УДК 519.21

Я.М. ЧАБАНЮК
Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна,
e-mail: *yaroslav.chabanyuk@lnu.edu.ua*;
Університет «Люблінська політехніка», Люблін, Польща,
e-mail: *y.chabanyuk@pollub.pl*.

А.В. НІКІТІН
Національний університет «Острозька академія», Острог, Україна,
e-mail: *anatolii.nikitin@oa.edu.ua;*
Університет імені Яна Кохановського в Кельцах, Кельце, Польща,
e-mail: *anatolii.nikitin@ujk.edu.pl*.

У.Т. ХІМКА
Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна,
e-mail: *ulyana.khimka@lnu.edu.ua*.

УСЕРЕДНЕННЯ В ЗАДАЧІ КЕРУВАННЯ ДЛЯ ДИФУЗІЙНОГО ПРОЦЕСУ ПЕРЕНОСУ З НАПІВМАРКОВСЬКИМИ ПЕРЕМИКАННЯМИ

Анотація. Побудовано граничні генератори для системи стохастичних диференціальних рівнянь з напівмарковськими перемиканнями та дифузійним збуренням в умовах існування єдиної точки рівноваги крітерію якості. Розв'язано дворівневу задачу за припущення існування єдиного керування на кожному інтервалі. Досліджено залежність поведінки граничного процесу від дограничного нормування стохастичної системи в ергодичному напівмарковському середовищі.

Ключові слова: випадкова еволюція, стохастична оптимізація, напівмарковські перемикання.

ВСТУП

Випадкові еволюції є ефективним інструментом для моделювання реальних процесів. Наприклад, моделювання випадкового середовища за допомогою напівмарковських процесів дає змогу досліджувати широкий спектр практичних застосувань, зокрема, у вивченні динаміки населення та транспортних моделей, економіці, системах масового обслуговування (наприклад, [1]) тощо. Поведінка випадкових еволюцій, які є розв'язками стохастичних рінянь з використанням апроксимаційних схем і марковськими перемиканнями, є добре вивченою, тоді як про більш загальні, напівмарковські перемикання, інформації бракує.

Встановлення збіжності процедури стохастичної оптимізації є важливим кроком у системному аналізі невизначеностей, які можна моделювати за допомогою ергодичного напівмарковського середовища. Про актуальність визначення нових властивостей і узагальнень алгоритмів оптимізації, які використовують випадковість у процесі пошуку оптимуму, свідчать численні застосування в теорії керування, теорії передачі інформації, а також для розв'язання непараметричних задач математичної статистики.

У цій статті розглядається еволюційна модель керування з малим параметром нормалізації. Встановлення достатніх умов збіжності вихідної задачі до граничного процесу здійснюється за допомогою модельних теорем Королюка [2, 3]. З урахуванням досліджень, розпочатих у [4–10], вивчається еволюційна система у вигляді збуреної керованої системи — дифузійного процесу із напівмарковським перемиканням за умови існування єдиної точки екстремуму функції керування.

Зазначимо, що основним апаратом для побудови граничного генератора задачі керування є метод малого параметра. Класифікацію задач застосування малого параметра в умовах усереднення та дифузії наведено в [3]. У задачах керування з використанням процедури стохастичної оптимізації [11] метод усереднення вперше використано для задач із напівмарковським перемиканням.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай дифузійний процес переносу $y(t) \in R^d$ заданий стохастичним еволюційним рівнянням [2, 12]

$$dy(t) = a(y(t), x(t))\,dt + \sigma(y(t),\, x(t), u(t))\,dW(t), \tag{1}$$

де $W(t)$ — процес Вінера, $x(t),\ t \ge 0,$ — напівмарковський процес на стандартному фазовому просторі (X, X), який визначено з допомогою напівмарковського ядра [2, 3]

$$Q(t, x, B) = P(x, B)\,G_x(t). \tag{2}$$

У формулі (2) стохастичне ядро має вигляд $P(x, B) = P\{x_{n+1} \in B \,|\, x_n = x\}$, $B \in \mathrm{X}$, причому воно описує вкладений ланцюг Маркова $x_n := x(\tau_n)$ у моменти відновлення $\tau_n = \sum_{k=1}^{n} \theta_k,\ n \ge 0,\ \tau_0 = 0,$ та в інтервалах $\theta_{k+1} = \tau_{k+1} - \tau_k$ між моментами відновлення τ_n. Величини інтервалів θ_n визначаються функцією розподілу

$$G_x(t) = P\{\theta_{n+1} \le t \,|\, x_n = x\} =: P\{\theta_x \le t\}.$$

Далі використовуватимемо такі властивості функції розподілу $G_x(t)$:

$$\overline{G}_x(t) = 1 - G_x(t),\ \overline{G}_x^{(2)}(s) = \int_s^\infty \overline{G}_x(t)\,dt,\ g(x) = \int_0^\infty \overline{G}_x(t)\,dt.$$

Таким чином, напівмарковський процес $x(t),\ t \ge 0,$ може бути визначений відношенням $x(t) = x_{\nu(t)},\ t \ge 0,$ де лічильний процес $\nu(t) := \max\{n \ge 1 : \tau_n \le t\}$, $t \ge 0$.

Покладемо далі, що напівмарковський процес $x(t),\ t \ge 0,$ є регулярним, тобто $P\{\nu(t) < \infty\} = 1$ [13] та рівномірно ергодичним зі стаціонарним розподілом

$$\pi(B) := \lim_{t \to \infty} P\{x(t) \in B\} = \int_B \rho(dx) \frac{g(x)}{q},\ B \in \mathrm{X},$$

де $\rho(B),\ B \in \mathrm{X},$ є стаціонарним розоділом вкладеного ланцюга Маркова x_n, $n \ge 0$ [3], і для кожного середнього часу перебування процесу в стані x є обмеження $g(x) \le C < +\infty$.

