УДК 517.977

А.О. ЧИКРІЙ
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *g.chikrii@gmail.com*.

Й.С. РАППОПОРТ
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *jeffrappoport@gmail.com.*

МОДИФІКОВАНИЙ МЕТОД РОЗВ’ЯЗУВАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ ДЛЯ ІГРОВИХ ЗАДАЧ КЕРУВАННЯ З ІНТЕГРАЛЬНИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ

Анотація. Розглядаються лінійні диференціальні ігри з інтегральними обмеженнями. Сформульовано достатні умови закінчення гри за скінченний гарантований час у разі, коли умова Нікольського не виконується. Уведено багатозначні відображення, що породжують верхні і нижні розв’язувальні функції спеціального типу. Запропоновано модифіковані схеми прямого методу Нікольського та методу розв’язувальних функцій, що забезпечують завершення гри за скінченний гарантований час в класі квазістратегій та стробоскопічних стратегій. Новітні теоретичні результати проілюстровано на контрольному прикладі Понтрягіна з однотипними об’єктами.

Ключові слова: лінійна диференціальна гра, інтегральні обмеження, багатозначне відображення, розв’язувальні функції, стробоскопічна стратегія.

ВСТУП

Робота присвячена дослідженню проблеми зближення керованих об’єктів та перехоплення цілей в ігрових задачах динаміки з інтегральними обмеженнями щодо керування [1–4] на основі прямого методу Нікольського [1] та методу розв’язувальних функцій [2–4]. Актуальність цієї проблеми зумовлено необхідністю теоретичного обґрунтування відомих проєктувальникам ракетної та космічної техніки методів кривої погоні Л. Ейлера, методу переслідування за променем і, зокрема, паралельного зближення. Умова Нікольського [1] є ключовою умовою для прямого методу Нікольського та методу розв’язувальних функцій в ігрових задачах динаміки з інтегральними обмеженнями на керування. У разі, коли умова Нікольського не виконується, ці методи не працюють.

Уведено багатозначні відображення, що утворюють верхні і нижні розв’язувальні функції спеціального типу, і отримано достатні умови гарантованого результату для лінійної диференціальної гри з інтегральними обмеженнями на керування у разі, коли умова Нікольського не має місця. Запропоновано модифіковані схеми прямого методу Нікольського та методу розв’язувальних функцій, що зумовлюють завершення гри за скінченний гарантований час в класі квазістратегій та стробоскопічних стратегій. Теоретичні результати проілюстровано на контрольному прикладі Понтрягіна з однотипними об’єктами.

Робота є розвитком ідей [1–8], дотична до досліджень [9–14] і вказує на нові можливості застосування методу розв’язувальних функцій до розв'язання ігрових задач керування.

МОДИФІКОВАНА СХЕМА ПРЯМОГО МЕТОДУ НІКОЛЬСЬКОГО

Розглянемо конфліктно-керований процес, еволюція якого описана лінійним диференціальним рівнянням

$$\dot{z} = Az + Bu - Cv. \tag{1}$$

Тут $z \in R^n$, $\upsilon \in R^k$, $u \in R_r^m$, $R_r^m = \{u \in R^m : u \notin \text{int}\, S^r\}$, $\text{int}\, S^r$ — внутрішність кулі S^r радіуса r, $S^r \subset R^n$, $r > 0$, $n \ge 1$, $m \ge 1$, $k \ge 1$; A, B, C — постійні прямокутні матриці розміру $n \times n$, $n \times m$, $n \times k$ відповідно; u — керувальний параметр першого гравця; υ — керувальний параметр другого гравця. Параметри u і υ вибираються у вигляді вимірних функцій $u = u(\cdot)$ і $\upsilon = \upsilon(\cdot)$ з класу $L_p[0, +\infty)$, $p > 1$, і задовольняють обмеження

$$\int_0^\infty \| u(\tau) \|^p \, d\tau \le \mu^p, \ \mu > 1, \tag{2}$$

$$\int_0^\infty \| \upsilon(\tau) \|^p \, d\tau \le \upsilon^p, \ \upsilon > 1. \tag{3}$$

Такі керування називатимемо допустимими. Крім процесу (1) задано термінальну множину, що має циліндричний вигляд

$$M^* = M_0 + M, \tag{4}$$

де M_0 — лінійний підпростір з R^n, а M — компакт з ортогонального доповнення L до підпростору M_0 у R^n.

Траєкторія процесу (1)–(3) з початкового положення $z_0 \in R^n$ може бути приведена на термінальну множину (4) в момент $T = T(z_0)$, якщо для будь-якої допустимої функції $\upsilon(t)$, $t \in [0, T]$, можна побудувати допустиму функцію

$$u(t) = u(t, z_0, \upsilon_t(\cdot)), \ t \in [0, T], \tag{5}$$

де $\upsilon_t(\cdot) = \{\upsilon(\tau), \tau \in [0, t]\}$, або допустиме контркерування

$$u(t) = u(t, z_0, \upsilon(t)), \ t \in [0, T], \tag{6}$$

такі, що абсолютно неперервний розв'язок $z(t)$ задачі Коші $\dot{z} = Az + Bu(t) - C\upsilon(t)$, $z(0) = z_0$ потрапляє на термінальну множину M^* в момент $T = T(z_0)$.

Сформулюємо необхідні факти з опуклого аналізу [5, 13] у вигляді леми.

Лема 1. Нехай $X \in R^n$ — опуклий компакт, $\omega(\tau)$ — невід’ємна обмежена вимірна числова функція. Тоді $\int_0^T \omega(\tau) X d\tau = \int_0^T \omega(\tau) d\tau X$, $T > 0$. До того ж якщо $0 \in X$, $f(\tau) \in \omega(\tau) X$ і $\int_0^T \omega(\tau) d\tau < 1$, то $\int_0^T f(\tau)\, d\tau \in X$, $f(\tau)$ — вимірна функція, $\tau \in [0, T]$.

