УДК 519.8

С.О. МАЩЕНКО
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *s.o.mashchenko@gmail.com.*

НЕДОМІНОВАНІ АЛЬТЕРНАТИВИ ДЛЯ НЕЧІТКОЇ МНОЖИНИ ЕКСПЕРТІВ

Анотація. Досліджено множину недомінованих альтернатив в задачі групового прийняття рішення нечіткою множиною експертів. Показано, що вона є нечіткою множиною типу-2 (T2FS). Побудовано функцію належності типу-2 цієї множини. Для дослідження T2FS недомінованих альтернатив використано декомпозиційний підхід. Показано, що T2FS недомінованих альтернатив може бути розкладеною за вторинними ступенями належності на скінченний набір нечітких множин типу-1. Кожна з них є множиною недомінованих альтернатив для чіткої множини експертів, яка є відповідним α-перерізом вихідної нечіткої множини. Наведено приклади.

Ключові слова: прийняття рішень, нечітке відношення переваги, нечітка множина типу-2.

ВСТУП

Теорія нечітких множин та відношень запропонована в [1] і розвинена в працях [2–4]. В [5] вперше зроблено припущення про важливу роль нечітких відношень у теорії прийняття групових рішень. У роботі [6] зроблено важливий висновок з теореми Ероу про неможливість об’єднання кількох індивідуальних переваг у групову перевагу будь-яким раціональним способом. Тому групові переваги, що агреговані на основі індивідуальних переваг будь-яким методом, завжди є «нечіткими» у тому сенсі, що вони засновані на деякій формальній процедурі і не повністю відображають конфлікт чи різноманітність індивідуальних думок у групі експертів. У груповому прийнятті рішень можна визначити два основні підходи до використання нечітких відношень. Ці підходи не є суперечливими. Тому результати, отримані застосуванням одного підходу, можуть використовуватися як вихідні для іншого. За першим підходом (наприклад, [5]) потрібно знайти правдоподібний груповий результат для заданих нечітких відношень індивідуальних переваг. Другий підхід базується на концепції агрегації нечітких індивідуальних переваг у відношення групової переваги, яке потім використовується для знаходження множини недомінованих альтернатив. Вперше ця концепція була використана в [7]. У роботі [8] досліджено властивості «раціональності» функцій вибору з урахуванням переваг.

У цій роботі розвиватимемо концепцію агрегації нечітких індивідуальних переваг для нечіткої множини (НМ) експертів, що призводить до НМ відношень індивідуальних переваг. Така потреба може виникнути, наприклад, тоді, коли актуальним є не тільки рішення всієї сукупності експертів, але і деяких підгруп експертів, важливих для аналізу ситуації прийняття рішень, зокрема що задані нечітко. Формалізувати такі групи експертів можна за допомогою НМ, наприклад «Дослідні експерти», «Представники молодого покоління експертів», «Радикально налаштовані експерти», «Консервативні експерти» тощо. У наведеній статті показано, що множина недомінованих альтернатив для нечіткої множини експертів є НМ типу-2 (НМТ-2) зі специфічною структурою. Така особливість дає змогу декомпозувати цю множину за вторинними ступенями належності (вторинними оцінками) на сукупність відповідних їм нечітких множин. Зазначимо, що проведені дослідження базуються на концепції операцій над множинами з нечіткою множиною операндів, яка розвинена в [9, 10].

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Прийняття рішень за нечітким відношенням переваги. Якщо інформація про ситуацію прийняття рішення дана у вигляді звичайного (чіткого) відношення переваги, то раціональним природно вважати вибір недомінованих альтернатив за відповідним строгим відношенням переваги. Подібний підхід до задачі прийняття рішень для нечіткого відношення переваги (НВП) застосовано в роботі [7].

Нехай R є НВП, яке задано на універсальній множині альтернатив X функцією належності (ФН) $\mu_R(x, y)$, $x, y \in X$. Припустимо, що R є рефлексивним (тобто $\mu_R(x,x)=1$ для $\forall x \in X$) і повним ($\mu_R(x, y)+\mu_R(y,x) \geq 1$ для $\forall x \in X$ згідно з [11–13]). Зазначимо, що повнота гарантує виконання властивостей здійсненності та порівнювання альтернатив [14] і цілком природне, коли відношення визначає індивідуальні переваги експертів у складі групи. Тоді компроміс треба знаходити лише між членами групи. Згідно з [12] повне НВП породжує строгу перевагу

$$S = R \setminus R^{-1} = \overline{R}^{\,-1} \tag{1}$$

з ФН $\mu_S(x, y)=1-\mu_R(y,x)$. Величина $\mu_S(x, y)$ є ступенем, з яким альтернатива y домінується альтернативою x. Отже, для фіксованого $\hat{y} \in X$ визначену на X функцію $\mu_S(\hat{y},x)$ можна розглядати як ФН нечіткої множини «всіх альтернатив x, які домінуються альтернативою $\hat{y}$». Тоді доповнення цієї множини є НМ «всіх альтернатив x, які не домінуються альтернативою $\hat{y}$» і визначається ФН $1-\mu_S(\hat{y},x)$, $x \in X$. Тому для виокремлення в X підмножини «всіх альтернатив, кожна з яких не домінується жодною альтернативою з X», необхідно зробити перетин НМ з ФН $1-u_S(y,x)$ за всіма $y \in X$. В [7] цей перетин названий НМ

$$P = \{x \in X : y\overline{S}x \ \ \forall y \in X\} \tag{2}$$

недомінованих альтернатив. Її ФН має вигляд

$$\mu_P(x) = \inf_{y \in X} \{1-\mu_S(y, x)\} = 1 - \sup_{y \in X} \mu_S(y, x). \tag{3}$$

Згідно з (1) формули (2), (3) набувають відповідно вигляду

$$P = \{x \in X : xRy \ \ \forall y \in X\}, \tag{4}$$

$$\mu_P(x) = \inf_{y \in X} \mu_R(x, y). \tag{5}$$

Значення $\mu_P(x)$ є ступенем, з яким альтернатива x не домінується жодною з множини X. Якщо $\mu_P(x^*)=a$ для деякої альтернативи x^*, то вона може домінуватися іншими альтернативами, але зі ступенем, не вищим за $1-a$. Оскільки величина $\mu_P(x)$ є ступенем «недомінованості» альтернативи x, то за умов нечіткої інформації природно вважати «раціональним» вибір альтернатив, які мають найбільший ступінь належності НМ P.

Вибір альтернатив групою експертів. Розглянемо задачу вибору альтернатив $x \in X$ множиною (групою) $N=\{1,\ldots,n\}$ з n експертами. Інформація про попарне порівняння альтернатив кожним експертом представлена у вигляді повних НВП R_j, $j \in N$, яким відповідають строгі відношення переваги $S_j = \overline{R}_j^{\,-1}$, $j \in N$, згідно з (1).

Припущення 1. Вважатимемо, що універсальна множина альтернатив X або є скінченною, або є компактною, а ФН $\mu_{R_j}(x, y)$ НВП R_j, $j \in N$, є неперервними.