Генератор асоційованого марковського процесу $x_0(t)$ для процесу $x(t)$ має вигляд [3]

$$\mathbf{Q} = q(x)[\mathbf{P} - I],$$

де $q(x) = 1/g(x)$, $\mathbf{P}\varphi(x) = \int_X P(x, dz)\varphi(z)$, $g = \int_X \pi(dx)\,g(x)$, $q = 1/g$.

Визначимо $\mathbf{R}_0$ як потенціальний оператор для генератора $\mathbf{Q}$ співвідношенням [3]: $\mathbf{R}_0 = \Pi - (\Pi + \mathbf{Q})^{-1}$, де Π — проєктор на підпростір нулів генератора $\mathbf{Q}$ [3]. Припустимо також виконання умов для функції $a(y, x), \sigma(y, x, u), x \in X$:

$$a(y, \cdot) \in C^1(R),\ \sigma(y, \cdot, u) \in C^{1,1}(R \times R). \tag{A1}$$

Умова (A1) гарантує існування глобального розв'язку для еволюційних рівнянь

$$dy_x(t) = a\,(y_x(t), x)\,dt + \sigma\,(y_x(t),\; x, u_x(t))\,dW(t)$$

для кожного значення напівмарковського процесу $x(t),\ t \ge 0,$ тобто для $x = x(t),\ t \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$.

Нехай функкія керування $u(t)$ для процесу (1) оцінюється критерієм якості, описаним функцією $G(y, x, u)$ з єдиною точкою рівноваги на кожному інтервалі $[\tau_k, \tau_{k+1}]$.

Маємо керування для розв'язку рівняння

$$\frac{\partial G^*(y,x,u)}{\partial u} = 0, \tag{3}$$

коли умова

$$G(\cdot\,,\cdot\,,u) \in C^1(R) \tag{A2}$$

задовольняється.

Задача керування (1), (3) у схемі усереднення з малим параметром ε має вигляд [4, 10]

$$dy^{\varepsilon}(t) = a(y^{\varepsilon}(t),\, x(t/\varepsilon))\,dt + \sigma(y^{\varepsilon}(t),\, x(t/\varepsilon),\, u^{\varepsilon}(t))\,dW(t), \tag{4}$$

і функція керування $u^{\varepsilon}(t)$ визначається процедурою стохастичної апроксимації [9]

$$du^{\varepsilon}(t) = \alpha(t)\nabla_{\beta(t)} G(y^{\varepsilon}(t),\, x(t/\varepsilon),\, u^{\varepsilon}(t)), \tag{5}$$

де

$$\nabla_{\beta(t)} G(\cdot\,,\cdot\,,u) = \frac{(G(\cdot\,,\cdot\,,u+\beta(t)) - G(\cdot\,,\cdot\,,u-\beta(t)))}{2\beta(t)}.$$

Початкові умови для задачі (4), (5) мають вигляд

$$y(0) = y_0\,,\ x(0) = x_0\,,\ u(0) = u_0\,. \tag{6}$$

Припускаємо також, що функції $\alpha(t),\ \beta(t),\ t \ge 0,$ задовольняють умову $\alpha(t) \to 0,\ \beta(t) \to 0$ для $t \to \infty$.

ГОЛОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Метою досліджень є втановлення вигляду граничного генератора для процесу переносу і задачі керування (4)–(6) для $\varepsilon \to 0$.

Теорема 1. Нехай виконуються умови (A1), (A2) для задачі керування (4), (5), а також такі умови:

$$\alpha(t) \to 0,\ \beta(t) \to 0 \in C^1(R),\ \left|\frac{\alpha(t+\varepsilon s)}{\beta(t+\varepsilon s)}\right| \le C_3 < +\infty, \left(\left|\frac{\alpha(z)}{\beta(z)}\right|\right)'_{z=t+\varepsilon s} \le C_4; \tag{P1}$$

$$G(y,x,u) \in C^{1,0,1}(R, X, R); \tag{P2}$$

$$\text{умова Крамера } \sup_{x\in X} \int_0^{\infty} e^{lt}\overline{G}_x(t)\,dt \le K < +\infty,\ l > 0. \tag{P3}$$

Тоді справедливою є слабка збіжність

$$(y^{\varepsilon}(t), u^{\varepsilon}(t)) \Rightarrow (\hat{y}(t), \hat{u}(t)),\ \varepsilon \to 0. \tag{7}$$

Генератор граничного процесу $(\hat{y}(t), \hat{u}(t))$ на тестових функціях $\varphi(y,u) \in C^{4,2}(R)$ має вигляд

$$\mathbf{L}\varphi(y,u)=\mathbf{D}_y\varphi(y,u)+\mathbf{D}_{u,t}\varphi(y,u),$$

де

$$\mathbf{D}_y\varphi(y,u)=a(y)\varphi'_y(y,u)+\frac{1}{2}\sigma^2(y,u)\varphi''_{yy}(y,u),$$

$$\mathbf{D}_{u,t}\varphi(y,u)=\alpha(t)\nabla_{\beta(t)}G(y,u)\varphi'_u(y,u),$$

$$a(y)=\int_X\pi(dx)\,a(x,y),\ \ \sigma^2(y,u)=\int_X\pi(dx)\,\sigma^2(y,x,u),\quad G(y,u)=\int_X\pi(dx)G(y,x,u).$$