Нехай π — оператор ортогонального проєктування із R^n на підпростір L. Розглянемо лінійні відображення $\pi e^{At} B R^m \to L$, $\pi e^{At} C R^k \to L$, $t \ge 0$.

Розглянемо функцію [1]

$$\chi^p(t) = \sup_{\int_0^t \|\omega(\tau)\|^p d\tau \le 1} \int_0^t \| \pi e^{A(t-\tau)} C(t-\tau) \omega(\tau) \|^p \, d\tau,$$

де $\omega(\cdot)$ — довільна вимірна функція із простору $L_p^k[0, t)$ із зазначеним обмеженням.

За допомогою функції $\chi^p(t)$ визначимо величину [1] $\mathrm{X}^p = \sup\limits_{0\le t<\infty} \chi^p(t)$.

Умова 1. Справедлива нерівність $\hat{\gamma} = \mu^p - \nu^p \mathrm{X}^p > 0$.

Розглянемо багатозначне відображення

$$W(t, \tau, \upsilon, \alpha) = (\| C(t-\tau)\upsilon \|^p + \alpha\hat{\gamma})^{\frac{1}{p}} \pi e^{(t-\tau)A} BS_r^1 - \pi e^{(t-\tau)A} C\upsilon,$$

де $(t, \tau) \in \Delta_\Theta = \{(t, \tau): 0 \le \tau \le t \le \Theta < \infty\}$, $\upsilon \in R^k$, $\alpha > 0$, Θ — деяке додатне число, $S_r^1 \subset R^n$ — кільце з центром в нулі, зовнішнім радіусом 1 і внутрішнім радіусом r, $1 \ge r > 0$.

Позначимо $\xi(t) = \pi e^{tA} z_0$ і розглянемо за $(t, \tau) \in \Delta_\Theta$, $\upsilon \in R^k$, $z_0 \in R^n$ багатозначне відображення

$$\mathfrak{A}(t, \tau, \upsilon, z_0) = \{\alpha > 0: 0 \in [W(t, \tau, \upsilon, \alpha) - \alpha[M - \xi(t)]]\}.$$

Якщо на множині Δ_Θ виконано умову $\mathfrak{A}(t, \tau, \upsilon, z_0) \ne \varnothing$, то розглянемо для $\tau \in [0, t]$, $t > 0$, $\upsilon \in R^k$, $z_0 \in R^n$ верхню та нижню скалярні розв'язувальні функції [8]

$$\alpha^*(t, \tau, \upsilon, z_0) = \sup\{\alpha: \alpha \in \mathfrak{A}(t, \tau, \upsilon, z_0)\},$$

$$\alpha_*(t, \tau, \upsilon, z_0) = \inf\{\alpha: \alpha \in \mathfrak{A}(t, \tau, \upsilon, z_0)\}.$$

Можна показати [6], що багатозначне відображення $\mathfrak{A}(t, \tau, \upsilon, z_0)$ є замкненозначним, $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$ є вимірним за сукупністю (τ, υ), $\tau \in [0, t]$, $\upsilon \in R^k$, а верхня та нижня розв'язувальні функції $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$ — вимірні за сукупністю (τ, υ), $\tau \in [0, t]$, $\upsilon \in R^k$, і тому вони суперпозиційно вимірні [6], тобто $\alpha^*(t, \tau, \upsilon(\tau), z_0)$ і $\alpha_*(t, \tau, \upsilon(\tau), z_0)$ — вимірні за τ, $\tau \in [0, t]$, для будь-якої вимірної функції $\upsilon(\cdot) \in V(\cdot)$, де $V(\cdot)$ — сукупність вимірних допустимих функцій $\upsilon(\cdot)$, для яких виконується обмеження (3).

Лема 2 [7]. Функції $\inf\limits_{\upsilon \in R^k} \alpha^*(t, \tau, \upsilon, z_0)$ і $\sup\limits_{\upsilon \in R^k} \alpha_*(t, \tau, \upsilon, z_0)$ вимірні за τ, $\tau \in [0, t]$, і мають місце співвідношення

$$\inf_{\upsilon(\cdot) \in L_p^k[0, t]} \int_0^t \alpha^*(t, \tau, \upsilon(\tau), z_0)\, d\tau = \int_0^t \inf_{\upsilon \in R^k} \alpha^*(t, \tau, \upsilon, z_0)\, d\tau,$$

$$\sup_{\upsilon(\cdot) \in L_p^k[0, t]} \int_0^t \alpha_*(t, \tau, \upsilon(\tau), z_0)\, d\tau = \int_0^t \sup_{\upsilon \in R^k} \alpha_*(t, \tau, \upsilon, z_0)\, d\tau.$$

Умова 2. Для деякого початкового положення $z_0 \in R^n$ багатозначне відображення $\mathfrak{A}(t, \tau, \upsilon, z_0)$ набуває непустих значень на множині $\Delta_\Theta \times R^k$ і справедлива нерівність $\sup\limits_{\int_0^t \|\upsilon(\tau)\|^p d\tau \le \nu^p} \int_0^t \alpha_*(t, \tau, \upsilon(\tau), z_0)\, d\tau < 1$, Θ — деяке додатне число.

Розглянемо множину

$$\mathrm{N}_*(z_0) = \{\Theta \ge t \ge 0: \xi(t) \in M\}. \qquad (7)$$

Якщо включення (7) не виконуються ні для яких $\Theta \ge t \ge 0$, то покладемо $\mathrm{N}_*(z_0) = \varnothing$.

