УДК 517.988

**В.В. СЕМЕНОВ**
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *semenov.volodya@gmail.com*.

**С.В. ДЕНИСОВ**
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *sireukr@gmail.com*.

# ІМПУЛЬСНА ТРАЄКТОРНО-ФІНАЛЬНА КЕРОВАНІСТЬ ПАРАБОЛІЧНО-ГІПЕРБОЛІЧНИХ СИСТЕМ[1]

**Анотація.** Досліджено питання існування та єдиності узагальнених розв'язків граничних задач для рівнянь параболічно-гіперболічного типу з узагальненими функціями скінченного порядку у правих частинах. Мотивацією є аналіз задач траєкторної та фінальної керованості систем, що визначаються цими граничними задачами і зазнають зосереджених впливів типу імпульсних або точкових. Розглянуті системи можна вважати «іграшковими моделями» взаємодії твердого тіла та рідини. Отримано апріорні оцінки в негативних нормах. Доведено теореми існування та єдиності узагальнених розв'язків та теореми траєкторно-фінальної керованості систем з сингулярними впливами.

**Ключові слова:** керованість, рівняння параболічно-гіперболічного типу, апріорні оцінки, негативні норми, узагальнений розв'язок, імпульсне керування.

## ВСТУП

Багато прикладних проблем фізики, екології, медицини та інших галузей розв'язуються як задачі, що містять у правих частинах рівняння стану системи сингулярні узагальнені функції (імпульсне, точкове, рухоме керування тощо) [1–4]. Наразі існує велика кількість робіт з теорії узагальненого керування, що відрізняються як типом досліджуваної системи, так і математичною постановкою та підходами до розв'язання. Просторово-часова сингулярність ускладнює дослідження моделей класичними методами теорії керування [5, 6].

С.І. Ляшко запропонував розв'язувати задачі імпульсного керування лінійними системами з розподіленими параметрами, ґрунтуючись на теорії оснащених просторів [7] та методі апріорних оцінок у негативних нормах В.П. Діденка [8, 9]. Це дало змогу створити загальну теорію сингулярного (узагальненого) оптимального керування лінійними системами [10] та розв'язати чимало проблем існування слабких розв'язків некласичних граничних задач [11–14], існування оптимальних керувань [15–17], керованості [18–20], побудови необхідних умов оптимальності та чисельних методів оптимізації [21–24].

Важливою і складною є задача фінальної керованості для розподілених систем з узагальненим керуванням. Проблема полягає у визначенні ефективної інтерпретації сліду $u\big|_{t=T}$ функції стану або у доведенні теореми про підвищену регулярність. Для систем, що описують хвильові процеси, одержано низку результатів [18–20, 25].

У роботах [26, 27] розглянуто слабкі постановки граничних задач, в яких потрібно шукати функції, що задовольняють на різних частинах просторової області рівнянням параболічного (або еліптичного) і гіперболічного типів, а на межі розділу — умовам спряження дифракційного типу. Зазначимо, що відкритим залишилось питання щодо класу узагальнених розв'язків, у якому для параболічно-гіперболічної задачі з несамоспряженими еліптичними частинами спра-

[1]Робота виконана за фінансової підтримки МОН України (проєкт «Обчислювальні алгоритми і оптимізація для штучного інтелекту, медицини та оборони», 0122U002026).

ведливою є теорема існування та єдиності для довільної інтегровної з квадратом правої частини. Також відповідно до відомих результатів неможливо коректно сформулювати задачу фінальної керованості параболічно-гіперболічних систем з імпульсно-точковими керуваннями.

У пропонованій роботі досліджується питання існування та єдиності узагальнених розв'язків граничних задач з умовами спряження для рівнянь параболічно-гіперболічного типу з узагальненими функціями скінченного порядку в правих частинах. Це потрібно для аналізу задач траєкторної та фінальної керованості систем, що визначаються такими граничними задачами і зазнають зосереджених впливів типу імпульсних або точкових. Розглянуті системи можна вважати «іграшковими моделями» взаємодії твердого тіла та рідини. Більш складні моделі, у тому числі нелінійні, аналізуються в [28–30]. Отримано апріорні оцінки в негативних нормах, доведено теореми існування та теореми траєкторно-фінальної керованості.

### ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ ТА ПРОСТОРИ

Нехай обмежену область $\Omega \subseteq R^n$ з регулярною межею $\partial\Omega$ розділено гіперповерхнею $\gamma \subseteq R^n$ на дві підобласті $\Omega_1$, $\Omega_2$ так, що $\Omega = \Omega_1 \cup \gamma \cup \Omega_2$. Уведемо позначення:

$$\Gamma = (0, T) \times \gamma,\ \Sigma_k = (0, T) \times (\partial\Omega_k \setminus \gamma),\ Q_k = (0, T) \times \Omega_k,\ Q = Q_1 \cup Q_2\ \ (k = 1, 2).$$

Вважатимемо, що в підобласті $Q_1$ задано гіперболічне рівняння

$$u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} + au = f^{(1)}(t, x), \tag{1}$$

а в підобласті $Q_2$ — параболічне рівняння

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} + au = f^{(2)}(t, x). \tag{2}$$

Нехай функція стану системи $(t, x) \mapsto u(t, x)$ є розв'язком граничної задачі: знайти функцію $u$, що задовольняє в області $Q_1$ рівняння (1), а в області $Q_2$ — рівняння (2), в області $\Omega_1$ для $t = 0$ — початкові умови

$$u\big|_{t=0} = 0,\ \ u_t\big|_{t=0} = 0, \tag{3}$$

в області $\Omega_2$ для $t = 0$ — початкову умову

$$u\big|_{t=0} = 0, \tag{4}$$

на поверхні $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ — однорідну умову Діріхле

$$u\big|_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2} = 0, \tag{5}$$

і на $\Gamma$ — умови спряження дифракційного типу [31]

$$[u] = 0,\ \left[\frac{\partial u}{\partial N}\right] = 0,\ (t, x) \in \Gamma, \tag{6}$$