Наслідок 1. Усереднена задача керування для процесу $(\hat{y}(t),\hat{u}(t))$ визначається із системи

$$d\hat{y}(t)=a(\hat{y}(t))\,dt+\sigma(\hat{y}(t),\hat{u}(t))\,dW(t),$$

$$d\hat{u}(t)=\alpha(t)\nabla_{\beta(t)}G(\hat{y}(t),\hat{u}(t))\,dt.$$

Розглянемо розширений процес марковського відновлення (РПМВ) для задачі (4)–(6):

$$y_n^\varepsilon=y^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon),u_n^\varepsilon=u^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon),\tau_n^\varepsilon=\varepsilon\tau_n. \tag{8}$$

Означення 1. Компенсуючий оператор для РПМВ (8) визначається зі співвідношення

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon(x)\varphi(y,x,u,t)=\varepsilon^{-1}[\mathbf{E}\{\varphi(y_{n+1}^\varepsilon,x_{n+1}^\varepsilon,u_{n+1}^\varepsilon,\tau_{n+1}^\varepsilon)|\,y_n^\varepsilon=y,$$

$$x_n^\varepsilon=x,\ \ u_n^\varepsilon=u,\ \ \tau_n^\varepsilon=t\}-\varphi(y,x,u,t)]\,/\,g(x),$$

де

$$\varphi(y,x,u,t)\in C^{2,0,2,0}(R,X,R,R_+).$$

Далі розглянемо множину неоднорідних напівгруп $\mathbf{C}_{t+\varepsilon s}^t(x), t\ge 0,\ x\in X$, для задачі (4)–(6), які на тестових функціях $\varphi(y,u)\in C^{2,2}(R\times R)$ мають представлення

$$\mathbf{C}_{t+s}^t(x)\varphi(y,u)=\varphi(y_x(t+s),u_x(t+s)), \tag{9}$$

де $y_x(t)=y,\ u_x(t)=u.$ Тоді згідно з (6) маємо $y_x(0)=y_0,\ u_x(0)=u_0$. Таким чином, для $y_x(t,y):=y_x(t),\ u_x(t,y):=u_x(t)$ маємо

$$y_x(t+s,y):=y_x(s,y_x(t,y));\qquad u_x(t+s,y):=u_x(s,u_x(t,u)).$$

Лема 1. Компенсуючий оператор $\mathbf{L}_t^\varepsilon(x)$ на тестових функціях $\varphi(y,x,u)$ має представлення

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon(x)\varphi(y,x,u)=$$

$$=\varepsilon^{-1}q(x)\left\{\int_0^\infty G_x(ds)\mathbf{C}_{t+\varepsilon s}^t(x)\int_X P(x,dz)\varphi(y,z,u)-\varphi(y,x,u)\right\}, \tag{10}$$

де $q(x)=1/g(x)$.

Доведення. У точці (y_1, u_1) маємо

$$\mathbf{E}\varphi(y_t, x, u_t) = \mathbf{E}\mathbf{C}^t_{t+\theta_{x_0}}\varphi(y,x,u) = \int_0^\infty G_x(ds)\mathbf{C}^t_{t+s}(x)\int_X P(x, dz)\varphi(y,z,u),$$

звідки випливає (10).

Лема 2. Компенсуючий оператор $\mathbf{L}^\varepsilon_t(x)$ має представлення

$$\mathbf{L}^\varepsilon_t(x)\varphi(y,x,u) = \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(y,x,u) + \varepsilon^{-1}\int_0^\infty G_x(ds)[\mathbf{D}^{t,y}_{t+\varepsilon s}(x) - I]\mathbf{Q}_0\varphi(y,x,u) +$$

$$+\varepsilon^{-1}\int_0^\infty G_x(ds)[\mathbf{D}^{t,u}_{t+\varepsilon s}(x) - I]\mathbf{Q}_0\varphi(y,x,u), \tag{11}$$

$$\mathbf{Q}_0\varphi(x) = q(x)\mathbf{P}\varphi(x),$$

де множина напівгруп $\mathbf{D}^{t,y}_{t+s}(x)$ має генератор $\mathbf{D}_y(x)$ такий, що виконується співвідношення

$$d\mathbf{D}^{t,y}_{t+s}(x) = \mathbf{D}_y(x)\mathbf{D}^{t,y}_{t+s}(x)ds, \tag{12}$$

і множина напівгруп $\mathbf{D}^{t,u}_{t+s}(x)$ має генератор $\mathbf{D}_{u,t+s}(x)$ такий, що виконується сіввідношення

$$d\mathbf{D}^{t,u}_{t+s}(x) = \mathbf{D}_{u,t+s}(x)\mathbf{D}^{t,u}_{t+s}(x)ds. \tag{13}$$

За виконання наведених умов (А1) та (Р1) для $\varphi(y) \in C^2(R)$ матимемо представлення

$$\mathbf{D}_y(x)\varphi(y) = a(y,x)\varphi'(y) + \frac{1}{2}\sigma^2(y,x,u)\varphi''(y), \tag{14}$$

і для $\varphi(y) \in C^1(R)$ матимемо представлення

$$\mathbf{D}_{u,t}(x)\varphi(u) = \alpha(t)\nabla_{\beta(t)}G(y,x,u)\varphi'(u). \tag{15}$$