Розглянемо спершу найпростішу ситуацію, коли для кожного $j \in N$ відношення R_j визначається заданою функцією корисності $f_j : X \to \mathbb{R}$, де $\mathbb{R}$ є числовою віссю. Значення функції $f_j(x)$ можна розглядати як числову оцінку альтернативи $x \in X$ експертом $j \in N$. Альтернатива з більшою оцінкою $f_j(x)$ вважається кращою для j-го експерта. Задача зводиться до вибору альтернатив, що мають якомога більші оцінки для всіх експертів. Відповідно до слабкої аксіоми Парето альтернатива $x \in X$ строго краще за альтернативу $y \in X$ для групи експертів (позначимо S відношення строгої переваги), якщо $f_j(x) > f_j(y)$ для $\forall j \in N$. Це означає, що $S = \bigcap_{j \in N} S_j$. Отримане відношення строгої переваги відповідає повному відношенню переваги $R = \bigcup_{j \in N} R_j$. Це пояснюється тим, що повнота R випливає з повноти R_j, $j \in N$, і тоді з (1) випливає відношення

$$S = \overline{R}^{-1} = \left(\overline{\bigcup_{j \in N} R_j} \right)^{-1} = \bigcap_{j \in N} \overline{R}_j^{-1} = \bigcap_{j \in N} S_j .$$

Альтернативу $x \in X$ назвемо слабко Парето-оптимальною, якщо не існує такого $y \in X$, для якого виконуються нерівності $f_j(y) > f_j(x)$, $j \in N$. Позначимо P множину слабко Парето-оптимальних альтернатив. Тоді, використовуючи відношення строгої переваги, отримаємо

$$P = \{ x \in X : y \overline{S} x \ \forall y \in X \}. \tag{6}$$

Отже, порівнюючи (2) з (6), можна дійти висновку для випадку, коли відношення переваги R_j, $j \in N$, є повними та нечіткими. Для знаходження множини недомінованих альтернатив для групи експертів $j \in N$ з індивідуальними повними НВП R_j, $j \in N$, можна використати об’єднання $R = \bigcup_{j \in N} R_j$ цих відношень (це групове НВП R теж буде повним) з ФН $\mu_R(x, y) = \max_{j \in N} \mu_{R_j}(x, y)$. Тоді згідно з (4) множина недомінованих альтернатив на X набуде вигляду $P = \left\{ x \in X : x \left(\bigcup_{j \in N} R_j \right) y \ \forall y \in X \right\}$ з ФН

$$\mu_P(x) = \min_{y \in X} \max_{j \in N} \mu_{R\,j}(x, y) \tag{7}$$

відповідно до (5). Зазначимо, що такий підхід був використаний в [15, 16] для побудови множини Парето-оптимальних альтернатив, а мінімум в (7) існує згідно з припущенням 1.

Нечітка множина експертів. Нехай $\widetilde{N}$ на N є нечіткою множиною експертів $j \in N$ з ФН $\mu_{\widetilde{N}}(j)$. Задамо питання, що є множиною недомінованих альтернатив на X у разі, коли ми сформуємо групове НВП $\bigcup_{(j, \mu_{\widetilde{N}}(j)) \in \widetilde{N}} R_j$ для НМ $\widetilde{N} = \{ (j, \mu_{\widetilde{N}}(j)) : j \in N \}$ експертів $j \in N$ з відповідними індивідуальними НВП R_j, $j \in N$? Інакше кажучи, якою буде множина недомінованих альтернатив на X, якщо експерти $j \in N$ беруть участь у прийнятті рішення з відповідними ступенями належності $\mu_{\widetilde{N}}(j)$, $j \in N$? Для запису такої множини недомінованих альтернатив використовуємо позначення $\widetilde{P} = \left\{ x \in X : x \left(\bigcup_{(j, \mu_{\widetilde{N}}(j)) \in \widetilde{N}} R_j \right) y \ \forall y \in X \right\}.$

ОСНОВНА КОНЦЕПЦІЯ ПІДХОДУ

Природне узагальнення множини P недомінованих альтернатив для НМ $\widetilde{N}$ експертів зумовлює припущення, що $\widetilde{P} = \left\{ x \in X : x \left(\bigcup_{(j,\, \mu_{\widetilde{N}}(j)) \in \widetilde{N}} R_j \right) y \, \forall y \in X \right\}$ матиме ФН, подібну до (7) такого вигляду:

$$\widetilde{M}_{\widetilde{P}}(x) = \min_{y \in X} \max_{(j,\, \mu_{\widetilde{N}}(j)) \in \widetilde{N}} \mu_{R_j}(x, y), \; x \in X. \tag{8}$$

У (8) вираз $\max_{(j,\, \mu_{\widetilde{N}}(j)) \in \widetilde{N}} \mu_{R_j}(x, y)$ має сенс, що значення $\mu_{R_j}(x, y), \; j \in N$, використовуються для знаходження максимуму з відповідними ступенями належності $\mu_{\widetilde{N}}(j), \; j \in N$ (тобто індекси $j \in N$ операндів оператора max утворюють НМ $\widetilde{N} = \{(j, \mu_{\widetilde{N}}(j)) : j \in \widetilde{N}\}$). Для дослідження (8) застосуємо відомий підхід з [17], який дає змогу задати НМ її α-перерізами. Позначимо

$$N_\alpha = \{ j \in N : \mu_{\widetilde{N}}(j) \geq \alpha \} \tag{9}$$

α-переріз, $\alpha \in [0,1]$, НМ $\widetilde{N} = \{(j, \mu_{\widetilde{N}}(j)) : j \in \widetilde{N}\}$ експертів.

Зауваження 1. Нехай A є множиною значень ступенів належності $\mu_{\widetilde{N}}(j)$, $j \in N$, НМ $\widetilde{N} = \{(j, \mu_{\widetilde{N}}(j)) : j \in N\}$ експертів. Оскільки ступені належності різних експертів можуть бути однаковими, то $|A| \leq n$. Вочевидь, для того, щоб отримати різні α-перерізи $N_\alpha = \{ j \in N : \mu_{\widetilde{N}}(j) \geq \alpha \} \neq \varnothing$ НМ $\widetilde{N}$, слід замінити умову $\alpha \in [0,1]$ на $\alpha \in A$.

Для фіксованого $\hat{x} \in X$ та $\forall \alpha \in A$ розглянемо множину

$$D_\alpha(\hat{x}) = \{ (y(\alpha), j(\alpha)) : \mu_{R_{j(\alpha)}}(\hat{x}, y(\alpha)) = \min_{y \in X} \max_{j \in N_\alpha} \mu_{R_j}(\hat{x}, y) \}. \tag{10}$$

Ця множина складається з пар $(y(\alpha), j(\alpha))$, в яких $y(\alpha) \in X$ мінімізує функцію $\mu_{R_j}(\hat{x}, y)$ за $y \in X$ і $j(\alpha)$ максимізує $\mu_{R_j}(\hat{x}, y(\alpha))$ за $j \in N_\alpha$. У цьому разі оптимум (мінмакс) дорівнює $\mu_{R_{j(\alpha)}}(\hat{x}, y(\alpha))$.