де символ $[v]$ означає стрибок функції $v$ для переходу через $\Gamma$, тобто $[v] = v^+ - v^-$, $v^+(t, x) = \lim\limits_{y \to x,\ y \in \Omega_2} v(t, y)$, $v^-(t, x) = \lim\limits_{y \to x,\ y \in \Omega_1} v(t, y)$;

$\dfrac{\partial u}{\partial N}=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_i}\vec{n}_j$ — конормальна похідна, $\vec{n}=(\vec{n}_1,\ldots,\vec{n}_n)$ — одиничний вектор нормалі до $\gamma$, зовнішньої стосовно області $\Omega_1$.

Нехай $D_0$ — лінійний простір нескінченно диференційовних в $Q$ функцій, які допускають продовження за неперервністю з $Q_1$ в $\overline{Q}_1$ і з $Q_2$ в $\overline{Q}_2$ із збереженням $C^1$-гладкості і задовольняють умови (3)–(6); $D_T$ — аналогічний лінійний простір, але функції задовольняють спряжені умови:

$$v\,|_{t=T}=0 \text{ в } \Omega, \tag{7}$$

$$v_t\,|_{t=T}=0 \text{ в } \Omega_1, \tag{8}$$

$$v\,|_{\Sigma_1\cup\Sigma_2}=0, \tag{9}$$

$$[v]=0 \text{ на } \Gamma, \tag{10}$$

$$\left[\frac{\partial v}{\partial N}\right]+\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\vec{n}_i\right)v\right]=0 \text{ на } \Gamma. \tag{11}$$

Позначимо $W_0$ Гільбертів простір — поповнення $D_0$ за нормою

$$\|u\|_{W_0}=\left(\int_{Q_1}\left(u_t^2+\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}^2\right)dxdt+\int_{Q_2}\left(u_t^2+\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}^2\right)dxdt\right)^{1/2}. \tag{12}$$

Зазначимо, що $W_0$ складається з елементів простору $W_2^1(Q)$, що як сліди задовольняють умови (3)–( 5) (початкова умова $u_t\,\big|_{t=0}=0$ «втрачається» у разі поповнення), $W_T$ — Гільбертів простір, отриманий поповненням лінійного простору $D_T$ за нормою (12), $H_0$ — Гільбертів простір — поповнення лінійного простору $D_0$ за нормою

$$\|u\|_{H_0}=(\|u\|_{L_2(Q)}^2+\|u|_{t=T}\|_{L_2(\Omega_1)}^2)^{1/2},$$

$H_T$ — Гільбертів простір — поповнення лінійного простору $D_T$ за нормою

$$\|v\|_{H_T}=(\|v\|_{L_2(Q)}^2+\|v\,|_{t=0}\|_{L_2(\Omega_1)}^2)^{1/2}.$$

Мають місце щільні та неперервні вкладення $W_0\subseteq L_2(Q)$, $W_T\subseteq L_2(Q)$. Отже, за парами просторів $(W_0,\, L_2(Q))$ і $(W_T,\, L_2(Q))$ можна побудувати негативні простори $(W_0)^*$ і $(W_T)^*$ відповідно. Нехай $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_T$ — канонічні білінійні форми на вкладеннях $W_0\times(W_0)^*$ і $(W_T)^*\times W_T$ відповідно, отримані продовженням за неперервністю скалярного добутку $(\cdot,\cdot)_{L_2(Q)}$.

**Лема 1.** Мають місце щільні неперервні канонічні вкладення $W_0\subseteq H_0$, $W_T\subseteq H_T$.

**Доведення** здійснюється аналогічно доведенню леми 4.17 з роботи [32]. Потрібно порівняти відповідні норми на $D_0$ ($D_T$) та перевірити виконання умови $\pi$) [32]. ■

Хоча нерівність $\|u\|_{L_2(Q)}\le\|u\|_{H_0}$ справджується для всіх $u\in D_0$, канонічне вкладення $H_0\subseteq L_2(Q)$ відсутнє (так саме і для простору $H_T$), оскільки для цієї пари не виконується умова $\pi$).

**Лема 2.** Простір $H_0$ ізометрично ізоморфний простору $L_2(Q) \times L_2(\Omega_1)$. Оператор ізометрії $O: H \to L_2(Q) \times L_2(\Omega_1)$ — неперервне продовження оператора $u \mapsto (u, \chi_{\Omega_1} u\big|_{t=T})$, що діє на просторі $D_0$.

**Доведення.** Вочевидь, оператор $O: u \mapsto (u, \chi_{\Omega_1} u\big|_{t=T})$ лінійний і для $u \in D_0$ маємо $\|Ou\|^2_{L_2(Q)\times L_2(\Omega_1)} = \|u\|^2_{L_2(Q)} + \|u\big|_{t=T}\|^2_{L_2(\Omega_1)} = \|u\|^2_H$. Для доведення леми достатньо встановити щільність множини $O(D_0)$ у просторі $L_2(Q)\times L_2(\Omega_1)$. Покажемо, що мають місце вкладення $\overline{O(D_0)} \supseteq \{(u,0): u \in L_2(Q)\}$ і $\overline{O(D_0)} \supseteq \{(0,g): g \in L_2(\Omega_1)\}$. Але тоді $\overline{O(D_0)} = L_2(Q) \times L_2(\Omega_1)$.