Доведення. Насамперед зауважимо, що згідно з (10) отримуємо

$$\mathbf{L}^\varepsilon_t(x)\varphi(y,x,u) =$$

$$= \varepsilon^{-1}q(x)\left[\int_0^\infty G_x(ds)\int_X P(x,dz) \times [\mathbf{C}^t_{t+\varepsilon s}(x)\varphi(y(t+\varepsilon s), z, u(t+\varepsilon s)) - \varphi(y,z,u)]\right] =$$

$$= \varepsilon^{-1}q(x)\int_0^\infty G_x(ds)\int_X P(x,dz)\mathbf{C}^t_{t+\varepsilon s}(x)(\varphi(y(t+\varepsilon s), z, u(t+\varepsilon s)) - \varphi(y,z,u)) +$$

$$+\varepsilon^{-1}q(x)\int_0^\infty G_x(ds)\int_X P(x,dz)(\varphi(y,z,u) - \varphi(y,x,u)) =$$

$$= \varepsilon^{-1}q(x)\mathbf{Q}\varphi(y,x,u) + \varepsilon^{-1}\int_0^\infty G_x(ds)[\mathbf{C}^{t(x)}_{t+\varepsilon s}\varphi(y(t+\varepsilon s), z, u(t+\varepsilon s)) -$$

$$-\mathbf{C}_{t+\varepsilon s}^{t(x)}(x)\varphi(y,z,u(t+\varepsilon s))]\mathbf{Q}_0 +$$

$$+\varepsilon^{-1}\int_0^\infty G_x(ds)[\mathbf{C}_{t+\varepsilon s}^{t(x)}(x)\varphi(y,z,u(t+\varepsilon s))-\mathbf{C}_{t+\varepsilon s}^{t(x)}(x)\varphi(y,z,u)]\mathbf{Q}_0,$$

звідки маємо (11).

Лема 3. Компенсуючий оператор (11) на просторі Банаха $B(R,X,R)$ дійснозначних функцій $\varphi(y,x,u)\in C^{2,0,1}(R\times X\times R)$ має вигляд

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon(x)\varphi=\varepsilon^{-1}\,\mathbf{Q}\varphi+\theta_1^*(x)\varphi, \tag{16}$$

де

$$\theta_1^*(x)=\mathbf{D}_y(x)\int_0^\infty \overline{G}_x(s)\mathbf{D}_{t+\varepsilon s}^{t,y}(x)ds\mathbf{Q}_0+\int_0^\infty \overline{G}_x(s)\mathbf{D}_{u,t+\varepsilon s}(x)\mathbf{D}_{t+\varepsilon s}^{t,u}(x)ds\mathbf{Q}_0. \tag{17}$$

Також маємо розклад

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon(x)\varphi(y,x,u)=\varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(y,x,u)+\mathbf{D}_y(x)g(x)\mathbf{Q}_0\,\varphi(y,x,u)+$$

$$+g(x)\mathbf{D}_{u,t}(x)\mathbf{Q}_0\,\varphi(y,x,u)+\varepsilon\,\theta_2(x)\mathbf{Q}_0\,\varphi(y,x,u), \tag{18}$$

де

$$\theta_2(x)=(\mathbf{D}_y(x))^2\mathbf{G}_{t,2}^\varepsilon(x)+\theta_2^*(x),\ \ \mathbf{G}_{t,2}^\varepsilon(x)=\int_0^\infty \overline{G}_x^2(s)\mathbf{D}_{t+\varepsilon s}^{t,y}(x)ds;$$

$$\theta_2^*(x)=(\mathbf{D}_{u,t}(x))^2\int_0^\infty \overline{G}_x(s)\mathbf{D}_{t+\varepsilon s}^{u}(x)ds+\mathbf{D}_{u,t}(x)\int_0^\infty \overline{G}_x(s)\theta_1^*(x,s)\mathbf{D}_{t+\varepsilon s}^{u}(x)ds.$$

Тут

$$\theta_1^*(x,s)=s\alpha'(t)\nabla_{\beta(t+\varepsilon s)}G(y,x,u)+$$

$$+\frac{\alpha(t)\beta'(t)s}{2\beta(t+\varepsilon s)}[G_u'(y,x,u+\beta(t))+G_u'(y,x,u-\beta(t))-2G_u'(y,x,u)]+o(\varepsilon).$$

Доведення. Спочатку обчислимо асимптотику для другого і третього доданків із (11). Для другого доданка з урахуванням (12) і (13) інтегруванням частинами отримуємо

$$\varepsilon^{-1}\int_0^\infty G_x(ds)[\mathbf{D}_{t+\varepsilon s}^{t,y}(x)-I]=\begin{bmatrix} u=\mathbf{D}_{t+\varepsilon s}^{t,y}(x)-I & dv=G_x(ds)\\ du=\varepsilon\,\mathbf{D}_y(x)\mathbf{D}_{t+\varepsilon s}^{t,y}(x)ds & v=-\overline{G}_x(s)\end{bmatrix}=$$

$$=\varepsilon^{-1}[-\overline{G}_x(s)(\mathbf{D}_{t+\varepsilon s}^{t,y}(x)-I)|_0^\infty+\varepsilon\int_0^\infty \overline{G}_x(s)[\mathbf{D}_y(x)\mathbf{D}_{t+\varepsilon s}^{t,y}(x)]ds=$$

$$=\mathbf{D}_y(x)\int_0^\infty \overline{G}_x(s)\mathbf{D}_{t+\varepsilon s}^{t,y}(x)ds. \tag{19}$$

З урахуванням умови Крамера (Р3) із теореми 1 для третього доданка маємо

$$\varepsilon^{-1}\int_0^\infty G_x(ds)[\mathbf{D}^{t,u}_{t+\varepsilon s}(x)-I]=\begin{bmatrix} u=\mathbf{D}^{t,u}_{t+\varepsilon s}(x)-I & dv=G_x(ds)\\ du=\varepsilon\,\mathbf{D}_u(x)\,\mathbf{D}^{t,u}_{t+\varepsilon s}(x)\,ds & v=-\overline{G}_x(s)\end{bmatrix}=$$

$$=\int_0^\infty \overline{G}_x(s)\,\mathbf{D}_{u,t+\varepsilon s}(x)\,\mathbf{D}^{t,u}_{t+\varepsilon s}(x)\,ds. \qquad (20)$$

Отже, враховуючи (17), (19) та (20), для (11) отримуємо представлення (16).