Зауваження 2. Згідно із зауваженням 1 $N_\alpha \neq \varnothing$. Також унаслідок припущення 1 множина $D_\alpha(\hat{x})$ оптимальних розв'язків мінмаксної задачі (8) не є порожньою, тобто $D_\alpha(\hat{x}) \neq \varnothing$.

Позначимо $P(\alpha) = \{(x, \mu_{P(\alpha)}(x)) : x \in X\}$ НМ на X з функцією належності

$$\mu_{P(\alpha)}(x) = \min_{y \in X} \max_{j \in N_\alpha} \mu_{R_j}(x, y), \; x \in X. \tag{11}$$

Ця функція набуває значення мінмаксу в (10) для $x = \hat{x}$, тобто $\mu_{P(\alpha)}(\hat{x}) = \min_{y \in X} \max_{j \in N_\alpha} \mu_{R_j}(\hat{x}, y)$. З (7) і (9) випливає, що множина

$$P(\alpha) = \{ x \in X : x (\bigcup_{j \in N_\alpha} R_j) y \; \forall y \in X \} \tag{12}$$

збігається з множиною недомінованих альтернатив на X для експертів $j \in N_\alpha$, де N_α є α-перерізом вихідної НМ $\widetilde{N}$ експертів. У подальшому називатимемо $P(\alpha)$ множиною недомінованих альтернатив рівня $\alpha \in A$. Для фіксованого $\hat{x} \in X$ вираз (8) можна класифікувати як мінмаксну задачу оптимізації функції $\mu_{R_j}(\hat{x}, y)$ на чіткій множині X (за змінною *y*) та на НМ $\widetilde{N}$ (за змінною *j*).

Тому для побудови ФН нечіткої множини розв'зків цієї задачі потрібно кожній парі $(y, j) \in X \times N$ призначити ступінь належності до цієї множини. Отже, розв'язком задачі (8) називатимемо НМ $D(\hat{x})$ на $X \times N$ з ФН

$$\mu_{D(\hat{x})}(y, j) = \begin{cases} \max\{\alpha \in A : (y, j) \in D_\alpha(\hat{x})\}, & (y, j) \in \bigcup\limits_{\alpha \in A} D_\alpha(\hat{x}), \\ 0, & (y, j) \notin \bigcup\limits_{\alpha \in A} D_\alpha(\hat{x}), \end{cases} \tag{13}$$

де множини $D_\alpha(\hat{x})$, $\alpha \in A$, визначені згідно з (10). Нечіткому розв'язку $D(\hat{x})$ відповідає НМ значень $\widetilde{M}_{\widetilde{P}}(\hat{x}) = \min\limits_{y \in X} \max\limits_{(j, \mu_{\widetilde{N}}(j)) \in \widetilde{N}} \mu_{R\, j}(\hat{x}, y)$, $y \in X$, з ФН $\mu_{\widetilde{M}_{\widetilde{P}}(\hat{x})}(u)$, $u \in [0,1]$, де закритий інтервал $[0,1]$ є універсальною множиною НМ значень $\widetilde{M}_{\widetilde{P}}(\hat{x})$ мінмакса (8). Тут НМ $\widetilde{M}_{\widetilde{P}}(\hat{x})$ є образом НМ $D(\hat{x})$ для відображення $(y, j) \to \mu_{R_j}(\hat{x}, y)$ з $X \times N$ в $[0,1]$. Відповідно до [17] отримаємо $\mu_{\widetilde{M}_{\widetilde{P}}(\hat{x})}(u) = \max\limits_{(y,j) \in [\mu_{R_j}(\hat{x}, y)]^{-1}(u)} \mu_{D(\hat{x})}(y, j)$, де $[\mu_{R_j}(\hat{x}, y)]^{-1}(u) = \{(y, j) \in X \times N$: $\mu_{R_j}(\hat{x}, y) = u\}$. Звідси

$$\mu_{\widetilde{M}_{\widetilde{P}}(\hat{x})}(u) =$$

$$= \begin{cases} \max\limits_{y \in X,\, j \in N} \{\mu_{D(\hat{x})}(y, j) \colon \mu_{R_j}(\hat{x}, y) = u\}, \ \exists\, (y, j) \in X \times N : \mu_{R_j}(\hat{x}, y) = u; \\ 0 \qquad \text{у протилежному випадку.} \end{cases} \tag{14}$$

Розглянемо властивості НМ $\widetilde{M}_{\widetilde{P}}(\hat{x})$.

Теорема 1. Носій НМ $\widetilde{M}_{\widetilde{P}}(\hat{x})$ має вигляд

$$\operatorname{supp} \widetilde{M}_{\widetilde{P}}(\hat{x}) = \{u \in [0,1] \colon u = \mu_{P(\alpha)}(\hat{x}),\ \alpha \in A\}. \tag{15}$$

Доведення. Припустимо, що $\mu_{\widetilde{M}_{\widetilde{P}}(\hat{x})}(u) > 0$. Тоді згідно з (14) $\exists\, (y, j) \in X \times N$, для яких

$$\mu_{R_j}(\hat{x}, y) = u \tag{16}$$

і $\mu_{D(\hat{x})}(y, j) > 0$. Звідси згідно з (13) випливає, що $\exists\, \alpha \in A$, для якого $(y, j) \in D_\alpha(\hat{x})$. На підставі (10) та (11) це зумовлює рівність $\mu_{R_j}(\hat{x}, y) = \mu_{P(\alpha)}(\hat{x})$, з якої унаслідок (16) випливає $u = \mu_{P(\alpha)}(\hat{x})$. Тоді з (15) отримаємо $u \in \operatorname{supp} \widetilde{M}_{\widetilde{P}}(\hat{x})$.

Тепер навпаки. Нехай

$$\mu_{\widetilde{M}_{\widetilde{P}}(\hat{x})}(u) = 0. \tag{17}$$

Припустимо супротивне, що існує $\alpha' \in A$, коли

$$u = \mu_{P(\alpha')}(\hat{x}). \tag{18}$$

Із зауваження 1 випливає, що множина $N_{\alpha'} \neq \varnothing$. Також $D_\alpha(\hat{x}) \neq \varnothing$ відповідно до зауваження 2. Тому з (11) $\exists\, y \in X$ і $\exists\, j \in N_{\alpha'}$, для яких $\mu_{R_j}(\hat{x}, y) = \mu_{P(\alpha')}(\hat{x})$. Враховуючи (18), отримаємо (16). З (14), (16) та (17) випливає $\mu_{D(\hat{x})}(y, j) = 0$. Тоді на підставі (13) одержимо $(y, j) \notin \bigcup\limits_{\alpha \in A} D_\alpha(\hat{x})$. Тому $\forall \alpha \in A$ $\mu_{R_j}(\hat{x}, y) \neq \mu_{P(\alpha)}(\hat{x})$ згідно з (10) та (11). Отже, відповідно до (16) $\forall \alpha \in A$ $u \neq \mu_{P(\alpha)}(\hat{x})$. Отримали суперечність з (18). Таким чином, $y \notin \operatorname{supp} \widetilde{M}_{\widetilde{P}}(\hat{x})$ згідно з (17). Теорему 1 доведено.