Розглянемо функцію $u \in D_0$ таку, що $u\big|_{Q_1} \in C_0^\infty(Q_1)$. Вочевидь, $Ou = (u, 0)$. Оскільки множина усіх таких функцій щільна в $L_2(Q)$, справджується перше вкладення, тобто замикання множини $O(D_0)$ у просторі $L_2(Q) \times L_2(\Omega_1)$ містить всі елементи вигляду $(u, 0)$, де $u \in L_2(Q)$.

Множина $C_0^\infty(\Omega_1)$ є щільною у просторі $L_2(\Omega_1)$. Для довільної функції $\phi \in C_0^\infty(\Omega_1)$ розглянемо послідовність функцій

$$u_k(t,x) = \begin{cases} \alpha_k(t)\phi(x), & (t,x) \in Q \setminus \overline{Q}_2, \\ 0, & (t,x) \in \overline{Q}_2, \end{cases}$$

де $\alpha_k \in C^\infty([0,T])$, $\alpha_k(T) = 1$, $\operatorname{supp} \alpha_k \subseteq \left[T - \frac{1}{k}T, T\right]$, $\frac{d}{dt}\alpha_k \geq 0$. Тоді $u_k \in D_0$ та $Ou_k = (u_k, \phi)$. Дійсно, $u_k \to 0$ в $L_2(Q)$ для $k \to \infty$. Отже, замикання множини $O(D_0)$ у просторі $L_2(Q) \times L_2(\Omega_1)$ містить всі елементи вигляду $(0, \phi)$, де $\phi \in C_0^\infty(\Omega_1)$. Звідси випливає, що $\overline{O(D_0)} \supseteq \{(0,g): g \in L_2(\Omega_1)\}$. ■

Допустимо, що коефіцієнти рівнянь (1), (2) задовольняють такі умови:

1) $a_{ij} = a_{ji} \in L_\infty(\Omega)$, існує стала $\alpha > 0$ така, що $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$ для всіх $x \in \Omega$ та $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in R^n$;

2) $a_i \in L_\infty(\Omega)$, $\frac{\partial a_i}{\partial x_i} \in L_\infty(\Omega)$, $a_i^+ \in L_\infty(\gamma)$, $a_i^- \in L_\infty(\gamma)$ та $a \in L_\infty(\Omega)$ мають місце нерівності $a(x) \geq \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i(x)}{\partial x_i}$, $a(x) \geq 0$ $\forall x \in \Omega$; $\sum_{i=1}^n [a_i]\vec{n}_i \leq 0$ на $\gamma$.

## УЗАГАЛЬНЕНА ПОСТАНОВКА

Для функцій $u \in D_0$, $v \in D_T$, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, які задовольняють (1), (2), має місце тотожність

$$-\int_{Q_1} u_t v_t \, dxdt + \int_{Q_2} u_t v \, dxdt + \int_Q \left( \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} v + auv \right) dxdt =$$

$$= \int_{Q_1} f^{(1)} v \, dxdt + \int_{Q_2} f^{(2)} v \, dxdt.$$

Ліва частина цієї тотожності має сенс для функцій $u \in W_0$, $v \in W_T$. Визначимо на $W_0 \times W_T$ білінійну форму

$$b(u,v)=-\int\limits_{Q_1} u_t v_t\,dxdt+\int\limits_{Q_2} u_t v\,dxdt+\int\limits_{Q}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_i}v_{x_j}+\sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i}v+auv\right)dxdt,$$

для якої має місце нерівність $|b(u,v)|\le c\,||u||_{W_0}\,||v||_{W_T}$. Отже, форма $b$ неперервна на $W_0\times W_T$. Тому існують такі лінійні неперервні оператори $\mathcal{L}:W_0\to(W_T)^*$, $\mathcal{L}^*:W_T\to(W_0)^*$, що $b(u,v)=\langle\mathcal{L}u,v\rangle_T=\langle u,\mathcal{L}^*v\rangle_0$ $(u\in W_0$, $v\in W_T)$.

Розглянемо операторне рівняння

$$\mathcal{L}u=F,\ F\in(W_T)^*. \tag{13}$$

Пару функцій $f^{(1)}\in L_2(Q_1)$ і $f^{(2)}\in L_2(Q_2)$ ототожнимо з функцією $f\in L_2(Q)$ такою, що $\chi_{Q_k}f=f^{(k)}$. Для $f\in L_2(Q)$ розглянемо лінійний функціонал

$$W_T\ni v\mapsto (f,v)_{L_2(Q)}, \tag{14}$$

який належить $(W_T)^*$. Розв'язок $u\in W_0$ операторного рівняння (13) з правою частиною $F\in(W_T)^*$ вигляду (14) називатимемо узагальненим розв'язком задачі (1)–(6) з простору $W_0$. Узагальнений розв'язок з простору $W_0$ — це функція $u\in W_0$, що задовольняє інтегральну тотожність

$$-\int\limits_{Q_1} u_t v_t\,dxdt+\int\limits_{Q_2} u_t v\,dxdt+\int\limits_{Q}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_i}v_{x_j}+\sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i}v+auv\right)dxdt=$$
$$=\int\limits_{Q} f\cdot v\,dxdt\quad \forall v\in W_T.$$

Далі визначимо узагальнені розв'язки з більш широкого класу.

### АПРІОРНІ НЕРІВНОСТІ

Доведемо для операторів $\mathcal{L}$ і $\mathcal{L}^*$ апріорні оцінки в негативних нормах.