Далі дослідимо перетворення для інтеграла в (19)

$$\mathbf{G}^{\varepsilon}_{t,1}(x)=\int_0^\infty \overline{G}_x(ds)\,\mathbf{D}^{t,y}_{t+\varepsilon s}(x)\,ds=\begin{bmatrix} u=\mathbf{D}^{t,y}_{t+\varepsilon s}(x) & dv=\overline{G}_x(s)\\ du=\varepsilon\,\mathbf{D}_y(x)\,\mathbf{D}^{t,y}_{t+\varepsilon s}(x)\,ds & v=-\overline{G}^{(2)}_x(s)\end{bmatrix}=$$

$$=-\overline{G}^{(2)}_x(s)\,\mathbf{D}^{t,y}_{t+\varepsilon s}(x)\big|_0^\infty+\varepsilon\,\mathbf{D}_y(x)\int_0^\infty \overline{G}^{(2)}_x(s)\,\mathbf{D}^{t,y}_{t+\varepsilon s}(x)\,ds=$$

$$=g(x)I+\varepsilon\,\mathbf{D}_y(x)\mathbf{G}^{\varepsilon}_{t,2}(x). \qquad (21)$$

Таким чином, маємо представлення для (20)

$$\int_0^\infty \overline{G}_x(s)\,\mathbf{D}_{u,t+\varepsilon s}(x)\,\mathbf{D}^{u}_{t+\varepsilon s}(x)\,ds=\mathbf{D}_{u,t}(x)\int_0^\infty \overline{G}_x(s)\,\mathbf{D}^{u}_{t+\varepsilon s}(x)\,ds+$$

$$+\varepsilon\int_0^\infty \overline{G}_x(s)\,\theta_1^*(x,s)\mathbf{D}^{u}_{t+\varepsilon s}(x)\,ds. \qquad (22)$$

Для першого доданка в (22) маємо

$$\int_0^\infty \overline{G}_x(s)\,\mathbf{D}^{u}_{t+\varepsilon s}(x)\,ds=\begin{bmatrix} u=\mathbf{D}^{u}_{t+\varepsilon s}(x) & dv=\overline{G}_x(ds)\\ du=\varepsilon\,\mathbf{D}_{u,t+\varepsilon s}(x)\,\mathbf{D}^{u}_{t+\varepsilon s}(x)\,ds & v=-\overline{G}^{(2)}_x(s)\end{bmatrix}=$$

$$=-\overline{G}^{(2)}_x(s)\,\mathbf{D}^{u}_{t+\varepsilon s}(x)\big|_0^\infty+\varepsilon\int_0^\infty \mathbf{D}_{u,t+\varepsilon s}(x)\,\mathbf{D}^{u}_{t+\varepsilon s}(x)\overline{G}^{(2)}_x(s)\,ds+$$

$$+\varepsilon\int_0^\infty \mathbf{D}^{u}_{t+\varepsilon s}(x)\overline{G}^{(2)}_x(s)\,ds=g(x)I+\mathbf{D}_{u,t}(x)\int_0^\infty \mathbf{D}^{u}_{t+\varepsilon s}(x)\overline{G}^{(2)}_x(s)\,ds+$$

$$+\varepsilon^2\int_0^\infty \mathbf{D}^{u}_{t+\varepsilon s}(x)\overline{G}^{(2)}_x(s)\,\theta_1^*(x,s)\,ds. \qquad (23)$$

Враховуючи (22) і (23), отримуємо для (20)

$$\int_0^\infty \mathbf{D}_{u,t+\varepsilon s}(x)\,\mathbf{D}^{u}_{t+\varepsilon s}(x)\,\overline{G}^{(2)}_x(s)\,ds=$$

$$=g(x)\mathbf{D}_{u,t}(x)+\varepsilon\,(\mathbf{D}_{u,t}(x))^2\int_0^\infty \mathbf{D}^{u}_{t+\varepsilon s}(x)\,\overline{G}^{(2)}_x(s)\,ds+$$

$$+\varepsilon^2\mathbf{D}_{u,t}(x)\int_0^\infty \mathbf{D}^{u}_{t+\varepsilon s}(x)\,\overline{G}^{(2)}_x(s)\,\theta_1^*(x,s)\,ds$$

або

$$\int_0^\infty \overline{G}_x(s)\,\mathbf{D}_{u,\,t+\varepsilon s}(x)\mathbf{D}^{u}_{t+\varepsilon s}(x)\,ds=g(x)\,\mathbf{D}_{u,t}(x)+\varepsilon\,(\mathbf{D}_{u,t}(x))^2\,\theta_2^*(x),$$

де

$$\theta_2^*(x) = (\mathbf{D}_{u,t}(x))^2 \int_0^\infty \overline{G}_x^{(2)}(s)\mathbf{D}_{t+\varepsilon s}^u(x)\,ds +$$

$$+\,\varepsilon\,\mathbf{D}_{u,t}(x)\int_0^\infty \overline{G}_x^{(2)}(s)\theta_1^*(x,s)\mathbf{D}_{t+\varepsilon s}^u(x)\,ds. \qquad (24)$$

Співвідношення (21) та (24) дають можливість отримати розклад для $\theta_1^*(x)$ у вигляді

$$\theta_1^*(x) = \mathbf{D}_y(x) + \beta(t)\,\mathbf{D}_{u,t}(x) + \theta_2(x), \qquad (25)$$

де $\theta_2(x) = (\mathbf{D}_y(x))^2\,\mathbf{G}_{t,2}(x) + \theta_2^*(x)$.