Теорема 2. Функція належності НМ $\widetilde{M}_{\widetilde{P}}(\hat{x})$ має вигляд

$$\mu_{\widetilde{M}_{\widetilde{P}}(\hat{x})}(u) = \max_{\alpha\in A}\{\alpha: u = \mu_{P(\alpha)}(\hat{x})\},\ u \in \operatorname{supp} \widetilde{M}_{\widetilde{P}}(\hat{x}).$$

Доведення. Припустимо, що $u^* \in \operatorname{supp} \widetilde{M}_{\widetilde{P}}(\hat{x}) \neq \varnothing$. Позначимо $\alpha^* = \max_{\alpha\in A}\{\alpha : u^* = \mu_{P(\alpha)}(\hat{x})\}$. Це значення існує відповідно до зауваження 1 та (15). Покажемо, що з (14) можна отримати $\mu_{\widetilde{M}_{\widetilde{P}}(\hat{x})}(u^*) = \alpha^*$. Порівняємо (15) з (13) і (14). Для цього достатньо показати збіг множин

$$S_1 = \{\alpha: u^* = \mu_{P(\alpha)}(\hat{x})\} = \{\alpha: \mu_{R_j}(\hat{x}, y) = u^*,\ (y, j) \in D_\alpha(\hat{x}), y \in X, j \in N\} = S_2 .$$

Насамперед, доведемо включення $S_1 \subseteq S_2$. Припустимо $\alpha' \in S_1$. Тоді $u^* = \mu_{P(\alpha')}(\hat{x})$. Звідси $\exists\, y(\alpha') \in X$ і $\exists\, j(\alpha') \in N_{\alpha'}$, для яких $\mu_{R_j}(\hat{x}, y) = \mu_{P(\alpha')}(\hat{x}) = u^*$ згідно з (11) та $(y(\alpha'), j(\alpha')) \in D_{\alpha'}(\hat{x})$ з урахуванням (10). Отже, $\alpha' \in S_2$. Тепер перевіримо включення $S_2 \subseteq S_1$. Припустимо, що $\alpha' \in S_2$. Тоді $\exists\, y' \in X$ і $\exists\, j' \in N_{\alpha'}$, для яких $\mu_{R_{j'}}(\hat{x}, y') = u^*$ і $(y', j') \in D_{\alpha'}(\hat{x})$. Звідси $\mu_{P(\alpha')}(\hat{x}) = u^*$ згідно з (11) і тому $\alpha' \in S_1$. Отже, $S_1 = S_2$. Тоді $\mu_{\widetilde{M}_{\widetilde{P}}(\hat{x})}(u^*) = a^*$, враховуючи (14). Теорему 2 доведено.

Таким чином, для фіксованих $\hat{x} \in X$ значення $\widetilde{M}_{\widetilde{P}}(\hat{x})$ утворюють НМ на $[0,1]$ з ФН $\mu_{\widetilde{M}_{\widetilde{P}}(x)}(u)$, $u \in [0,1]$. Згідно з (8) $\widetilde{M}_{\widetilde{P}}(x)$ є ФН нечіткої множини $\widetilde{P}$. Тому можна дійти висновку, $\widetilde{P}$ є НМ на X з ФН, значення якої також утворюють НМ. Отже, відповідно до [18] $\widetilde{P}$ є НМТ-2. Згідно з [19] НМТ-2 має вигляд $\widetilde{P} = \{(x, \widetilde{M}_{\widetilde{P}}(x)): \quad x \in X\} = \{(x, \{(u, \mu_{\widetilde{M}_{\widetilde{P}}(x)}(u)): u \in J_x \subseteq [0,1]\}): x \in X\}$, де $\mu_{\widetilde{M}_{\widetilde{P}}(x)}(u)$, $u \in J_x \subseteq [0,1]$, є функцією належності НМ $M_{\widetilde{P}}(x) = \{(u, \mu_{\widetilde{M}_{\widetilde{P}}(x)}(u)): u \in J_x \subseteq [0,1]\}$ значень нечіткого ступеня належності елемента $x \in X$ НМТ-2 $\widetilde{P}$. У цьому виразі $J_x = \operatorname{supp} \widetilde{M}_{\widetilde{P}}(x)$ є множиною первинних ступенів належності елемента $x \in X$. Відповідно до [20] НМТ-2 $\widetilde{P}$ на X можна також характеризувати функцією належності типу-2 (ФНТ-2) такого вигляду:

$$\mu_{\widetilde{P}}(x, u) = \begin{cases} \mu_{\widetilde{M}_{\widetilde{P}}(x)}(u), & u \in J_x; \\ 0, & u \notin J_x. \end{cases}$$

Відмітимо, що значення ФНТ-2 $\mu_{\widetilde{P}}(x, u)$ називають вторинною оцінкою (вторинним ступенем належності) первинного ступеня належності $u \in [0,1]$ альтернативи $x \in X$. Тоді $\widetilde{P} = \{((x, u), \mu_{\widetilde{P}}(x, u)): x \in X, u \in [0,1]\}$ і такий вигляд використовуватимемо далі.

НМТ-2 НЕДОМІНОВАНИХ АЛЬТЕРНАТИВ

Висновок, який зроблено в кінці попереднього розділу, дає змогу ввести таке твердження.

Означення 1. Множиною $\widetilde{P} = \left\{ x \in X : x \left(\bigcup_{(j,\, \mu_{\widetilde{N}}(j)) \in \widetilde{N}} R_j \right) y \ \forall y \in X \right\}$ недомінованих альтернатив для НМ $\widetilde{N}$ експертів $j \in N$ називатимемо НМТ-2

$$\widetilde{P}=\{((x,u),\mu_{\widetilde{P}}(x,u)): x\in X, u\in[0,1]\} \tag{19}$$

з ФНТ-2

$$\mu_{\widetilde{P}}(x,u)=\begin{cases}\max\limits_{\alpha\in A}\{\alpha: u=\mu_{P(\alpha)}(x)\}, & u\in J_x;\\ 0, & u\notin J_x.\end{cases} \tag{20}$$

У цьому означенні

$$J_x=\{u\in[0,1]: u=\mu_{P(\alpha)}(x), \alpha\in A\} \tag{21}$$

є множиною первинних ступенів $u\in[0,1]$ належності із строго додатними вторинними оцінками $\mu_{\widetilde{P}}(x,u)$ (за формулою (15) J_x є носієм $\operatorname{supp}\widetilde{M}_{\widetilde{P}}(x)$ НМ $\widetilde{M}_{\widetilde{P}}(x)$ значень максміна (8));

$$\mu_{P(\alpha)}(x)=\min_{y\in X}\max_{j\in N_\alpha}\mu_{R_j}(x,y) \tag{22}$$

є функцією належності НМ

$$P(\alpha)=\{(x, \mu_{P(\alpha)}(x)): x\in X\} \tag{23}$$

недомінованих альтернатив рівня $\alpha\in A$, яка є множиною недомінованих альтернатив для α-перерізу $N_{\widetilde{\alpha}}$ НМ $\widetilde{N}$ експертів, тому згідно з (12) $P(\alpha)=\left\{x\in X: x\left(\bigcup\limits_{j\in N_\alpha}R_j\right)y\ \forall y\in X\right\}$;

$$N_\alpha=\{j\in N: \mu_{\widetilde{N}}(j)\geq\alpha\} \tag{24}$$

є α-перерізом НМ $\widetilde{N}$ експертів, $\alpha\in A$ і A є множиною значень ступенів належності $\mu_{\widetilde{N}}(j), j\in N$, НМ $\widetilde{N}=\{(j,\mu_{\widetilde{N}}(j)): j\in N\}$ експертів відповідно до зауваження 1.