**Лема 3.** Для всіх $u\in W_0$ має місце нерівність

$$||u||_H\le c\,||\mathcal{L}u||_{(W_T)^*}. \tag{15}$$

**Доведення.** Для доведення оцінки (15) розглянемо вираз

$$\langle\mathcal{L}u,v\rangle_T=b(u,Iu)=b\left(u,\int_t^T e^{-N\cdot\tau}u\,d\tau\right), \tag{16}$$

де $u\in D_0$, $N$ — велика додатна стала. Зазначимо, що $v=Iu\in W_T$, зокрема $v|_{t=T}=0$; також маємо $u=-e^{N\cdot t}v_t$. Застосовуючи до (16) формули інтегрування частинами та Гауса–Остроградського з урахуванням граничних умов, отримуємо

$$\langle\mathcal{L}u,v\rangle_T=-\int\limits_{Q_1} u_t v_t\,dxdt+\int\limits_{Q_2} u_t v\,dxdt+\int\limits_{Q}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_i}v_{x_j}\right)dxdt-$$
$$-\int\limits_{Q}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i uv_{x_i}\right)dxdt+\int\limits_{Q}\left(a-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_i}{\partial x_i}\right)uv\,dxdt-\int\limits_{\Gamma}\left(\sum_{i=1}^{n}[a_i]\vec{n}_i\right)uv\,d\Gamma=$$
$$=\frac{e^{-NT}}{2}\int\limits_{\Omega_1}(u|_{t=T})^2\,dx+\frac{N}{2}\int\limits_{Q_1} e^{N\cdot t}v_t^2\,dxdt+\int\limits_{Q_2} e^{N\cdot t}v_t^2\,dxdt-$$

$$-\int_Q e^{N\cdot t}\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}v_{tx_i}v_{x_j}\right)dxdt+\int_Q e^{N\cdot t}\left(\sum_{i=1}^n a_i v_t v_{x_i}\right)dxdt-$$

$$-\int_Q e^{N\cdot t}\left(a-\sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_i}\right)vv_t\,dxdt+\int_\Gamma e^{N\cdot t}\left(\sum_{i=1}^n [a_i]\vec{n}_i\right)vv_t\,d\Gamma. \qquad (17)$$

Маємо

$$-\int_Q e^{N\cdot t}\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}v_{tx_i}v_{x_j}\right)dxdt\ge\frac{\alpha N}{2}\int_Q e^{N\cdot t}\left(\sum_{i=1}^n v_{x_i}^2\right)dxdt,$$

$$\int_Q e^{N\cdot t}\left(\sum_{i=1}^n a_i v_t v_{x_i}\right)dxdt\ge -M\int_Q e^{N\cdot t}\left(\sum_{i=1}^n |v_t||v_{x_i}|\right)dxdt,$$

де $M=\max\limits_{i\in\{1,\dots,n\}}||a_i||_{L_\infty(\Omega)}<+\infty$. Шостий та сьомий доданки у правій частині (17) невід'ємні. Отже, маємо ($N\ge 2$)

$$\langle \mathcal{L}u,v\rangle_T\ge\frac{e^{-NT}}{2}||u|_{t=T}||^2_{L_2(\Omega_1)}+\int_Q e^{N\cdot t}\left(v_t^2+\frac{\alpha N}{2}\sum_{i=1}^n v_{x_i}^2-M\sum_{i=1}^n|v_t||v_{x_i}|\right)dxdt=$$

$$=\frac{e^{-NT}}{2}||u|_{t=T}||^2_{L_2(\Omega_1)}+\int_Q e^{N\cdot t}\left(\frac{1}{2}v_t^2+\frac{\alpha N}{4}\sum_{i=1}^n v_{x_i}^2\right)dxdt+$$

$$+\int_Q e^{N\cdot t}\sum_{i=1}^n\left(\frac{1}{2n}v_t^2+\frac{\alpha N}{4}v_{x_i}^2-M|v_t||v_{x_i}|\right)dxdt.$$

Вважатимемо $N=2nM^2/\alpha$ і отримаємо

$$\int_Q e^{N\cdot t}\sum_{i=1}^n\left(\frac{1}{2n}v_t^2+\frac{\alpha N}{4}v_{x_i}^2-M|v_t||v_{x_i}|\right)dxdt=$$

$$=\int_Q e^{N\cdot t}\sum_{i=1}^n\left(\frac{v_t}{\sqrt{2n}}-\frac{\sqrt{n}M\cdot v_{x_i}}{\sqrt{2}}\right)^2 dxdt\ge 0,$$

звідси

$$\langle \mathcal{L}u,v\rangle_T\ge c_1(||u|_{t=T}||^2_{L_2(\Omega_1)}+||v||^2_{W_T}). \qquad (18)$$

Застосовуючи до лівої частини (18) нерівність Шварца, отримуємо

$$||\mathcal{L}u||_{(W_T)^*}\,||v||_{W_T}\ge c_1||u|_{t=T}||^2_{L_2(\Omega_1)}+c_1||v||^2_{W_T}, \qquad (19)$$

звідси випливає оцінка $||\mathcal{L}u||_{(W_T)^*}\ge c_1||v||_{W_T}$. Застосувавши до (19) нерівність $a^2+b^2\ge 2ab$ та скоротивши на $||v||_{W_T}$, отримаємо нерівність $||\mathcal{L}u||_{(W_T)^*}\ge$ $\ge 2c_1||u|_{t=T}||_{L_2(\Omega_1)}$. З урахуванням $||u||_{L_2(Q)}=||-e^{N\cdot t}v_t||_{L_2(Q)}\le c_2||v||_{W_T}$ матимемо оцінку (15) для $u\in D_0$. За допомогою граничного переходу доводимо справедливість (15) для всіх $u\in W_0$. ■