Для закінчення доведення теореми встановимо розв'язки задачі сингулярного збурення для компенсуючого оператора (16), (18) на збуреній тестовій функції

$$\varphi^\varepsilon(y,x,u) = \varphi(y,u) + \varepsilon\,\varphi_1(y,x,u). \qquad (26)$$

Лема 4. Генератор $\mathbf{L}_t^\varepsilon(x)$ на збуреній тестовій функції (26) має граничне представлення

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(y,x,u) = \mathbf{D}_y\varphi(y,u) + \mathbf{D}_{u,t}\varphi(y,u) + \varepsilon\,\theta_L(x)\varphi(y,u), \qquad (27)$$

де

$$\mathbf{D}_y\varphi(y,u) = a(y)\varphi'(u)(y,u) + \frac{1}{2}\sigma^2(y,u)\varphi''(u), \qquad (28)$$

$$a(y) = \int_X \pi(dx)\,a(x,y),\ \ \sigma^2(y,u) = \int_X \pi(dx)\,\sigma^2(y,x,u),$$

$$\mathbf{D}_{u,t}\varphi(u) = \alpha(t)\nabla_{\beta(t)}G(y,u), \qquad (29)$$

$$\theta_L(x)\varphi(y,u) = \theta_2(x)\varphi(y,u) + \theta_1^*(x)\widetilde{\mathbf{L}}_t(y,x,u)\varphi(y,u), \qquad (30)$$

$$\widetilde{\mathbf{L}}_t(y,x,u) = \mathbf{L}_t(y,x,u) - \mathbf{L}_t(y,u),\ \ \mathbf{L}_t(y,x,u) = \mathbf{D}_y(x) + \mathbf{D}_{y,t}(x),$$

$$\mathbf{L}_t(y,u) = \mathbf{D}_y + \mathbf{D}_{u,t}.$$

Доведення. Розвинемо оператор $\mathbf{L}_t^\varepsilon(x)$ на тестовій функції $\varphi^\varepsilon(y,x,u)$, використовуючи (16) та (18)

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(y,x,u) = [\varepsilon^{-1}\mathbf{Q} + \mathbf{D}_y(x)g(x)\mathbf{Q}_0 + g(x)\mathbf{D}_{u,t}(x)\mathbf{Q}_0 +$$

$$+\,\varepsilon\,\mathbf{Q}_2(x)]\varphi(y,u) + \varepsilon^{-1}\,\mathbf{Q} + \theta_1^*(x)]\varepsilon\,\varphi_1(y,x,u) =$$

$$= \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(y,u) + [\mathbf{D}_y(x)g(x)\mathbf{Q}_0\,\varphi(y,u) + g(x)\mathbf{D}_{u,t}(x)\mathbf{Q}_0\,\varphi(y,u) + \mathbf{Q}\varphi_1(y,x,u)] +$$

$$+\,\varepsilon[\theta_2(x)\varphi(y,u) + \theta_1(x)\varphi_1(y,x,u)] =$$

$$= \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(y,u) + [\mathbf{D}_y(x)\mathrm{P}\varphi(y,u) + \mathbf{D}_{u,t}(x)\mathrm{P}\varphi(y,u) +$$

$$+\,\mathbf{Q}\varphi_1(y,x,u)] + \varepsilon\,\theta_L^\varepsilon(x),$$

де

$$\theta_L(x) = \theta_2(x)\varphi(y,u) + \theta_1^*(x)\varphi_1(y,x,u). \qquad (31)$$

Розглянемо отримані компоненти окремо. Оскільки $\varphi(y,u)$ не залежить від $x\in X$, то $\mathbf{Q}(x)\,\varphi(y,u)=0$. Знайдемо $\varphi_1(y,x,u)$, розв'язавши проблему сингулярного збурення

$$\mathbf{Q}(x)\varphi_1(y,x,u)+[\mathbf{D}_y(x)+\mathbf{D}_{u,t}(x)]\varphi(y,u)=\mathbf{L}_t(y,u)\varphi(y,u), \tag{32}$$

де

$$\mathbf{L}_t(y,u)=\Pi\,\mathbf{L}_t(y,x,u)\,\Pi,\ \ \mathbf{L}_t(y,x,u)=\mathbf{D}_y(x)+\mathbf{D}_{u,t}(x).$$

Скориставшись властивостями $\mathbf{Q}$ і $\mathbf{R}_0$, отримаємо

$$\varphi_1(y,x,u)=\mathbf{R}_0\widetilde{\mathbf{L}}_t(y,x,u)\varphi(y,u), \tag{33}$$

де

$$\widetilde{\mathbf{L}}_t(y,x,u)=\mathbf{L}_t(y,x,u)-\mathbf{L}_t(y,u). \tag{34}$$