Теорема 1. Нехай виконана умова 1 і для деякого додатного числа Θ на множині Δ_Θ виконана умова 2, множина M є опуклою, множина $\mathrm{N}_*(z_0)$ не є порожньою та $\mathrm{N}_* \in \mathrm{N}_*(z_0)$. Тоді траєкторія конфліктно-керованого процесу (1)–(3) з початкового положення $z_0 \in R^n$ може бути приведена на термінальну множину (4) в момент N_* з використанням допустимого керування вигляду (6).

Доведення. Нехай $\upsilon(\cdot)$ — довільне допустиме керування втікача, для якого виконується обмеження (3). Визначимо спосіб вибору керування переслідувачем.

Розглянемо для $\upsilon \in R^k$, $\tau \in [0, \mathrm{N}_*]$ компактнозначне багатозначне відображення

$$U_*(\tau, \upsilon) = \left\{ \begin{array}{l} u \in R_r^m : \|u\| = (\|C(\mathrm{N}_* - \tau)\upsilon\|^p + \alpha_*(\mathrm{N}_*, \tau, \upsilon, z_0)\hat{\gamma})^{\frac{1}{p}}, \\ \pi e^{(\mathrm{N}_* - \tau)A} Bu - \pi e^{(\mathrm{N}_* - \tau)A} C\upsilon \in \alpha_*(\mathrm{N}_*, \tau, \upsilon, z_0)[M - \xi(\mathrm{N}_*)] \end{array} \right\}. \quad (8)$$

Внаслідок властивостей параметрів процесу (1) і нижньої розв'язувальної функції $\alpha_*(\mathrm{N}_*, \tau, \upsilon, z_0)$ копактнозначне відображення $U_*(\tau, \upsilon)$ є $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірним [6] за $\upsilon \in R^k$, $\tau \in [0, \mathrm{N}_*]$. Тому за теоремою про вимірний вибір селектора [14] багатозначне відображення $U(\tau, \upsilon)$ містить $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірний селектор $u_*(\tau, \upsilon)$, який є суперпозиційно вимірною функцією [6] і

$$\|u_*(\tau, \upsilon)\| = (\|C(\mathrm{B}_* - \tau)\upsilon\|^p + \alpha_*(\mathrm{B}_*, \tau, \upsilon, z_0)\hat{\gamma})^{\frac{1}{p}}, \ \tau \in [0, \mathrm{N}_*], \ \upsilon \in R^k.$$

Покладемо керування першого гравця $u_*(\tau) = u_*(\tau, \upsilon(\tau))$, $\tau \in [0, \mathrm{N}_*]$. З урахуванням формули (1) отримаємо

$$\pi z(\mathrm{N}_*) = \xi(\mathrm{N}_*) + \int_0^{\mathrm{N}_*} (\pi e^{(\mathrm{N}_* - \tau)A} Bu_*(\tau) - \pi e^{(\mathrm{N}_* - \tau)A} C\upsilon(\tau)) d\tau. \quad (9)$$

Згідно з вибором керування і за визначенням моменту N_* маємо

$$0 \in M - \xi(\mathrm{N}_*), \quad \int_0^{\mathrm{N}_*} \alpha_*(\mathrm{N}_*, \tau, \upsilon(\tau)) d\tau \le \sup_{\int_0^{\mathrm{N}_*} \|\upsilon(\tau)\|^p d\tau \le \nu^p} \int_0^{\mathrm{N}_*} \alpha_*(\mathrm{N}_*, \tau, \upsilon(\tau), z_0) d\tau < 1,$$

$$\pi e^{(\mathrm{N}_* - \tau)A} Bu_*(\tau) - \pi e^{(\mathrm{N}_* - \tau)A} C\upsilon(\tau) \in \alpha_*(\mathrm{N}_*, \tau, \upsilon(\tau), z_0)[M - \xi(\mathrm{N}_*)].$$

Тоді з урахуванням леми 1 справедливе включення

$$\int_0^{\mathrm{N}_*} [\pi e^{(\mathrm{N}_* - \tau)A} Bu_*(\tau) - \pi e^{(\mathrm{N}_* - \tau)A} C\upsilon(\tau)] d\tau \in M - \xi(\mathrm{N}_*).$$

Таким чином, останнє включення разом зі співвідношенням (9) визначає

$$\pi z(\mathrm{N}_*) \in \xi(\mathrm{N}_*) + M - \xi(\mathrm{N}_*) = M,$$

отже, $z(\mathrm{N}_*) \in M^*$.

Покажемо допустимість відповідного керування переслідувача. З урахуванням умов 1, 2 і співвідношення (8) маємо

$$\int_0^{\mathrm{N}_*} \|u(\tau)\|^p d\tau = \int_0^{\mathrm{N}_*} \|C(\mathrm{N}_* - \tau)\upsilon\|^p d\tau + \hat{\gamma} \int_0^{\mathrm{N}_*} \alpha_*(\mathrm{N}_*, \tau, \upsilon(\tau), z_0) d\tau \le$$

$$\le \nu^p \mathrm{X}^p + \hat{\gamma} \sup_{\int_0^{\mathrm{N}_*} \|\upsilon(\tau)\|^p d\tau \le \nu^p} \int_0^{\mathrm{N}_*} \alpha_*(\mathrm{N}_*, \tau, \upsilon(\tau), z_0) d\tau < \nu^p \mathrm{X}^p + \hat{\gamma} = \mu^p.$$

Покладемо $\sup\limits_{v \in R^k} \alpha_*(t,\tau,v,z_0) = \alpha_*(t,\tau,z_0)$.