**Лема 4.** Для всіх $v\in W_T$ має місце нерівність

$$||v||_H\le c||\mathcal{L}^*v||_{(W_0)^*}. \qquad (20)$$

**Доведення.** Уведемо для $v \in D_T$ допоміжну задачу Коші

$$e^{-N\cdot t}u_t = v,\ u\big|_{t=0} = 0, \tag{21}$$

де $N > 0$ — достатньо велика стала. Вочевидь, $u \in W_0$. Розглянемо значення лінійного функціонала $\mathcal{L}^* v \in (W_0)^*$ на елементі $u \in W_0$, який є розв'язком задачі (21). Маємо

$$\langle u, \mathcal{L}^* v\rangle_0 = -\int\limits_{Q_1} u_t v_t\, dxdt + \int\limits_{Q_2} u_t v\, dxdt + \int\limits_{Q} \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} v + auv\right) dxdt =$$

$$= -\int\limits_{Q_1} e^{N\cdot t} v v_t\, dxdt + \int\limits_{Q_2} e^{-N\cdot t} u_t^2\, dxdt +$$

$$+ \int\limits_{Q} e^{-N\cdot t} \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} u_{tx_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} u_t + auu_t\right) dxdt. \tag{22}$$

Розглянемо окремо доданки з правої частини (22). Маємо

$$-\int\limits_{Q_1} e^{N\cdot t} v v_t\, dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_1} (v\big|_{t=0})^2\, dx + \frac{N}{2}\int\limits_{Q_1} e^{-N\cdot t} u_t^2\, dxdt,$$

$$\int\limits_{Q} e^{-N\cdot t}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} u_{tx_j}\right) dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \left. e^{-N\cdot T}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} u_{x_j}\right)\right|_{t=T} dx +$$

$$+\frac{N}{2}\int\limits_{Q} e^{-N\cdot t}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} u_{x_j}\right) dxdt \ge \frac{\alpha N}{2}\int\limits_{Q} e^{-N\cdot t}\left(\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2\right) dxdt,$$

$$\int\limits_{Q} e^{-N\cdot t}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} u_t\right) dxdt \ge -M\int\limits_{Q} e^{-N\cdot t}\left(\sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}||u_t|\right) dxdt$$

$$\left(M = \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} ||a_i||_{L_\infty(\Omega)} < +\infty\right),$$

$$\int\limits_{Q} e^{-N\cdot t} auu_t\, dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} a(u\big|_{t=0})^2\, dx + \frac{N}{2}\int\limits_{Q} e^{-N\cdot t} au^2\, dxdt \ge 0.$$

З урахуванням отриманих нерівностей маємо ($N \ge 2$)

$$\langle u, \mathcal{L}^* v\rangle_0 \ge \frac{1}{2}||v\big|_{t=0}||^2_{L_2(\Omega_1)} + \int\limits_{Q} e^{-N\cdot t}\left(u_t^2 + \frac{\alpha N}{2}\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 - M\sum_{i=1}^{n} |u_t||u_{x_i}|\right) dxdt.$$

Використавши нерівність $M|u_t||u_{x_i}| \le \frac{1}{2n}u_t^2 + \frac{M^2 n}{2}u_{x_i}^2$, отримаємо

$$\langle u, \mathcal{L}^* v\rangle_0 \ge \frac{1}{2}||v\big|_{t=0}||^2_{L_2(\Omega_1)} + \int\limits_{Q} e^{-N\cdot t}\left(\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{\alpha N - M^2 n}{2}\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2\right) dxdt.$$

Виберемо достатньо велике число $N > 0$ і матимемо нерівність

$$\langle u, \mathcal{L}^* v\rangle_0 \ge c_1\left(||v\big|_{t=0}||^2_{L_2(\Omega_1)} + ||u||^2_{W_0}\right). \tag{23}$$

Застосовуючи до лівої частини (23) нерівність Шварца, отримуємо

$$\|\mathcal{L}^* v\|_{(W_0)^*}\, \|u\|_{W_0} \ge c_1 \|v|_{t=0}\|^2_{L_2(\Omega_1)} + c_1 \|u\|^2_{W_0}, \tag{24}$$

звідси випливає нерівність $\|\mathcal{L}^* v\|_{(W_0)^*} \ge c_1 \|u\|_{W_0}$. Застосовуючи до правої частини (24) нерівність Коші та скорочуючи на $\|u\|_{W_0}$, одержимо оцінку $\|\mathcal{L}^* v\|_{(W_0)^*} \ge 2c_1 \|v|_{t=0}\|_{L_2(\Omega_1)}$. З урахуванням співвідношення $\|v\|_{L_2(Q)} = = \|e^{-N\cdot t} u_t\|_{L_2(Q)} \le c_2 \|u\|_{W_0}$ отримаємо оцінку (20) для $v \in D_T$. За допомогою граничного переходу доводимо нерівність (20) для всіх $v \in W_T$. ■

**ТЕОРЕМИ ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНОСТІ УЗАГАЛЬНЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ**

Доведемо однозначну щільну розв'язність операторних рівнянь

$$\mathcal{L}^* u = F,\ F \in (W_T)^*, \tag{25}$$

$$\mathcal{L}^* v = G,\ G \in (W_0)^*. \tag{26}$$

**Теорема 1.** Для довільного елемента $F \in L_2(Q)$ $(G \in L_2(Q))$ існує єдиний розв'язок $u \in W_0$ $(v \in W_T)$ операторного рівняння (25) (рівняння (26)), при цьому виконується оцінка $\|u\|_{W_0} \le c \|F\|_{L_2(Q)}$ $(\|v\|_{W_T} \le c \|G\|_{L_2(Q)})$.