Приклад 1. Припустимо, що індивідуальні переваги експертів $j\in N=\{1,2,3\}$ задано повними НВП R_1, R_2 і R_3 на множині альтернатив $X=\{x_1,x_2,x_3\}$ за допомогою відповідно матриць

$$C_{R_1}=\begin{pmatrix}1 & 0,9 & 0,2\\ 0,3 & 1 & 0,6\\ 0,9 & 0,6 & 1\end{pmatrix},\ C_{R_2}=\begin{pmatrix}1 & 0,3 & 0,7\\ 0,8 & 1 & 0,7\\ 0,9 & 0,4 & 1\end{pmatrix},\ \ C_{R_3}=\begin{pmatrix}1 & 0,6 & 0,9\\ 0,6 & 1 & 0,6\\ 0,6 & 0,8 & 1\end{pmatrix}.$$

Нехай $\widetilde{N}=\{(1;0,4),(2;1),(3;1)\}$ є НМ на множині N експертів з ФН $\mu_{\widetilde{N}}(1)=0,4$ і $\mu_{\widetilde{N}}(2)=\mu_{\widetilde{N}}(3)=1$. Отримуємо множину недомінованих альтернатив для НМ $\widetilde{N}$ експертів. Відповідно до зауваження 1 множина значень ступенів належності НМ $\widetilde{N}$ експертів має вигляд $A=\{0,4;1\}$. Насамперед для $\alpha=1$ побудуємо з (24) α-переріз $N_1=\{2,3\}$ НМ $\widetilde{N}$ експертів. З урахуванням (22) одержимо ФН $\mu_{P(1)}(x)=\min\limits_{y\in X}\max\{\mu_{R_2}(x,y), \mu_{R_3}(x,y)\}$ НМ $P(1)=\{(x,\mu_{P(1)}(x)): x\in X\}$, яка є множиною недомінованих альтернатив на X для експертів $j\in N_1=\{2,3\}$. Отримаємо $\mu_{P(1)}(x_1)=\min\limits_{y\in\{x_1,x_2,x_3\}}\max\{\mu_{R_2}(x,y), \mu_{R_3}(x_1,y)\}=$ $=0,6$; аналогічно одержимо $\mu_{P(1)}(x_2)=0,7$ та $\mu_{P(1)}(x_3)=0,8$. Тоді НМ недомінованих альтернатив рівня $\alpha=1$ має вигляд

$$P(1)=\{(x_1;0,6),(x_2;0,7),(x_3;0,8)\}. \tag{25}$$

Тепер для $\alpha = 0,4$ побудуємо з урахуванням (24) α-переріз $N_{0,4} = \{1, 2, 3\}$ НМ $\widetilde{N}$ експертів. Далі за умов (22) ФН $\mu_{P(0,4)}(x) = \min\limits_{y \in X} \max \{\mu_{R_1}(x, y),$ $\mu_{R_2}(x, y),\ \mu_{R_3}(x, y)\}$. НМ $P(0,4) = \{(x, \mu_{P(0,4)}(x)) : x \in X\}$ є множиною недомінованих альтернатив X для експертів $j \in N_{0,4} = \{1, 2, 3\}$. Отримаємо $\mu_{P(0,4)}(x) = \min\limits_{y \in \{x_1, x_2, x_3\}} \max \{\mu_{R_1}(x_1, y),\ \mu_{R_2}(x_1, y), \mu_{R_3}(x_1, y)\}$; аналогічно одержимо $\mu_{P(0,4)}(x_2) = 0,7$ та $\mu_{P(0,4)}(x_3) = 0,8$. Тоді НМ недомінованих альтернатив рівня $\alpha = 0,4$ має вигляд

$$P(0,4) = \{(x_1;\ 0,9), (x_2;\ 0,7), (x_3;\ 0,8)\}. \tag{26}$$

Нарешті за допомогою (20) обчислимо значення ФНТ-2 $\mu_{\widetilde{P}}(x, u),\ x \in X,$ $u \in [0,1]$. Для цього спочатку за формулою (21) побудуємо множини $J_x = \{u \in [0,1]: u = \mu_{P(\alpha)}(x), \alpha \in A\}$, $x \in X = \{x_1, x_2, x_3\}$ первинних ступенів $u \in [0,1]$ зі строго додатними вторинними оцінками $\mu_{\widetilde{P}}(x, u)$. Отримаємо $J_{x_1} =$ $= \{0,6; 0,9\}$, $J_{x_2} = \{0,7\}$ та $J_{x_3} = \{0,8\}$. Отже, згідно з (19) та (20) одержимо

$$\widetilde{P} = \{((x_1;\ 0,6);\ 1),\ ((x_1;\ 0,9);\ 0,4),\ ((x_2;\ 0,7);\ 1),\ ((x_3;\ 0,8);\ 1)\}. \tag{27}$$

Кожну пару $((x, u),\ \mu_{\widetilde{P}}(x, u))$ в НМТ-2 $\widetilde{P}$ можна інтерпретувати таким чином. Альтернатива x є недомінованою зі ступенем належності (первинним) u зі ступенем істинності $\mu_{\widetilde{P}}(x, u)$ (в [21] так інтерпретується вторинна оцінка). Наприклад, альтернатива x_1 є недомінованою зі ступенями належності: $u = 0,6$ зі ступенем істинності $\mu_{\widetilde{P}}(x_1;\ 0,6) = 1$ та $u = 0,9$ зі ступенем істинності $\mu_{\widetilde{P}}(x_1;\ 0,9) = 0,4$.

Декомпозиція множини недомінованих альтернатив. Зазначимо, що використовувати означення 1 безпосередньо досить незручно. До того ж інтерпретація НМТ-2 $\widetilde{P}$ недомінованих альтернатив недостатньо наочна. Тому метою цього підрозділу є представлення НМТ-2 $\widetilde{P}$ у зручному для визначення та використання вигляді. Для цього застосовується декомпозиційний підхід. Використаємо поняття вкладених НМ типу-1 і типу-2 [19] та формалізуємо їх для НМТ-2 $\widetilde{P} = \{((x, u), \mu_{\widetilde{P}}(x, u)): x \in X,\ u \in [0,1]\}$.