Умова 3. Для деякого позитивного числа Θ на множині Δ_Θ виконана умова 2 та справедливе включення

$$0 \in \bigcap_{v \in R^k} \{[W(t,\tau,v,\alpha_*(t,\tau,z_0)) - \gamma(t,\tau)] - \alpha_*(t,\tau,z_0)[M - \xi(t)]\}.$$

Розглянемо множину

$$T(z_0) = \left\{ \Theta \ge t \ge 0: \inf_{\int_0^t \|v(\tau)\|^p d\tau \le v^p} \int_0^t \alpha^*(t,\tau,v(\tau),z_0)\, d\tau \ge 1 \right\}.$$

Якщо для деякого $t > 0$ маємо $\alpha^*(t,\tau,v,z_0) \equiv +\infty$ за $\tau \in [0,t]$, $v \in R^k$, то в цьому випадку значення відповідного інтеграла в фігурних дужках співвідношення природно покласти таким, що дорівнює $+\infty$ і $t \in T(z_0)$. У разі, коли нерівність у співвідношенні не виконуються для всіх $t > 0$, покладемо $T(z_0) = \varnothing$.

Теорема 2. Нехай виконана умова 1 і для деякого додатного числа Θ на множині Δ_Θ виконана умова 3, множина M є опуклою, множина $T(z_0)$ не є порожньою та $T \in T(z_0)$. Тоді траєкторія конфліктно-керованого процесу (1)–(3) з початкового положення $z_0 \in R^n$ може бути приведена на термінальну множину (4) в момент T з використанням допустимого керування вигляду (5).

Доведення. Нехай $v(\cdot)$ — довільне допустиме керування втікача, для якого виконується обмеження (3).

Розглянемо спочатку випадок $\xi(T) \notin M$ і введемо контрольну функцію
$$h(t) = 1 - \int_0^t \alpha^*(T,\tau,v(\tau),z_0)d\tau - \int_t^T \alpha_*(T,\tau,z_0)d\tau, \quad t \in [0,T].$$

Функція $\alpha^*(T,\tau,v,z_0)$ є $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$–вимірною за сукупністю (τ, v), $\tau \in [0,T]$, $v \in R^k$, і тому вона суперпозиційно вимірна; отже, функція $\alpha^*(T,\tau,v(\tau),z_0)$ є вимірною за τ, $\tau \in [0,T]$. Функція $\alpha_*(T,\tau,z_0)$ є вимірною для $\tau \in [0,T]$ згідно з лемою 2.

За визначенням T маємо

$$h(0) = 1 - \int_0^T \alpha_*(T,\tau,z_0)d\tau > 0,$$

$$h(T) = 1 - \int_0^T \alpha^*(T,\tau,v(\tau),z_0)d\tau \le 1 - \inf_{\int_0^T \|v(\tau)\|^p d\tau \le v^p} \int_0^T \alpha^*(T,\tau,v(\tau),z_0)d\tau \le 0.$$

Тому внаслідок неперервності функції $h(t)$ існує такий момент часу t_*, $t_* \in (0,T]$, що $h(t_*) = 0$. Відзначимо, що момент перемикання t_* залежить від передісторії керування другого гравця $v_{t_*}(\cdot) = \{v(s): s \in [0,t_*]\}$.

Розглянемо багатозначні відображення для $v \in R^k$, $\tau \in [0,T]$:

$$U^*(\tau,v) = \left\{ \begin{array}{l} u \in R_r^m: \|u\| = (\|C(T-\tau)v\|^p + \alpha^*(T,\tau,v,z_0)\hat{\gamma})^{\frac{1}{p}}, \\ \pi e^{(T-\tau)A}Bu - \pi e^{(T-\tau)A}Cv \in \alpha^*(T,\tau,v,z_0)[M - \xi(T)] \end{array} \right\}, \tag{10}$$

$$0 \le \tau \le t_*,$$

$$U_*(\tau, \upsilon) = \left\{ \begin{array}{l} u \in R_r^m : \ \|u\| = (\|C(T-\tau)\upsilon\|^p + \alpha_*(T, \tau, z_0)\hat{\gamma})^{\frac{1}{p}}, \\ \pi e^{(T-\tau)A} Bu - \pi e^{(T-\tau)A} C\upsilon \in \alpha_*(T, \tau, z_0)[M - \xi(T)] \end{array} \right\}, \qquad (11)$$

$$t_* < \tau \le T.$$

Внаслідок властивостей параметрів процесу (1), верхньої $\alpha^*(T, \tau, \upsilon, z_0)$ і нижньої $\alpha_*(T, \tau, z_0)$ розв'язувальних функцій відображення $U^*(\tau, \upsilon)$ і $U_*(\tau, \upsilon)$ є $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірними [6] і компактнозначними для $\upsilon \in R^k$, $\tau \in [0, T]$. За теоремою про вимірний вибір селектора [14] багатозначні відображення $U^*(\tau, \upsilon)$ і $U_*(\tau, \upsilon)$ містять $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірні селектори $u^*(\tau, \upsilon)$ і $u_*(\tau, \upsilon)$, які є суперпозиційно вимірними функціями [6] і тому для $\tau \in [0, T]$ функції $u^*(\tau, \upsilon(\tau))$ і $u_*(\tau, \upsilon(\tau))$ є вимірними. Звідси випливає

$$||u^*(\tau, \upsilon(\tau))|| = (||C(T-\tau)\upsilon(\tau)||^p + \alpha^*(T, \tau, \upsilon(\tau), z_0)\hat{\gamma})^{\frac{1}{p}}, \ 0 \le \tau \le t_*,$$

$$||u_*(\tau, \upsilon(\tau))|| = (||C(T-\tau)\upsilon(\tau)||^p + \alpha_*(T, \tau, z_0)\hat{\gamma})^{\frac{1}{p}}, \ t_* < \tau \le T.$$

Покладемо керування першого гравця

$$u(\tau) = u^*(\tau, \upsilon(\tau)), \ 0 \le \tau \le t_*, \ u(\tau) = u_*(\tau, \upsilon(\tau)), \ t_* < \tau \le T.$$