**Доведення** аналогічне доведенню теореми 4.4 з роботи [32]. ■

**Зауваження 1.** Розв'язок рівняння (26) з $G \in L_2(Q)$ можна інтерпретувати як слабкий (узагальнений) розв'язок граничної задачі

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + A^+ v = \chi_{Q_1} G \text{ в } Q_1,\ -\frac{\partial v}{\partial t} + A^+ v = \chi_{Q_2} G \text{ в } Q_2,$$

$$v|_{t=T} = 0 \text{ в } \Omega,\ \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=T} = 0 \text{ в } \Omega_1,\ v|_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2} = 0,$$

$$[v] = 0 \text{ на } \Gamma,\ \left[\frac{\partial v}{\partial N}\right] + \left[\left(\sum_{i=1}^n a_i \vec{n}_i\right) v\right] = 0 \text{ на } \Gamma,$$

де $A^+ v = -\sum_{i,j=1}^n (a_{ij} v_{x_j})_{x_i} - \sum_{i=1}^n (a_i v)_{x_i} + av$ — диференціальний вираз другого порядку, формально спряжений до $A$.

Розширимо поняття розв'язку задачі (1)–(6).

**Означення 1.** Узагальненим розв'язком операторного рівняння (25) з правою частиною $F \in (W_T)^*$ називаємо елемент $u \in H_0$, для якого існує така послідовність функцій $u_m \in W_0$, що $\|u_m - u\|_{H_0} \to 0$ і $\|\mathcal{L} u_m - F\|_{(W_T)^*} \to 0$ для $m \to \infty$.

**Зауваження 2.** Аналогічно визначимо для рівняння (26) узагальнений розв'язок з $H_T$.

**Теорема 2.** Для довільного елемента $F \in (W_T)^*$ $(G \in (W_0)^*)$ існує єдиний узагальнений розв'язок $u \in H_0$ $(v \in H_T)$ операторного рівняння (25) (рівняння (26)), при цьому справджується оцінка $\|u\|_{H_0} \le c \|F\|_{(W_T)^*}$ $(\|v\|_{H_T} \le c \|G\|_{(W_0)^*})$.

**Доведення** аналогічне доведенню теореми 4.8 з роботи [32]. ■

Дамо інтерпретацію узагальненого розв'язку операторного рівняння (25) як елемента простору $H_0$, що задовольняє деяку інтегральну тотожність.

Нехай $O_T$ — множина нескінченно диференційовних в $Q$ функцій, для яких можливе продовження за неперервністю з $Q_1$ в $\overline{Q_1}$ і з $Q_2$ в $\overline{Q_2}$ зі збереженням $C^1$-гладкості і виконуються умови (7), (9)–(11).

**Означення 2.** Узагальненим розв'язком рівняння (25) з правою частиною $F \in (W_T)^*$ називаємо елемент $u \in H_0$, що задовольняє тотожність

$$\left( u, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + A^+ v \right)_{L_2(Q_1)} + \left( u, -\frac{\partial v}{\partial t} + A^+ v \right)_{L_2(Q_2)} -$$

$$-\left( u\big|_{t=T}, \frac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{t=T} \right)_{L_2(\Omega_1)} = \langle F, v \rangle_T \quad \forall v \in O_T .$$

**Лема 5.** Означення 1 і 2 узагальненого розв'язку рівняння (25) рівносильні.

**Доведення.** Нехай функція $u \in H_0$ — узагальнений розв'язок рівняння (25) за означенням 1. Тоді існує послідовність $u_m \in D_0$ така, що

$$|| u_m - u ||_{H_0} \to 0, \; || \mathcal{L} u_m - F ||_{(W_T)^*} \to 0 \text{ для } m \to \infty. \tag{27}$$

Простори $H_0$ та $L_2(Q) \times L_2(\Omega_1)$ ізометричні, тому $u \in L_2(Q) \times L_2(\Omega_1)$ та

$$|| u - u_m ||_{L_2(Q) \times L_2(\Omega_1)} \to 0 \text{ для } m \to \infty.$$

Розглянемо $\left( \frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} + A u_m, v \right)_{L_2(Q_1)} + \left( \frac{\partial u_m}{\partial t} + A u_m, v \right)_{L_2(Q_2)}$ для довільних функцій $v \in O_T$. Застосовуючи формули інтегрування частинами та Остроградського–Гауса, отримуємо

$$\left( u_m, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + A^+ v \right)_{L_2(Q_1)} + \left( u_m, -\frac{\partial v}{\partial t} + A^+ v \right)_{L_2(Q_2)} - \left( u_m\big|_{t=T}, \frac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{t=T} \right)_{L_2(\Omega_1)} =$$

$$= \left( \frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} + A u_m, v \right)_{L_2(Q_1)} + \left( \frac{\partial u_m}{\partial t} + A u_m, v \right)_{L_2(Q_2)} .$$

Перейдемо в останній рівності до границі за умови $m \to \infty$. З урахуванням (27) маємо

$$\left( u, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + A^+ v \right)_{L_2(Q_1)} + \left( u, -\frac{\partial v}{\partial t} + A^+ v \right)_{L_2(Q_2)} - \left( u\big|_{t=T}, \frac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{t=T} \right)_{L_2(\Omega_1)} = \langle F, v \rangle_T .$$

Отже, $u \in L_2(Q) \times L_2(\Omega_1)$ — узагальнений розв'язок рівняння (25) за означенням 2.