Зауваження 3. Відповідно до [19] кожен елемент НМТ-2 потрібно розглядати як підмножину, тому сукупність представляється як класичне об'єднання їхніх елементів у сенсі «звичайних» нечітких множин типу-1.

Нехай для $\forall x \in X$ задано єдиний первинний ступінь належності $u_x \in [0,1]$ НМТ-2 $\widetilde{P}$. Вкладену НМТ-2 $\widetilde{P}^e$ в $\widetilde{P}$ визначимо як $\widetilde{P}^e = \{((x, u_x), \mu_{\widetilde{P}}(x, u_x)):$ $x \in X\}$. НМ $\{(x, u_z):\ x \in X\}$ типу-1 назвемо вкладеною в НМТ-2 $\widetilde{P}$. Використовуватимемо НМТ-2 із сталими вторинними оцінками відповідно до [22– 24]. Нехай A є скінченною множиною додатних значень ступенів належності $\mu_{\widetilde{N}}(j), j \in N$, НМ $\widetilde{N} = \{(j,\ \mu_{\widetilde{N}}(j)): j \in N\}$ експертів згідно із зауваженням 1. Згідно з (20) множина A містить всі додатні значення вторинних оцінок НМТ-2 $\widetilde{P}$.

Означення 2. Нехай вкладена НМТ-2 $\widetilde{P}^e_\alpha = \{((x, u_x),\ \mu_{\widetilde{P}}(x, u_x)): x \in X\}$ в $\widetilde{P}$ має сталу вторинну оцінку $\alpha \in A$, якщо для $\forall x \in X$ існує єдина первинна ступінь належності $u_x(\alpha) \in [0,1]$, за якої $\mu_{\widetilde{P}}(x, u_x(\alpha)) \equiv \alpha,\ \alpha \in A$.

Вочевидь, для $\widetilde{P}^e_\alpha$ існує єдина вкладена в неї НМ $P(\alpha) =$ $= \{(x, u_x(\alpha)): x \in X\}$ типу-1. Тому вкладена НМТ-2 $\widetilde{P}^e_\alpha$ із сталою вторинною оцінкою $\alpha \in A$ записується у вигляді $\widetilde{P}^e_\alpha = \{(P(\alpha), \alpha)\}$.

Теорема 3. НМТ-2 недомінованих альтернатив можна представити у вигляді сукупності

$$\widetilde{P} = \{(P(\alpha), \alpha) : \alpha \in A\} \tag{28}$$

вкладених НМТ-2 $\widetilde{P}_{\alpha}^{e} = \{(P(\alpha), \alpha)\} = \{((x, \mu_{P(\alpha)}(x)), \alpha)\colon x \in X\}$ із сталими вторинними оцінками $\alpha \in A$, де вкладена НМ $P(\alpha) = \left\{ x \in X : x \left(\bigcup_{j \in N_{\alpha}} R_j \right) y \ \forall y \in X \right\}$ типу-1 є НМ недомінованих альтернатив на X для експертів $j \in N_{\alpha}$, $\alpha \in A$.

Доведення. Згідно з (19) НМТ-2 недомінованих альтернатив має вигляд $\widetilde{P} = \{((x,u), \mu_{\widetilde{P}}(x,u))\colon u \in [0,1],\ x \in X\}$. Звідси згідно з (20) отримаємо $\widetilde{P} = \{\{((x,u), \max_{\alpha \in A}\{\alpha\colon u = \mu_{P(\alpha)}(x)\})\colon u \in J_x\} \bigcup \{((x,u),0)\colon u \notin J_x\}\colon x \in X\}$. Оскільки зауваження 3 має змогу не враховувати пари (x,u), які мають вторинну оцінку, що дорівнює нулю, то дістаємо вираз $\widetilde{P} = \{(x, (u, \max_{\alpha \in A}\{\alpha\colon u = \mu_{P(\alpha)}(x)\}))\colon u \in J_x, x \in X\}$, що є еквівалентним $\widetilde{P} = \{(x, \{(\mu_{P(\alpha)}(x), \alpha)\colon \alpha \in A\})\colon x \in X\}$ на підставі (21). Доречно зазначити, що набір $\{(\mu_{P(\alpha)}(x), \alpha)\colon \alpha \in A\}$ є НМ, яку утворено єдиним значенням $u = \mu_{P(\alpha)}(x)$ нечіткого ступеня належності альтернативи $x \in X$, якому можуть відповідати різні значення $\alpha \in A$. Звідси випливає рівність $\{(\mu_{P(\alpha)}(x), \alpha)\colon \alpha \in A = \{(u, \max_{\alpha \in A}\{\alpha\colon u = \mu_{P(\alpha)}(x)\})\}$. Перегрупувавши елементи, одержимо $\widetilde{P} = \{(x, (\mu_{P(\alpha)}(x), \alpha))\colon \alpha \in A,\ x \in X\} = \{\{((x, \mu_{P(\alpha)}(x)), \alpha)\colon x \in X\}\colon \alpha \in A\}$. Потім згідно з (23) отримаємо (28). Теорему 3 доведено.

Отже, результована НМТ-2 $\widetilde{P}$ недомінованих альтернатив може бути розкладеною за вторинними оцінками на відповідні НМ. До того ж теорема 3 спрощує обчислення НМТ-2 $\widetilde{P}$ недомінованих альтернатив. Якщо записати скінченну множину значень ступенів належності НМ $\widetilde{N}$ експертів у вигляді $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{|A|}\}$, то отриману НМТ-2 $\widetilde{P}$ можна інтерпретувати відповідно до [21] у такий спосіб. Множина недомінованих альтернатив, що отримана за участю нечіткої множини $\widetilde{N}$ експертів, може встановити $P(\alpha_1)$ зі ступенем істинності α_1; $P(\alpha_2)$ зі ступенем істинності α_2; ... ; $P(\alpha_{|A|})$ зі ступенем істинності $\alpha_{|A|}$.

Властивості T2FS недомінованих альтернатив. НМТ-2 недомінованих альтернатив у вигляді $\widetilde{P} = \{(P(\alpha), (\alpha))\colon \alpha \in A\}$ має деякі корисні властивості, на що вказує теорема 4.

Теорема 4. Нехай НМТ-2 $\widetilde{P}$ недомінованих альтернатив представлено у вигляді (28). Тоді мають місце такі властивості:

1) для $\forall \alpha', \alpha'' \in A$, для яких виконується нерівність $\alpha' \geq \alpha''$, справедливі відношення $N_{\alpha'} \subseteq N_{\alpha''}$ і $P(\alpha') \subseteq P(\alpha'')$;

2) якщо альтернатива $x \in X$ має ступінь належності $\mu_{P(\alpha^*)}(x)$ НМ $P(\alpha^*) = \left\{ x \in X : x \left(\bigcup_{j \in N_{\alpha^*}} R_j \right) y \ \forall y \in X \right\}$ недомінованих альтернатив для α^*-перерізу $N_{\alpha^*} = \{j \in N\colon \mu_{\widetilde{N}}(j) \geq \alpha^*\}$ НМ $\widetilde{N}$ експертів, то x має первинний ступінь належності $u = \mu_{P(\alpha^*)}(x)$ НМТ-2 недомінованих альтернатив $\widetilde{P}$ із вторинною оцінкою (ступенем істинності) не менше за α^*, тобто $\mu_{\widetilde{P}}(x, \mu_{P(\alpha^*)}(x)) \geq \alpha^*$.