З формули Коші для процесу (1) за обраних керувань маємо

$$\pi z(T) = \xi(T) + \int_0^T \pi e^{(T-\tau)A} [Bu(\tau) - C\upsilon(\tau)] d\tau. \qquad (12)$$

Тоді з урахуванням співвідношень (10)–(12) і леми 1 отримаємо

$$\pi z(T) \in \xi(T) + \int_0^{t_*} \alpha^*(T, \tau, \upsilon(\tau), z_0)[M - \xi(T)] d\tau + \int_{t_*}^T \alpha_*(T, \tau, z_0)[M - \xi(T)] d\tau =$$

$$= \xi(T) \left[1 - \int_0^{t_*} \alpha^*(T, \tau, \upsilon(\tau), z_0) \, d\tau - \int_{t_*}^T \alpha_*(T, \tau, z_0) \, d\tau \right] +$$

$$+ \int_0^{t_*} \alpha^*(T, \tau, \upsilon(\tau), z_0) M d\tau + \int_{t_*}^T \alpha_*(T, \tau, z_0) M d\tau =$$

$$= \left[\int_0^{t_*} \alpha^*(T, \tau, \upsilon(\tau), z_0) \, d\tau + \int_{t_*}^T \alpha_*(T, \tau, z_0) \, d\tau \right] M = M.$$

Отже, $z(T) \in M^*$ і залишилося показати допустимість керування $u(\tau) = u(\tau, \upsilon(\tau))$, $\tau \in [0, T]$. За побудовою справедливі співвідношення

$$\int_0^T ||u(\tau)||^p \, d\tau =$$

$$= \int_0^T \| C(T-\tau)v(\tau) \|^p \, d\tau + \hat{\gamma} \left[\int_0^{t_*} \alpha^* (T, \tau, v(\tau), z_0) \, d\tau + \int_{t_*}^T \alpha_* (T, \tau, z_0) \, d\tau \right] \le$$

$$\le \nu^p \mathrm{X}^p + \hat{\gamma} = \mu^p .$$

Для випадку $\xi(T) \in M$ достатньо застосувати теорему 1.

З доведення теореми 2 випливає, що переслідувач у момент t використовує інформацію про $v_t(\cdot)$, яка потрібна лише для визначення моменту перемикання t_*, що розділяє на два інтервали. На самих інтервалах переслідувач застосовує контркерування, яке визначається стробоскопічною стратегією. З доведення теореми 3 випливає, що для реалізації гарантованого часу теореми 2 можна обмежитися контркеруванням.

Покладемо $\inf\limits_{v \in R^k} \alpha^* (t, \tau, v, z_0) = \alpha^* (t, \tau, z_0)$.

Умова 4. Для деякого додатного числа Θ на множині Δ_Θ виконана умова 2 та справедливе включення

$$0 \in \bigcap_{v \in R^k} \{ [W(t, \tau, v, \alpha^* (t, \tau, z_0)) - \gamma(t, \tau)] - \alpha^* (t, \tau, z_0)[M - \xi(t)] \}.$$

Теорема 3. Нехай виконана умова 1 і для деякого додатного числа Θ на множині Δ_Θ виконано умови 3 і 4, множина M є опуклою, множина $T(z_0)$ не є порожньою та $T \in T(z_0)$. Тоді траєкторія конфліктно-керованого процесу (1)–(3) з початкового положення $z_0 \in R^n$ може бути приведена на термінальну множину (4) в момент T з використанням допустимого керування вигляду (6).

Доведення. Нехай $v(\cdot)$ — довільне допустиме керування втікача, для якого виконується обмеження (3).

Розглянемо спочатку випадок $\xi(T) \notin M$ і введемо контрольну функцію

$$h(t) = 1 - \int_0^t \alpha^* (T, \tau, z_0) d\tau - \int_t^T \alpha_* (T, \tau, z_0) d\tau, \quad t \in [0, T].$$

Згідно з лемою 2 функції $\alpha^* (T, \tau, z_0)$ і $\alpha_* (T, \tau, z_0)$ є вимірними за $\tau \in [0, T]$.

За визначенням T та умовами теореми з урахуванням леми 2 маємо

$$h(0) = 1 - \int_0^T \alpha_* (T, \tau, z_0) d\tau > 0 , \; h(T) = 1 - \int_0^T \alpha^* (T, \tau, z_0) d\tau \le 0 .$$

Внаслідок неперервності функції $h(t)$ існує такий момент часу t_*, $t_* \in (0, T]$, що $h(t_*) = 0$. Зауважимо, що момент перемикання t_* не залежить від передісторії керування другого гравця $v_{t_*}(\cdot) = \{ v(s) : s \in [0, t_*] \}$.

Розглянемо багатозначні відображення для $v \in R^k$, $\tau \in [0, T]$:

$$U^* (\tau, v) = \left\{ \begin{array}{l} u \in R_r^m : \| u \| = (|| C(T-\tau)v \|^p + \alpha^* (T, \tau, z_0)\hat{\gamma})^{\frac{1}{p}}, \\ \pi e^{(T-\tau)A} Bu - \pi e^{(T-\tau)A} Cv \in \alpha^* (T, \tau, z_0)[M - \xi(T)] \end{array} \right\}, \qquad (13)$$

$$0 \le \tau \le t_* ,$$

$$U_*(\tau, \upsilon) = \left\{ \begin{array}{l} u \in R_r^m : \| u \| = (\| C(T-\tau)\upsilon \|^p + \alpha_*(T, \tau, z_0)\hat{\gamma})^{\frac{1}{p}}, \\ \pi e^{(T-\tau)A} Bu - \pi e^{(T-\tau)A} C\upsilon \in \alpha_*(T, \tau, z_0)[M - \xi(T)] \end{array} \right\}, \qquad (14)$$