Нехай тепер $u = (u, u|_{t=T}) \in L_2(Q) \times L_2(\Omega_1)$ — узагальнений розв'язок рівняння (25) за означенням 2. Виберемо таку послідовність $\mathcal{L} u_m$, $u_m \in D_0$, $m = 1, 2, \ldots$, що $|| \mathcal{L} u_m - F ||_{(W_T)^*} \to 0$ для $m \to \infty$. Існує функція $\bar{u} \in H_0$ така, що $|| u_m - \bar{u} ||_{H_0} \to 0$, тобто $\bar{u}$ — узагальнений розв'язок за означенням 1. Із доведеного випливає, що $\bar{u}$ — узагальнений розв'язок за означенням 2. Покажемо, що $u = \bar{u}$ в $L_2(Q) \times L_2(\Omega_1)$, а отже і в $H_0$. Зрозуміло, що для довільних функцій $v \in O_T$ має місце рівність

$$\left( u - \bar{u}, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + A^+ v \right)_{L_2(Q_1)} + \left( u - \bar{u}, -\frac{\partial v}{\partial t} + A^+ v \right)_{L_2(Q_2)} -$$

.

$$-\left( u\big|_{t=T} - \bar{u}\big|_{t=T}, \frac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{t=T} \right)_{L_2(\Omega_1)} = 0 .$$

Підставивши в цю рівність довільну функцію $v \in D_T$, отримаємо

$$\left( u - \bar{u}, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + A^+ v \right)_{L_2(Q_1)} + \left( u - \bar{u}, -\frac{\partial v}{\partial t} + A^+ v \right)_{L_2(Q_2)} = 0,$$

звідси робимо висновок, що $u = \bar{u}$ в $L_2(Q)$. З урахуванням цього факту можемо записати $\left( u\big|_{t=T} - \bar{u}\big|_{t=T}, \frac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{t=T} \right)_{L_2(\Omega_1)} = 0 \ \forall v \in O_T$. Отже, унаслідок щільності множини функцій $\frac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{t=T}$ у просторі $L_2(\Omega_1)$ маємо $u\big|_{t=T} = \bar{u}\big|_{t=T}$ в $L_2(\Omega_1)$. ■

**ТРАЄКТОРНО-ФІНАЛЬНА КЕРОВАНІСТЬ**

Розглянемо систему, функціонування якої опишемо рівнянням

$$\mathcal{L}u = F(h), \ h \in U, \tag{28}$$

де $\mathcal{L}: W_0 \to (W_T)^*$ — введений і досліджений у попередніх розділах оператор, асоційований з граничною задачею (1)–(6), $U$ — множина допустимих керувань з простору керувань $Y$, $F: Y \to (W_T)^*$ — керувальне відображення, $u = u(h) \in H_0$ — стан системи (узагальнений розв'язок рівняння (28)), що відповідає керуванню $h \in U$.

Із теорем 1 та 2 випливають такі теореми керованості. Доведення цих теорем стандартні (див. [10, 18]).

**Теорема 3.** Якщо $F(U) \supseteq L_2(Q)$, то система (28) точно керована в $W_0$ множиною $U$, тобто $H_0 \supseteq \{u(h): h \in U\} \supseteq W_0$.

Оскільки норма простору $H_0$ «утримує» значення $u\big|_{t=T}$ на $\Omega_1$, то отримані апріорні оцінки дають змогу дослідити для параболічно-гіперболічної системи (28) питання фінальної керованості у класі узагальнених керувальних впливів.

**Теорема 4.** Якщо множина $F(U)$ щільна в $(W_T)^*$, то система (28) асимптотично керована в $H_0$ множиною $U$, тобто множина $\{u(h): h \in U\}$ є щільною в $H_0$. Зокрема:

1) множина $\{u(h): h \in U\}$ є щільною в $L_2(Q)$ (траєкторна керованість);

2) множина $\{\chi_{\Omega_1} u(h)\big|_{t=T}: h \in U\}$ є щільною в $L_2(\Omega_1)$ (фінальна керованість).

Множина

$$\left\{ \sum_{j=1}^{n} c_j \delta(t - t_j) \otimes g_j : n \in N, \ c_j \in R, \ t_j \in [0, T], \ g_j \in L_2(\Omega) \right\}$$

щільна у просторі $(W_T)^*$ [10, 18]. Отже, система (28) є асимптотично траєкторно-фінально керованою в $L_2(Q) \times L_2(\Omega_1)$ класом імпульсних керувань.