Доведення. Насамперед, доведемо властивість 1. Відношення $N_{\alpha'} \subseteq N_{\alpha''}$ випливає з (24). Відповідно до (11) для перевірки відношення $P(\alpha') \subseteq P(\alpha'')$ достатньо показати, що для $\forall x \in X$ виконується нерівність $\mu_{P(\alpha')}(x) = = \min\limits_{y \in X} \max\limits_{j \in N_{\alpha'}} \mu_{R_j}(x, y) \le \min\limits_{y \in X} \max\limits_{j \in N_{\alpha'}} \mu_{R_j}(x, y) = \mu_{P(\alpha'')}(x)$. Припустимо супротивне, що $\exists x^* \in X$, для якого $\min\limits_{y \in X} \max\limits_{j \in N_{\alpha'}} \mu_{R_j}(x^*, y) > \min\limits_{y \in X} \max\limits_{j \in N_{\alpha'}} \mu_{R_j}(x^*, y)$. Звідси для $y^* = \arg\min\limits_{y \in X} \max\limits_{j \in N_{\alpha'}} \mu_{R_j}(x^*, y)$ справедлива нерівність $\max\limits_{j \in N_{\alpha'}} \mu_{R_j}(x^*, z) > > \max\limits_{j \in N_{\alpha''}} \mu_{R_j}(x^*, y^*)$ для $\forall z \in X$, зокрема і для $z = y^*$. Тоді $\max\limits_{j \in N_{\alpha'}} \mu_{R_j}(x^*, y^*) > > \max\limits_{j \in N_{\alpha''}} \mu_{R_j}(x^*, y^*)$. З цього виразу випливає $N_{\alpha'} \supset N_{\alpha''}$. Звідси з урахуванням (24) $\alpha' < \alpha''$. Одержали суперечність.

Тепер перевіримо властивість 2. Нехай $\alpha^* \in A$ і $u = \mu_{P(\alpha^*)}(x)$. Тоді згідно з (21) $u \in J_x$ і з (20) випливає, що $\mu_{\widetilde{P}}(x, u) = \max\limits_{\alpha \in A}\{\alpha : \mu_{P(\alpha^*)}(x) = u = \mu_{P(\alpha)}(x)\} \ge \ge \alpha^*$. Теорему 4 доведено.

Отже, за теоремою 4 більш широкі вкладені НМ недомінованих альтернатив (яким відповідають більш широкі перерізи НМ експертів) мають менші ступені істинності.

Наслідок 1. Припустимо, що альтернатива $x \in X$ має різні ступені належності $u', u'' \in J_x$,

$$u' < u'', \tag{29}$$

НМТ-2 $\widetilde{P}$ із вторинними оцінками $\mu_{\widetilde{P}}(x, u')$ і $\mu_{\widetilde{P}}(x, u'')$ відповідно. Тоді

$$\mu_{\widetilde{P}}(x, u') \ge \mu_{\widetilde{P}}(x, u''). \tag{30}$$

Доведення. Позначимо $\alpha' = \mu_{\widetilde{P}}(x, u')$ і $\alpha'' = \mu_{\widetilde{P}}(x, u'')$. Тоді згідно з (20)

$$u' = \mu_{P(\alpha')}(x) \ \text{ і } \ u'' = \mu_{P(\alpha'')}(x), \tag{31}$$

де $P(\alpha')$ і $P(\alpha'')$ є НМ недомінованих альтернатив для перерізів НМ $\widetilde{N}$ експертів рівнів α' і α'' відповідно. Припустимо супротивне, що $\alpha' < \alpha''$. Тоді з властивості 1 теореми 4 випливає включення $P(\alpha') \supseteq P(\alpha'')$, з якого унаслідок (31) отримаємо нерівність $u' \ge u''$, що спричиняє суперечність з (29). Наслідок 1 доведено.

Інакше кажучи, за наслідком 1 більші первинні ступені належності альтернативи НМТ-2 $\widetilde{P}$ недомінованих альтернатив мають менші ступені істинності.

Приклад 2. Обчислимо НМТ-2 недомінованих альтернатив за допомогою декомпозиційного підходу (теорема 3). Застосуємо вихідні дані прикладу 1 і використаємо множину $A = \{0,4; 1\}$ значень ступенів належності НМ $\widetilde{N} = \{(1; 0,4), (2; 1), (3; 1)\}$ експертів; НМ $P(1) = \{(x_1; 0,6), (x_2; 0,7), (x_3; 0,8)\}$ (формула (25)) і $P(0,4) = \{(x_1; 0,9), (x_2; 0,7), (x_3; 0,8)\}$ (формула (26)) недомінованих альтернатив, що відповідають α-перерізам $N_1 = \{2, 3\}$ з $\alpha = 1$ і $N_{0,4} = \{1, 2, 3\}$ з $\alpha = 0,4$ НМ $\widetilde{N}$ експертів. Вкладені НМТ-2 зі сталими вторинними оцінками $\alpha = 1$ і $\alpha = 0,4$ мають вигляд $\widetilde{P}_1^e = \{(P(1); 1)\} = \{((x_1; 0,6); 1), ((x_2; 0,7); 1), ((x_3; 0,8); 1)\}$, $\widetilde{P}_{0,4}^e = \{(P(0,4); 0,4)\} = \{((x_1; 0,9); 0,4), ((x_2; 0,7); 0,4), ((x_3; 0,8); 0,4)\}$ відповідно. Звідси з урахуванням (28) отримаємо НМТ-2 $\widetilde{P} = \{(P(1); 1), (P(0,4); 0,4)\}$ недомінованих альтернатив. НМТ-2 $\widetilde{P}$ можна інтерпретувати в такий спосіб.

Множина недомінованих альтернатив на $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ для НМ $\widetilde{N} = \{(1; 0{,}4), (2; 1), (3;1)\}$ експертів становить НМ $P(1) = \{(x_1; 0{,}6), (x_2; 0{,}7), (x_3; 0{,}8)\}$ зі ступенем істинності 1 та НМ $P(0{,}4) = \{(x_1; 0{,}9), (x_2; 0{,}7), (x_3; 0{,}8)\}$ зі ступенем істинності 0,4.