Враховуючи (33), остаточно отримуємо представлення залишкового члена $\theta_L^{\varepsilon}(x)$ у (31):

$$\theta_L^{\varepsilon}(x)=\theta_2(x)\varphi(y,u)+\theta_1^*(x)\,\hat{\mathbf{L}}_t(y,x,u)\varphi(y,u). \tag{35}$$

Далі обчислимо представлення в (32):

$$\mathbf{L}_t(y,u)\varphi(y,u)=[\Pi\,\mathbf{D}_y(x)\,\Pi+\Pi\mathbf{D}_{u,t}(x)\,\Pi]\varphi(y,u)=[\mathbf{D}_y+\mathbf{D}_{u,t}]\varphi(y,u),$$

де

$$\mathbf{D}_y\varphi(y)=\int_X\pi(dx)[a(y,x)\varphi'(y)+\frac{1}{2}\sigma^2(y,x,u)\varphi''(y)]=$$

$$=a(y)\varphi'(y)+\frac{1}{2}\sigma^2(y,u)\varphi''(y),$$

$$\mathbf{D}_{u,t}\,\varphi(u)=\alpha(t)\nabla_{\beta(t)}G(y,u)\varphi'(u).$$

З останньої рівності та (35) випливає (27).

Доведення теореми 1. Твердження теореми випливає з модельної теореми Королюка [3] для компенсуючого оператор $\mathbf{L}_t^{\varepsilon}(x)$ вигляду (27).

Ключовою умовою є обмеженість залишкового члена $\theta_L(x)$ (35). Обчислимо праву частину (35), а потім оцінимо першу компоненту, а саме

$$(\mathbf{D}_y(x))^2\,\mathbf{G}_{t,2}^{\varepsilon}(x)\varphi(y,u).$$

Зауважимо, що оператор $\mathbf{G}_{t,2}^{\varepsilon}(x)$ за виконання умови Крамера для функції розподілу $G_x(t),\ t\ge 0$, є рівномірно обмеженим для $x\in X$ і напівгрупа $\mathbf{D}_{t+\varepsilon s}^{t,y}(x)$ є також рівномірно обмеженою на X для $\varphi(y,x,u)\in C^{4,0,2}(R\times X\times R)$. Далі подіємо оператором $(\mathbf{D}_y(x))^2$ на функцію $\varphi(y,u)$. Використовуючи (14), маємо

$$\mathbf{D}_y(x)[a(y,x)\varphi'(y)+\frac{1}{2}\sigma^2(y,x,u)\varphi''(y)]=$$

$$=a(y,x)[a(y,x)\varphi'(y)+\frac{1}{2}\sigma^2(y,x,u)\varphi''(y)]'_y+$$

$$+\frac{1}{2}\sigma^2(y,x,u)[a(y,x)\varphi'(y)+\frac{1}{2}\sigma^2(y,x,u)\varphi''(y)]''_{yy}.$$

З останнього співвідношення маємо рівномірну обмеженість для першого доданка для $a(y,x) \in C^{2,0}(R \times X)$

$$|(\mathbf{D}_y(x))^2 \, \mathbf{G}^{\varepsilon}_{t,2}(x)\varphi(y,u)| \le C_1 < +\infty \quad \forall x \in X\,. \tag{36}$$

Аналогічно можна показати, що для (25) маємо

$$|\theta^*_2(x)\varphi(y,u)| \le C_2 < +\infty \quad \forall x \in X \tag{37}$$

за виконання умов (P1) і (P2) теореми 1. Відповідно, враховуючи (36) і (37), маємо

$$|\theta_2(x)\varphi(y,u)| \le C_4 < +\infty \quad \forall x \in X \tag{38}$$

за умов, накладених на функції $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $G(y,x,u)$.

Враховуючи виконання умов (P1) та (P2), отримуємо згідно з (25) оцінки

$$|\theta_1(x)\varphi(y,u)| \le C_5 < +\infty \quad \forall x \in X\,, \tag{39}$$

$$|\widetilde{\mathbf{L}}_t(y,x,u)\varphi(y,u)| \le C_6 < +\infty \quad \forall x \in X\,. \tag{40}$$

Отже, використовуючи (35), (38)–(40), одержуємо рівномірну обмеженість залишкового члена $\theta^{\varepsilon}_L(x)$:

$$|\theta^{\varepsilon}_L(x)\varphi(y,u)| \le C_7 < +\infty \quad \forall x \in X\,. \tag{41}$$

Далі повернемось до модельної теореми Королюка [3], а саме до виконання умов цієї теореми: C1, C2, C3, C4 ([3], стор. 197). Виконання умови C1 детально розглянуто в [2]. Умова C2 виконується згідно з представленням $\varphi^{\varepsilon}(y,x,u)$. Враховуючи (41), отримуємо умову C3. Виконання умови C4 випливає з постановки задачі. Таким чином, отримуємо твердження теореми 1.