**ВИСНОВКИ**

Для параболічно-гіперболічних систем отримано апріорні нерівності у негативних нормах та доведено теорему траєкторно-фінальної керованості. Мотивацією є аналіз задач траєкторної та фінальної керованості систем, що зазнають зосереджених впливів типу імпульсних або точкових. Розглянуті системи можна вважати «іграшковими моделями» взаємодії твердого тіла та рідини. Зауважимо, що замість першої умови в (6) можна розглянути спряження $u_t^+ - u^- = 0$ на Г. Задача з такою умовою цікавіша для застосувань та буде розглянута у майбутньому.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. Бутковский А.Г., Пустыльников Л.М. Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами. Москва: Наука, 1980. 384 с.
2. Ляшко С.И., Клюшин Д.А., Тригуб А.С. Моделирование и оптимизация подземного массопереноса. Київ: Наук. думка, 1998. 235 с.
3. Миллер Б.М., Рубинович Е.Я. Оптимизация динамических систем с импульсным управленим. Москва: Наука, 2005. 429 с.
4. Lyashko S.I., Klyushin D.A., Nomirovsky D.A., Semenov V.V. Identification of age-structured contamination sources in ground water. In: Optimal Control of Age-Structured Populations in Economy, Demography, and the Environment. Boucekkine R., Hritonenko N., Yatsenko Y. (Eds.). London; New York: Routledge, 2013. P. 277–292.
5. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. Москва: Мир, 1972. 414 с.
6. Лионс Ж.-Л. Управление сингулярными распределенными системами. Москва: Наука, 1987. 368 с.
7. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Київ: Наук. думка, 1965. 800 с.
8. Диденко В.П. О краевых задачах для многомерных гиперболических уравнений с вырождением. *ДАН СССР*. 1972. Т. 205, № 4. С. 763–766.
9. Ляшко И.И., Диденко В.П., Цитрицкий О.Е. Фильтрация шумов. Київ: Наук. думка, 1979. 232 с.
10. Lyashko S.I. Generalized optimal control of linear systems with distributed parameters. Boston; Dordrecht; London: Kluwer Academic Publishers, 2002. 466 p.
11. Semenov V.V. Solvability of a parabolic transmission problem with the condition of a generalized proper lumped source. *Differential Equations*. 2005. Vol. 41. P. 878–886. https://doi.org/10.1007/s10625-005-0227-x.
12. Anikushyn A.V., Hulianytskyi A.L. Generalized solvability of parabolic integro-differential equations. *Differential Equations*. 2014. Vol. 50. P. 98–109. https://doi.org/10.1134/S0012266114010133.
13. Anikushyn A.V., Nomirovs'kyi D.A. Generalized solutions for linear operators with weakened a priori inequalities. *Ukr. Math. J.* 2011. Vol. 62. P. 1175–1186. https://doi.org/10.1007/s11253-011-0435-x.
14. Tymchyshyn I.B., Nomirovskii D.A. Generalized solvability of a parabolic model describing transfer processes in domains with thin inclusions. *Differential Equations*. 2021. Vol. 57. P. 1053–1062. https://doi.org/10.1134/S0012266121080097.
15. Lyashko I.I., Lyashko S.I., Semenov V.V. Control of pseudo-hyperbolic systems by concentrated impacts. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2000. Vol. 32, Iss. 12. P. 23–36. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v32.i12.40.
16. Denisov S.V., Semenov V.V. Optimization and generalized solution in conjugation problems of parabolic systems. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2005. Vol. 37, Iss. 1. P. 47–61. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v37.i1.60.
17. Anikushyn A.V. Generalized optimal control for systems described by linear integro-differential equations with nonnegative definite integral operators. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2014. Vol. 46, Iss. 6, P. 58–67. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v46.i6.60.
18. Lyashko S.I., Semenov V.V. Controllability of linear distributed systems in classes of generalized actions. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2001. Vol. 37, N 1. P. 13–32. https://doi.org/10.1023/A:1016607831284.

19. Lyashko S.I., Nomirovskii D.A., Sergienko T.I. Trajectory and final controllability in hyperbolic and pseudohyperbolic systems with generalized actions. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2001. Vol. 37, N 5. P. 756–763. https://doi.org/10.1023/A:1013871026026.

20. Lyashko S.I., Semenov V.V., Sergienko T.I. Controllability and optimization of systems of pseudohyperbolic type. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2002. Vol. 38, N 4. P. 586–596. https://doi.org/10.1023/A:1021162303764.

21. Semenov V.V., Semenova N.V. A vector problem of optimal control in a Hilbert space. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2005. Vol. 41, N 2. P. 255–266. https://doi.org/10.1007/s10559-005-0058-z.

22. Lyashko S.I. Numerical solution of pseudoparabolic equations. *Cybernetics and Systems Analysis.* 1995. Vol. 31, N 5. P. 718–722. https://doi.org/10.1007/BF02366321.

23. Nomirovskii D.A. Approximate method for solving the boundary value problem for a parabolic equation with inhomogeneous transmission conditions of nonideal contact type. *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 2006. Vol. 46. P. 995–1006. https://doi.org/10.1134/S096554250606008X.

24. Semenov V.V. Modified extragradient method with Bregman divergence for variational inequalities. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2018. Vol. 50, Iss. 8. P. 26–37. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v50.i8.30.

25. Lions J.-L. Controlabilite exacte des systemes distributes. *Comptes Rendue des Sciences de l'Acadenic des Sciences. Ser. 1*. 1986. Vol. 302, N 13. P. 471–475.

26. Ступялис Л. Краевые задачи для эллиптико-гиперболических уравнений. *Труды Математического института им. В.А. Стеклова.* 1973. Т. CXXV. С. 211–229.

27. Ступялис Л. Начально-краевые задачи для уравнений смешанного типа. *Труды Математического института им. В.А. Стеклова*. 1975. Т. CXXVII. С. 115–145.

28. Lions J.-L., Zuazua E. Approximate controllability for a coupled hydro-elastic system. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*. 1995. Vol 1 (1). P. 1–15.

29. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. Москва: Мир, 1984. 472 с.

30. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. Москва: Мир, 1972. 587 с.

31. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. Москва: Наука, 1973. 407 с.

32. Klyushin D.A., Lyashko S.I., Nomirovskii D.A., Petunin Y.I., Semenov V.V. Applications of the theory of generalized solvability of linear equations. In: Generalized Solutions of Operator Equations and Extreme Elements. Springer Optimization and Its Applications. New York, NY: Springer, 2012. Vol 55. P. 29–101. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-0619-8_4.

**V.V. Semenov, S.V. Denisov**

**IMPULSE TRAJECTORY AND FINAL CONTROLLABILITY OF PARABOLIC-HYPERBOLIC SYSTEMS**

**Abstract.** The authors investigate the existence and uniqueness of generalized solutions of boundary-value problems for equations of the parabolic-hyperbolic type with generalized functions of finite order on the right-hand sides. The motivation is the analysis of the problems of trajectory and final controllability of systems described by these boundary-value problems and subjected to concentrated influences of the impulse or point type. The systems can be considered «toy models» of the interaction of a solid body and a liquid. A priori inequalities in negative norms are obtained. The theorems of existence and uniqueness of generalized solutions and theorems of trajectory and final controllability of systems with singular influences are proved.

**Keywords:** controllability, equations of parabolic-hyperbolic type, a priori inequalities, negative norms, generalized solution, impulse control.

*Надійшла до редакції 26.09.2022*