$$t_* < \tau \le T.$$

З урахуванням властивостей параметрів процесу (1), верхньої $\alpha^*(T, \tau, z_0)$ і нижньої $\alpha_*(T, \tau, z_0)$ розв'язувальних функцій відображення $U^*(\tau, \upsilon)$ і $U_*(\tau, \upsilon)$ є $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірними [6] і компактнозначними для $\upsilon \in R^k$, $\tau \in [0, T]$. За теоремою про вимірний вибір селектора [14] багатозначні відображення $U^*(\tau, \upsilon)$ і $U_*(\tau, \upsilon)$ містять $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірні селектори $u^*(\tau, \upsilon)$ і $u_*(\tau, \upsilon)$, які є суперпозиційно вимірними функціями [6] і тому для $\tau \in [0, T]$ функції $u^*(\tau, \upsilon(\tau))$ і $u_*(\tau, \upsilon(\tau))$ є вимірними. До того ж маємо

$$\| u^*(\tau, \upsilon(\tau)) \| = (\| C(T-\tau)\upsilon(\tau) \|^p + \alpha^*(T, \tau, z_0)\hat{\gamma})^{\frac{1}{p}}, \; 0 \le \tau \le t_*,$$

$$\| u_*(\tau, \upsilon(\tau)) \| = (\| C(T-\tau)\upsilon(\tau) \|^p + \alpha_*(T, \tau, z_0)\hat{\gamma})^{\frac{1}{p}}, \; t_* < \tau \le T.$$

Покладемо керування першого гравця таким, що дорівнює

$$u(\tau) = u^*(\tau, \upsilon(\tau)), \; 0 \le \tau \le t_*, \; u(\tau) = u_*(\tau, \upsilon(\tau)), \; t_* < \tau \le T.$$

З формули Коші для процесу (1) для визначених керувань маємо

$$\pi z(T) = \xi(T) + \int_0^T \pi e^{(T-\tau)A} [Bu(\tau) - C\upsilon(\tau)] d\tau. \qquad (15)$$

Тоді з урахуванням співвідношень (13)–(15) і леми 1 отримаємо

$$\pi z(T) \in \xi(T) + \int_0^{t_*} \alpha^*(T, \tau, z_0)[M - \xi(T)] \, d\tau + \int_{t_*}^T \alpha_*(T, \tau, z_0)[M - \xi(T)] d\tau =$$

$$= \xi(T) \left[1 - \int_0^{t_*} \alpha^*(T, \tau, z_0) \, d\tau - \int_{t_*}^T \alpha_*(T, \tau, z_0) \, d\tau \right] +$$

$$+ \int_0^{t_*} \alpha^*(T, \tau, z_0) M d\tau + \int_{t_*}^T \alpha_*(T, \tau, z_0) M d\tau =$$

$$= \left[\int_0^{t_*} \alpha^*(T, \tau, z_0) \, d\tau + \int_{t_*}^T \alpha_*(T, \tau, z_0) \, d\tau \right] M = M.$$

Отже, $z(T) \in M^*$ і залишилося показати допустимість керування $u(\tau) = u(\tau, \upsilon(\tau))$, $\tau \in [0, T]$. За побудовою справедливі співвідношення

$$\int_0^T \| u(\tau) \|^p \, d\tau = \int_0^T \| C(T-\tau)\upsilon(\tau) \|^p \, d\tau + \hat{\gamma} \left[\int_0^{t_*} \alpha^*(T, \tau, z_0) \, d\tau + \int_{t_*}^T \alpha_*(T, \tau, z_0) d\tau \right] \le$$

$$\le \nu^p \mathrm{X}^p + \hat{\gamma} = \mu^p.$$

Для випадку $\xi(T) \in M$ достатньо застосувати теорему 1.

Нехай у просторі R^{2n}, $n \geq 2$, рух об'єктів керування задано рівняннями

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= -az_2 + u - v. \end{aligned} \tag{16}$$

Тут $a > 0$, $z_1, z_2, v \in R^n$, $u \in R_r^n$, $R_r^n = \{u \in R^n : u \notin \operatorname{int} S^r\}$, $\operatorname{int} S^r$ — внутрішність кулі S^r радіуса r; $S^r \subset R^n$, $r > 0$. Керування $u = u(\cdot)$ і $v = v(\cdot)$ вибирають у вигляді вимірних функцій із простору $L_2[0, \infty)$ та задовольняють обмеження вигляду (2) і (3) відповідно для $p = 2$. Покладемо

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in R^{2n}, \ A = \begin{pmatrix} 0 & E \\ 0 & -aE \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix},$$

де 0 і E — нульова і одинична матриці розміру $n \times n$ відповідно.

Термінальна множина $M^* = \{z : z_1 = 0\}$, причому $M_0 = \{z : z_1 = 0\}$, $M = \{z : z_1 = z_2 = 0\}$. Тоді $L = \{z : z_2 = 0\} = \{R^n, 0\}$. Оператор ортогонального проєктування $\pi : R^{2n} \to L$ задано матрицею $\pi := \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Оператор π виокремлює із вектора z його першу компоненту, $\pi z = z_1$. Фундаментальна матриця однорідної системи (16) e^{At} має вигляд $e^{At} = \begin{pmatrix} E & \varphi(t)E \\ 0 & e^{-at}E \end{pmatrix}$, де $\varphi(t) = \dfrac{1 - e^{-at}}{a}$. Тому отримаємо

$$\pi e^{At} C = \varphi(t) E, \ \chi^2(t) = \sup_{\int_0^t \|\omega(\tau)\|^2 d\tau \leq 1} \int_0^t \varphi^2(t - \tau) \|\omega(\tau)\|^2 \, d\tau, \ 0 \leq \tau \leq t.$$

З урахуванням неперервності функції $\varphi(t - \tau)$ за τ, $0 \leq \tau \leq t$, маємо [1]

$$\mathrm{X}^2 = \sup_{0 \leq t < \infty} \ \sup_{0 \leq \tau \leq t} \chi^2(t - \tau) = \max\{1 / a^2, 1\}.$$

Стосовно гри (16) умова 1 має вигляд $\mu > \nu \max\{1 / a, 1\}$.

