$$\lim_{l \to \infty} \alpha(l) = 1,$$

$$\lim_{l \to \infty} \sup l\left(\beta(l) - 1\right) < \infty,$$

$$\lim_{l \to \infty} \gamma(l) = 0,$$

та для яких $\| \eta_1 \ldots \eta_p \|_{L^1(P)} \leq \prod_{j=1}^{p} \| \eta_j \|_{L^{\alpha(l)}(P)}$ для довільних $p \geq 2$, $l > l_0$, $\eta_1, \ldots, \eta_p$ $l$-вимірних величин, де

$$\| \eta \|_{L^r(P)} = \left( \int_\Omega \left| \eta(\omega) \right|^r dP \right)^{1/2},$$

$$\left| \int_\Omega \left[ \xi(\omega) - \int_\Omega \xi(\omega) dp \right] \eta(\omega) dP \right| \leq \gamma(l) \| \xi \|_{L^{\beta(l)}(P)} || \eta ||_{L^{\beta(l)}(P)}$$

для усіх $l > l_0$, та $l$-вимірних $\xi, \eta \in L^1(P)$.

Нехай $C(X)$ — множина неперервних дійсних функцій, заданих на $X$— компактній множині з деякого Банахова простору $B$. Як відомо з [12, 15], $C(X)^* = M(X)$ (* — знак спряження) — сукупність обмежених знакових мір на $K$. Має місце таке твердження.

**Теорема 5.** За умов гіперперемішування виконується нерівність

$$\lim_{n \to \infty} \sup \frac{1}{n} \ln P\{ \left| \min\{Ef(u, \xi_i), u \in K\} - \min\{F_n(u), u \in K\} \right| \geq \varepsilon\} \leq -\inf\{I(z), z \in A_\varepsilon\},$$

де

$$A_\varepsilon = \{z \in K: \| z \| > \varepsilon\},$$

$$I(z) = \sup_{Q \in M(X)} \int_X z(x) Q(dx) - \Lambda(Q), \quad Q \in M(X),$$

$$\Lambda(Q) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \left( \int_\Omega \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \int_X \xi_i(\omega)(u) Q(du) \right\} dP \right).$$

Для формулювання твердження про велике ухилення для точок мінімуму функції $F_n(u)$ знадобиться таке означення.

**Означення 3.** Нехай $(V, \|\cdot\|)$ — нормований лінійний простір, $B(x, \rho)$ — замкнений окіл у $V$ радіуса $\rho$ з центром у точці $x$, $f: V \to [-\infty, \infty]$ — деяка функція і $f(x_f) = \min\{f(x), x \in V\}$. Функцію $\psi$ назвемо поліпшувальною для функції $f$ у точці $x_f$, якщо $\psi: [0, +\infty] \to [0, +\infty]$, $\psi(0) = 0$ та для деякого $\rho > 0$ і усіх $x \in B(x_f, \rho)$ має місце нерівність

$$f(x) \geq f(x_f) + \psi(\|x - x_f\|).$$

**Теорема 6.** Нехай виконано умови теореми 5 та існує поліпшувальна функція $\psi$ для $F(x)$ у точці $x^*$. Нехай $x_n$ — точки мінімуму функцій $F_n(x)$ на множині $B(u_0, \rho)$. Якщо $\varepsilon > 0$ вибрати таким чином, щоб з нерівності $\psi(\|x - x^*\|) \leq 2\varepsilon$ виконувалася нерівність $\|x - x^*\| < \rho$, то

$$\lim_{l \to \infty} \sup \frac{1}{n} \ln P\{\|x - x^*\| \geq \psi^{-1}(2\varepsilon)\} \leq -\inf\{I(z), z \in A_\varepsilon\}.$$

#### СТОХАСТИЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ І ТЕОРІЯ РИЗИКУ

Ю.М. Єрмольєв зробив вагомий внесок у сучасну теорію ризику, застосуванні методів стохастичної оптимізації для розв'язування прикладних задач, що з'являються у нових галузях досліджень, а саме у сфері безпеки, фінансів, економіки, екології, управління водними ресурсами, енергетики, агропромислового комплексу, а також у прикладних міжгалузевих, міждисциплінарних та інтегрованих проблемах та ін. Ці методи розвивалися для вирішення прикладних задач за конкретних даних України та інших країн з використанням глобальних даних. Особливе значення SQM мають для аналізу безпеки та ефективності процесів глобалізації, які виникають за умов дерегуляції та асиметричної інформації учасників. Формулювання, моделювання і розв'язання таких задач потребують широкого міжнародного співробітництва, що зумовило на початку 1970-х років заснування Міжнародного інституту прикладного системного аналізу (IIASA). В його роботі з часу створення беруть активну участь Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України та Академія наук України в цілому. Починаючи з 1970-х років Ю.М. Єрмольєв здійснював вагому організаційно-методологічну підтримку щодо співробітництва IIASA з багатьма спеціалістами Національної Академії наук України. Він зробив суттєвий внесок у подальший розвиток методів та алгоритмів системного аналізу і кібернетики для проєктування та управління складними взаємозалежними системами за умов неповної інформації, невизначеностей і ризиків. Детальніше ці проблеми розглядались у роботах [18–29].

## ВИСНОВКИ

У роботі наведено огляд актуальних проблем теорії стохастичної оптимізації та деяких наукових результатів, одержаних Ю.М. Єрмольєвим, його учнями та колегами. Вони мають світове визнання наукової спільноти і заклали основу широко відомої української школи стохастичної оптимізації та теорії ризику.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. Ермольев Ю.М. Методы стохастического программирования. Москва: Наука, 1976. 240 с.
2. Ermoliev Yu.M., Wets R. (eds.) Techniques for stochastic optimization. Berlin: Springer, 1988. 571 p.
3. Каниовский Ю.М., Кнопов П.С., Некрылова З.В. Предельные теоремы для процессов стохастического программирования. Киев: Наук. думка, 1980. 156 с.
4. Ermoliev Y.M., Norkin V.I. On nonsmooth and discontinuous problems of stochastic systems optimization. *European J. of Oper. Res*. 1997. N 2. P. 230–243.
5. Ermoliev Y., Leonardi G. Some proposals for stochastic facility locations models. *Mathematical model.* 1982. Vol. 5, N 5. P. 407–420.
6. Keyzer M., Ermoliev Y. Modeling producer decisions in a spatial continuum. *The Theory of Markets.* Herings P., Van der Laan G., Talman A. (eds.). Amsterdam; Oxford; New York: North-Holland, 1999. P. 281–305.
7. Ermoliev Y., Nedeva C. Stochastic optimization problem with partially known distribution 5 functions. Laxenburg, Austria: Intern. In-t for App. Systems Analysis. cp-82-60, 1982. 16 p.
8. Ermoliev Yu., Gaivoronski A., Nedeva S. Stochastic optimization problems with incomplete information on distribution functions. *SIAM J. Control Optim*. 1985. Vol. 23, N 56. P. 697–716.
9. Norkin V.I., Pflug G.Ch., Ruszczynski A. A branch and bound method for stochastic global optimization. *Math. Program*. 1998. Vol. 83. P. 425–450.
10. Ermoliev Y.M., Norkin V.I. Stochastic optimization of risk functions. Marti K., Ermoliev Y., Pflug G. (eds.): Dynamic stochastic optimization. Berlin; Heidelberg: Springer, 2004. P. 225–247.
11. Knopov P.S., Sergienko I.V. Some scientific results of Yu.M. Ermoliev and his school in modern stochastic optimization theory. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2011. Vol. 47, N 6. P. 835–853.
12. Knopov P.S., Kasitskaya E.I. Large deviations of empirical estimates in stochastic programming problems. *Kibernetika i Sistemnyj Analiz*. 2004. Vol. 40, N 4. P. 52–60.
13. Knopov P.S., Kasitskaya E.J. Properties of empirical estimates in stochastic optimization and identification problems. *Annals of Operations Research*. 1995. Vol. 56, N 1. P. 225–239.
14. Knopov P.S. Asymptotic properties of some classes of M-estimates. *Cybernetics and Systems Analysis*. 1997. Vol. 33, N 4. P. 468–481.
15. Knopov P.S., Kasitskaya, E.J. On large deviations of empirical estimates in a stochastic programming problem with time-dependent observations. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2010. Vol. 46, N 5. P. 724–728.
16. Golodnikov A.N., Ermoliev Yu.M., Knopov P.S. Estimating reliability parameters under insufficient information. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2010. Vol. 46, N 3. P. 443–459.
17. Golodnikov A.N., Knopov P.S., Pepelyaev V.A. Estimation of reliability parameters under incomplete primary information. *Theory and Decision*. 2004. Vol. 57, N 4. P. 331–344.