ВИСНОВКИ

Згідно із запропонованим підходом множина недомінованих альтернатив для НМ експертів є НМТ-2 із сталими вторинними оцінками. Хоча в загальному випадку НМТ-2 є достатньо складним математичним об'єктом, НМТ-2 із сталими вторинними оцінками досить проста для практичного застосування. Для представлення цієї множини у зручному для розуміння та використання вигляді застосовано декомпозиційний підхід. Отримані результати дають змогу розкласти НМТ-2 недомінованих альтернатив за вторинними оцінками на скінченну сукупність НМ недомінованих альтернатив для відповідних перерізів НМ експертів. Визначено та встановлено властивості НМТ-2 недомінованих альтернатив. Зазначимо, що запропонований підхід не тільки поширює сферу застосування групового прийняття рішень для НМ експертів, а й зумовлює нові підходи до вирішення інших постановок нечітких задач прийняття рішень.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Zadeh L.A. Similarity relations and fuzzy orderings. *Inf. Sci*. 1971. Vol. 3, N 1. P. 177–200. https://doi.org/10.1016/S0020-0255(71)80005-1.
2. Tamura S., Huguchi S., Tanaka K. Pattern classification based on fuzzy relations. *IEEE Trans*. 1971. Vol. SMC-I, N 1. P. 61–66. https://doi.org/10.1109/TSMC.1971.5408605.
3. Shimura M. Fuzzy sets concepts in rank-ordering objects. *J. Math. Anal. Appl*. 1973. Vol. 43, N 3. P. 717–733. https://doi.org/10.1016/0022-247X(73)90287-4.
4. Semenova N.V., Kolechkina L.N., Nagirna A.M. Vector optimization problems with linear criteria over a fuzzy combinatorial set of alternatives. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2011. Vol. 47, N 2. P. 250–259. https://doi.org/10.1007/s10559-011-9307-5.
5. Blin J.M. Fuzzy relation in group decision theory. *J. Cybernetics.* 1974. Vol. 4, N 2. P. 17–22. https://doi.org/10.1080/01969727408546063.
6. Tanino T. Fuzzy preference relations in group decision making. *Fuzzy Sets and Systems*. 1984. Vol. 12, N 2. P. 117–131. https://doi.org/10.1016/0165-0114(84)90032-0.
7. Orlovsky S.A. Decision-making with a fuzzy preference relation. *Fuzzy Sets and Systems*. 1978. Vol. 1, N 3. P. 155–167. https://doi.org/10.1016/0165-0114(78)90001-5.
8. Barrett C.R., Pattanaik P.K., Salles M. On choosing rationally when preferences are fuzzy. *Fuzzy Sets and Systems.* 1990. Vol. 34, N 2. P. 197–212. https://doi.org/10.1016/0165-0114(90)90159-4.
9. Mashchenko S. Intersections and unions of fuzzy sets of operands. *Fuzzy Sets and Systems*. 2018. Vol. 352, N 1. P. 12–25. https://doi.org/10.1016/j.fss.2018.04.006.
10. Mashchenko S.O., Kapustian D.O. Decomposition of intersections with fuzzy sets of operands. In: Contemporary Approaches and Methods in Fundamental Mathematics and Mechanics. Understanding Complex Systems. Sadovnichiy V.A., Zgurovsky M.Z. (Eds.). Cham: Springer, 2020. P. 417–432. https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-030- 50302-4.
11. Zadeh L.A. Fuzzy sets. *Information and Control*. 1965. Vol. 8, N 3. P. 338–353. https://doi.org/ 10.1016/S0019-9958(65)90241-X.

12. Cutello V., Montero J. An extension of the axioms of utility theory based on fuzzy rationality measures. In: Preferences and Decisions under Incomplete Knowledge. Fodor J., De Baets B., Perny P. (Eds.). Heidelberg: Physica-Verlag, 2000. P. 33–50. https://doi.org/10.1007/978-3-7908-1848-2.

13. Herrera-Viedma E., Herrera F., Chiclana F., Luque M. Some issues on consistency of fuzzy preference relations. *Eur. J. Oper. Res*. 2004. Vol. 154, N 1. P. 98–109. https://doi.org/10.1016/S0377-2217(02)00725-7.

14. Montero J., Tejada J., Cutelio V. A general model for deriving preference structures from data. *European Journal of Operational Research*. 1997. Vol. 98, N 1. P. 98–110. https://doi.org/10.1016/0377-2217(95)00324-X.

15. Mashchenko S.O. Generalization of Germeyer's criterion in the problem of decision making under the uncertainty conditions with the fuzzy set of the states of nature. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2012. Vol. 44, N 10. P. 26–34. https://doi.org/10.1615/JautomatInfScien.v44.i10.20.

16. Mashchenko S.O., Bovsunivskyi O.M. Effective alternatives of decision making problems with the fuzzy set of preference relations. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2013. Vol. 45, N 11. P. 32–42. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v45.i11.50.

17. Zadeh L. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-I. *Inform. Sci.* 1975. Vol. 8, N 3. P. 199–249. https://doi.org/10.1016/0020-0255(75)90036-5.

18. Zadeh L.A. Quantitative fuzzy semantics. *Inform. Sci*. 1971. Vol. 3, N 2. P. 159–176. https://doi.org/10.1016/S0020-0255(71)80004-X.

19. Mendel J.M., John R.I. Type-2 fuzzy sets made simple. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*. 2002. Vol. 10, N 2. P. 117–127. https://doi.org/10.1109/91.995115.

20. Harding J., Walker C., Walker E. The variety generated by the truth value algebra of T2FSs. *Fuzzy Sets and Systems*. 2010. Vol. 161, N 5. P. 735–749. https://doi.org/10.1016/j.fss.2009.07.004.

21. Mendel J.M. Type-2 fuzzy sets: some questions and answers. *IEEE Connections, Newsletter of the IEEE Neural Networks Society*. 2003. Vol. 1. P. 10–13.

22. Mashchenko S.O. Sums of fuzzy set of summands. *Fuzzy Sets and Systems*. 2020. Vol. 417. P. 140–151. https://doi.org/10.1016/j.fss.2020.10.006.

23. Mashchenko S.O. Sum of discrete fuzzy numbers with fuzzy set of summands. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2021. Vol. 57, N 3. P. 374–382. https://doi.org/10.1007/s10559-021-00362-w.

24. Mashchenko S.O. Minimum of fuzzy numbers with a fuzzy set of operands.. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2022. Vol. 58, N 2. P. 210–219. https://doi.org/10.1007/s10559-021-00362-w.

S.O. Mashchenko

NON-DOMINATED ALTERNATIVES OF FUZZY SET OF EXPERTS

Abstract. The author analyzes a set of non-dominated alternatives in the problem of group decision-making by a fuzzy set of experts and shows that it is a type-2 fuzzy set (T2FS). The corresponding type-2 membership function is generated. The decomposition approach is used to analyze the T2FS of non-dominated alternatives. It is shown that the T2FS of non-dominated alternatives can be decomposed according to secondary membership grades into a finite collection of type-1 fuzzy sets, each being the set of non-dominated alternatives for a crisp set of experts, which is the corresponding α-cut of the original fuzzy set. Examples are given.

Keywords: decision making; fuzzy preference relation; type-2 fuzzy set.

Надійшла до редакції 22.11.2022