Багатозначне відображення $W(t, \tau, v, \alpha)$ для гри (16) має вигляд

$$W(t, \tau, v, \alpha) = \varphi(t - \tau)[[\|v\|^2 + \alpha \hat{\gamma}]^{\frac{1}{2}} S_r^1 - v],$$

де $0 \leq \tau \leq t$, $\hat{\gamma} = \mu^2 - \nu^2 \max\{1 / a^2, 1\}$, $v \in R^n$, $S_r^1 \subset R^n$ — кільце з центром в нулі, зовнішнім радіусом 1 і внутрішнім радіусом r, $1 \geq r \geq 0$.

Покладемо $\xi(t) = \pi e^{At} z = z_1 + \varphi(t) z_2$. Тоді багатозначне відображення $\mathfrak{A}(t, \tau, v)$ має вигляд

$$\mathfrak{A}(t, \tau, v) = \left\{ \alpha > 0 : -\alpha \xi(t) + \varphi(t - \tau) v \in \varphi(t - \tau)[\|v\|^2 + \alpha \hat{\gamma}]^{\frac{1}{2}} S_r^1 \right\} \neq \varnothing, \tag{17}$$

$$0 \leq \tau \leq t, \ v \in R^n.$$

Верхня розв'язувальна функція визначається із співвідношення

$$\alpha^*(t,\tau,v)=\sup\left\{\alpha>0: -\alpha\xi(t)+\varphi(t-\tau)v\in\varphi(t-\tau)[\|v\|^2+\alpha\hat{\gamma}]^{\frac{1}{2}}S_r^1\right\},\ v\in R^n.$$

Нехай $\xi(t)\neq 0$. Тоді справедлива формула

$$\alpha^*(t,\tau,v)=\frac{\varphi(t-\tau)}{\|\xi(t)\|^2}\max\{0,\hat{\gamma}\varphi(t-\tau)+2(v,\xi(t))\},\ v\in R^n.$$

До того ж

$$\min_{v\in R^n}\alpha^*(t,\tau,v)=\frac{\varphi(t-\tau)}{\|\xi(t)\|}\max\{0,\hat{\gamma}\varphi(t-\tau)-2\|v\|\}$$

і мінімум досягається на векторі $v^*(\tau)=-\|v^*(\tau)\|\dfrac{\xi(t)}{\|\xi(t)\|}$, $\int\limits_0^{\infty}\|v^*(\tau)\|^2\,d\tau\leq \nu^2$.

Визначимо час завершення гри:

$$T=\min\left\{t\geq 0:\int_0^t\min_{v\in R^n}\alpha^*(t,\tau,v)\,d\tau=1\right\}.$$

Отже, час T — це найменший додатний корінь рівняння

$$\|\xi(t)\|=\int_0^t\varphi(t-\tau)\max\{0,\hat{\gamma}\varphi(t-\tau)-2\|v(\tau)\|\}d\tau. \tag{18}$$

Якщо $\xi(t)=0$, то $t\geq T$. Дійсно, $\xi(0)=z_1$, $\|z_1\|>0$, а оскільки ліва і права частини рівняння (18) залежать від t неперервно, рівності $\xi(t)=0$ передуватиме рівність (18). Далі припускаємо, що $\xi(t)\neq 0$.

Рівняння (18) за будь-якого z має скінченний додатний корінь, оскільки для $t=0$ ліва частина рівняння більша за праву, для $t\to+\infty$ ліва частина обмежена, а права частина з урахуванням обмеження (3) і визначення функції $\chi^2(t)$ монотонно зростає.

Для $v\in R^n$ нижня розв'язувальна функція визначається зі співвідношення

$$\alpha_*(t,\tau,v)=\inf\left\{\alpha>0:\ -\alpha\xi(t)+\varphi(t-\tau)\ v\in\varphi(t-\tau)[\|v\|^2+\alpha\hat{\gamma}]^{\frac{1}{2}}S_r^1\right\}.$$

При цьому для $v\in S_0^r$ маємо

$$\alpha_*(t,\tau,v)=\alpha_*^r(t,\tau,v)=\sup\left\{\alpha>0:-\alpha\xi(t)+\varphi(t-\tau)v\in\varphi(t-\tau)[\|v\|^2+\alpha\hat{\gamma}]^{\frac{1}{2}}S_0^1\right\}=$$

$$=\frac{\varphi(t-\tau)}{\|\xi(t)\|^2}\max\{0,\hat{\gamma}\varphi(t-\tau)+2(v,\xi(t))\}.$$

Оскільки для $v\in R_r^n$ справедливе включення

$$0\in W(t,\tau,v,\alpha)=\varphi(t-\tau)[[\|v\|^2+\alpha\hat{\gamma}]^{\frac{1}{2}}S_r^1-v],$$

то для $v\in R_r^n$ маємо $\alpha_*(t,\tau,v)=\max\limits_{v\in S_r^1}\alpha_*(t,\tau,v)=0$.

Отже, для $\upsilon \in R^n$ виконується рівність $\alpha_*(t,\tau,\upsilon) = \alpha_*^r(t,\tau,\upsilon)$ і разом з тим отримаємо

$$\max_{\upsilon\in R^n} \alpha_*(t,\tau,\upsilon) = \max_{\upsilon\in R^n} \alpha_*^r(t,\tau,\upsilon) = \frac{\varphi(t-\tau)}{\|\xi(t)\|} \max\{0, \hat{\gamma}\varphi(t-\tau)+2r\}$$

і максимум досягається на векторі $\upsilon_* = r\dfrac{\xi(t)}{\|\xi(t)\|}$.