18. Knopov P.S., Pepelyaev V.A. Nonparametric estimate of almost periodic signals. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2007. Vol. 43, N 3. P. 362–367.

19. Ermoliev Yu.M., Ermolieva T.Y., MacDonald G.J., Norkin V.I. Insurability of catastrophic risks: the stochastic optimization model. *Optimization*. 2000. Vol. 47. P. 251–265.

20. Ermoliev Y.M., Ermolieva T.Y., MacDonald G., Norkin V.I. Stochastic optimization of insurance portfolios for managing exposure to catastrophic risks. *Annals of Oper. Res*. 2000. Vol. 99. P. 207–225.

21. Mikhalevich V.S., Knopov P.S., Golodnikov A.N. Mathematical models and methods of riks assessment in ecologically hazardous industries. *Cybernetics and Systems Analysis*. 1994. Vol. 30, N 2. P. 259–273.

22. Golodnikov A.N., Ermoliev Yu.M., Ermolieva T.Yu., Knopov P.S., Pepelyaev V.A. Integrated modeling of food security management in Ukraine. I. Models for management of the economic availability of food. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2013. Vol. 49, N 1. P. 26–35.

23. Golodnikov A.N., Ermoliev Yu.M., Ermolieva T.Yu., Knopov P.S., Pepelyaev V.A. Integrated modeling of food security management in Ukraine. II. Models for structural optimization of agricultural production under risk. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2013. Vol. 49, N 2. P. 217–228.

24. Marti K., Ermoliev Yu., Makowski M. Coping with uncertainty. Robust solutions. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Berlin; Heidelberg: Springer, 2010. 277 p.

25. Pepelyaev V.A., Golodnikova N.A. Mathematical methods for crop losses risk evaluation and account for sown areas planning. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. Vol. 50, N 1. P. 60–67.

26. Norkin V.I., Gaivoronski A.A., Zaslavsky V.A., Knopov P.S. Models of the optimal resource allocation for the critical infrastructure protection. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. Vol. 54, N 5. P. 696–706.

27. Haivoronskyy O.O., Ermoliev Y.M., Knopov P.S., Norkin V.I. Mathematical modeling of distributed catastrophic and terrorist. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2015. Vol. 51, N 1. P. 85–95.

28. Ermoliev Y., Ermolieva T., Kahil T., ...Gorbachuk V., Knopov P. Stochastic optimization models for risk-based reservoir management. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019. Vol. 55, N 1. P. 55–64.

29. Pepelyaev V.A., Golodnikov A.N., Golodnikova N.A. Reliability optimization in plant production. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2022. Vol. 58, N 1. P. 191–196.

**P.S. Knopov**

**OPTIMIZATION AND IDENTIFICATION OF STOCHASTIC SYSTEMS**

**Abstract.** The author overviews some well-known scientific results from the theory of stochastic optimization and theory of risk, obtained by the academician of the National Academy of Sciences of Ukraine Y. M. Ermoliev, his colleagues, and students. Examples from the theory of parametric and non-parametric estimation are considered.

**Keywords:** stochastic optimization, evaluation, distribution, risk.

*Надійшла до редакції 26.12.2022*