Виберемо параметри гри (16) таким чином, щоб з урахуванням обмеження (3) виконувалась нерівність

$$\int_0^T \max_{\upsilon\in S_0^1} \alpha_*(T,\tau,\upsilon)\, d\tau < \int_0^T \min_{\upsilon\in S_0^1} \alpha^*(T,\tau,\upsilon)\, d\tau = 1,$$

яка разом із співвідношенням (17) доводитиме, що виконана умова 2.

За побудовою для всіх $\upsilon \in R^n$ справедливе включення

$$-\alpha_*(t,\tau,\upsilon)\xi(t) + \varphi(t-\tau)\upsilon \in r\varphi(t-\tau)[\|\upsilon\|^2 + \alpha_*(t,\tau,\upsilon)\hat{\gamma}]^{\frac{1}{2}} S_0^1.$$

Тому маємо

$$-\max_{\upsilon\in R^n} \alpha_*(t,\tau,\upsilon)\xi(t) + \varphi(t-\tau)\upsilon_* \in r\varphi(t-\tau)[\|\upsilon_*\|^2 + \max_{\upsilon\in R^n} \alpha_*(t,\tau,\upsilon)\hat{\gamma}]^{\frac{1}{2}} S_0^1.$$

Отже, справедлива умова 3.

Перевіримо справедливість умови 4. За побудовою для всіх $\upsilon \in R^n$ справедливе включення

$$-\alpha^*(t,\tau,\upsilon)\xi(t) + \varphi(t-\tau)\upsilon \in \varphi(t-\tau)[\|\upsilon\|^2 + \alpha^*(t,\tau,\upsilon)\hat{\gamma}]^{\frac{1}{2}} S_r^1.$$

Тому маємо

$$-\min_{\upsilon\in R^n} \alpha^*(t,\tau,\upsilon)\xi(t) + \varphi(t-\tau)\upsilon^* \in \varphi(t-\tau)[\|\upsilon^*\|^2 + \min_{\upsilon\in R^n} \alpha^*(t,\tau,\upsilon)\hat{\gamma}]^{\frac{1}{2}} S_r^1.$$

Отже, справедлива умова 4.

ВИСНОВКИ

У роботі розглядаються лінійні диференціальні ігри з інтегральними обмеженнями. Уведено багатозначні відображення, що породжують верхні і нижні розв’язувальні функції спеціального типу і отримано достатні умови гарантованого результату для лінійної диференціальної гри з інтегральними обмеженнями на керування у випадку, коли умова Нікольського [1] не має місця. Запропоновано модифіковані схеми прямого методу Нікольського та методу розв’язувальних функцій, що забезпечують завершення гри за скінченний гарантований час в класі квазістратегій та стробоскопічних стратегій. Теоретичні результати проілюстровано на контрольному прикладі Понтрягіна з однотипними об’єктами.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Никольский М.С. Прямой метод в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями. *Управляемые системы*. 1969. Вип. 2. С. 49–59.
2. Чикрий А.А., Безмагорычный В.В. Метод разрешающих функций в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями. *Автоматика*. 1993. № 4. С. 26–36.
3. Чикрий А.А., Белоусов А.А. О линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями сближения. *Труды ИММ УрО РАН*. 2009. Т.15, № 4. С. 290–301.
4. Саматов Б.Т. О задачах группового преследования при интегральных ограничениях на управления. I. *Кибернетика и системный анализ*. 2013. Т. 49, № 5. С. 132–145.
5. Chikrii A.A. Conflict controlled processes. Boston; London; Dordrecht: Springer Science and Business Media, 2013. 424 p.
6. Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Метод разрешающих функций в теории конфликтно-управляемых процессов. *Кибернетика и системный анализ*. 2012. Т. 48, № 5. С. 40–64.
7. Раппопорт И.С. Метод разрешающих функций для игровых задач управления с интегральными ограничениями. *Кибернетика и системный анализ*. 2018. Т. 54, № 5. С. 109–127.
8. Чикрій А.О., Раппопорт Й.С. Модифікації умови Понтрягіна у проблемі зближення конфліктно-керованих об'єктів. *Кібернетика та системний аналіз*. 2022. Т. 58, № 6. С. 95–105.
9. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. Москва: Наука, 1974. 455 с.
10. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. Т. 2. Москва: Наука, 1988. 576 с.
11. Никольский М.С. Первый прямой метод Л.С. Понтрягина в дифференциальных играх. Москва: Изд-во МГУ, 1984. 65 с.
12. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. Москва: Мир, 1973. 470 с.
13. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-valued analysis. Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 1990. 461 p.
14. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. Москва: Наука, 1974. 480 с.

A.A Chikrii, I.S. Rappoport

A MODIFIED METHOD OF RESOLVING FUNCTIONS FOR CONTROL GAME PROBLEMS WITH INTEGRAL CONSTRAINTS

Abstract. The paper considers linear differential games with integral constraints. Sufficient conditions for the game termination in a finite guaranteed time are formulated for the case where Nikolsky's condition is not satisfied. Multivalued mappings that generate the upper and lower resolving functions of special type are introduced. The modified schemes of Nikolsky's direct method and the method of resolving functions are proposed, which ensure the game termination in a finite guaranteed time in the class of quasi-strategies and stroboscopic strategies. The most recent theoretical results are illustrated by the reference Pontryagin's example with objects of the same type.

Keywords: linear differential game, integral constraints, multivalued mapping, resolving functions, stroboscopic strategy.

Надійшла до редакції 07.12.2022