Теорема 2. Нехай виконано умови (A1), (A2), (P1), (P3) для задачі керування (4), (5). Крім цього, функція Ляпунова $V(y,u)$ рівняння

$$\frac{du}{dt} = G'_u(y,u) \tag{42}$$

задовольняє умову експоненційної стійкості

$$G'_u(y,u)V'_u(y,u) < -cV(y,u), \quad c > 0, \tag{C1}$$

та умову

$$|\nabla_{\beta(t)} G(y,x,u)\,\mathbf{R}_0[\nabla_{\beta(t)}\widetilde{G}(y,x,u)V'_u(y,u)]'_u| \le c_1(1+V(y,u)). \tag{C2}$$

Припустимо додаково виконання умов Ліпшиця

$$|\nabla_{\beta(t)} G(y,x,u) - G'_u(y,u)| \le c_2\beta(t), \; c_2 > 0, \tag{L}$$

та

$$\int_{t_0}^{\infty} \alpha(t)\,dt = \infty, \; \int_{t_0}^{\infty} \alpha(t)\beta(t)\,dt < \infty, \; t_0 > 0, \tag{F}$$

для $\alpha(t)$ та $\beta(t)$. Тоді для кожного достатньо малого ε для розв’язання задачі керування (5), (6) і довільного значення процесу y виконується

$$\mathrm{P}\{\lim_{\varepsilon \to 0} u^{\varepsilon}(t) = u(y)\} = 1.$$

Доведення. Розглянемо генератор $\mathbf{D}_{u,t}(x)$ у вигляді (15) на збуреній функції Ляпунова

$$V^{\varepsilon}(y,x,u)=V(y,u)+\varepsilon V_1(y,x,u).$$

Розв'язання проблеми сингулярного збурення в схемі леми 4 дає граничне представлення

$$\mathbf{D}^{\varepsilon}_{u,t}(x)V^{\varepsilon}(y,x,u)=\mathbf{D}_{u,t}V(y,u)+\varepsilon\,\theta_2(x)\mathbf{R}_0\widetilde{\mathbf{D}}^{\varepsilon}_{u,t}(y,x,u)V(y,u), \tag{43}$$

де $\widetilde{\mathbf{D}}^{\varepsilon}_{u,t}(y,x,u)=\mathbf{D}^{\varepsilon}_{u,t}(x)-\mathbf{D}_{u,t}$.

Враховуючи умови (С1), (С2), (L) теореми 2, отримуємо оцінки для (43)

$$\mathbf{D}^{\varepsilon}_{u,t}(x)V(y,u)\le -c_0\alpha(t)V(y,u)+\alpha(t)\,\beta(t)\,c^*(1+V(y,u)).$$

Крайня нерівність і умова (F) дає можливість застосувати теорему Невельсона–Хасьмінського [11] і цим доведення теореми 2 завершене.

Наслідок 1. Теорема 2 визначає алгоритм задачі керування (1), (3), а саме: для кожного значення процесу y і для кожного стану напівмарковського процесу x знаходимо керування в умовах стохастичної оптимізації (5).

ВИСНОВКИ

Головним результатом дослідження є теорема 1, в якій встановлено слабку збіжність еволюційної системи у вигляді дифузійного процесу в умовах випадкового середовища — напівмарковського процесу, а також вигляд граничного генератора. На відміну від випадкового середовища у вигляді марковського процесу, застосовано інші техніки, які ґрунтуються на використанні асимптотичних властивостей компенсуючого оператора. Крім того, з'являється можливість застосування цих технік до еволюційної системи з імпульсними збуреннями у некласичних схемах апроксимації. Отримані результати є черговим важливим кроком розвитку теорії випадкових еволюцій з використанням випадкового середовища та схем апроксимації.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Anisimov V.V. Switching Processes in Gueuing Models. London: Wiley-ISTE, 2008. 352 p.
2. Korolyuk V.S., Korolyuk V.V. Stochastic Models of Systems. Kluwer, Dordrecht, 1999.
3. Korolyuk V.S., Limnios N. Stochastic Systems in Merging Phase Space. World Scientific, 2005.
4. Chabanyuk Y.M., Nikitin A.V., Khimka U.T. Asymptotic properties of the impulse perturbation process with control function under Levy approximation conditions. *Mathematychni Studii*. 2019. Vol. 52, N 1. P. 96–104. https://doi.org/10.30970/ms.52.1.96-104.
5. Nikitin A.V., Khimka U.T. Asymptotics of normalized control with Markov switchings. *Ukrainian Mathematical Journal.* 2017. Vol. 68, N 8. P. 1252–1262. https://doi.org/10.1007/s11253-017-1291-0.
6. Nikitin A.V. Asymptotic properties of a stochastic diffusion transfer process with an equilibrium point of a quality criterion. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2015. Vol. 51, N 4. P. 650–656. https://doi.org/10.1007/s10559-015-9756-3.

7. Nikitin A.V. Asymptotic dissipativity of stochastic processes with impulsive perturbation in the Levy approximation scheme. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2018. Vol. 50, Iss. 4. P. 54–63. https://doi.org/10.1615/jautomatinfscien.v50.i4.50.
8. Samoilenko I.V., Chabanyuk Y.M., Nikitin A.V. Asymptotic dissipativity of random processes with impulse perturbation in the Poisson approximation scheme. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. Vol. 54, N 2. P. 205–211. https://doi.org/10.1007/s10559-018-0021-4.
9. Khimka U.T., Chabanyuk Ya.M. A difference stochastic optimization procedure with impulse perturbation. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2013. Vol. 49, N 5. P. 768–773. https://doi.org/10.1007/s10559-013-9564-6.
10. Chabanyuk Y., Nikitin A., Khimka U. Asymptotic Analyses for Complex Evolutionary Systems with Markov and Semi-Markov Switching Using Approximation Schemes. Wiley Online Library, London, 2020. 240 p. https://doi.org/10.1002/9781119779759.
11. Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З. Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. Москва: Наука, 1972. 304 с.
12. Jacod J., Shiryaev A.N. Limit Theorems for Stochastic Processes. Berlin; Heidelberg: Springer Link, 2003. P. 664. https://doi.org/10.1007/978-3-662-05265-5.
13. Papanicolaou G., Stroock D., Varadhan S.R.S. Martingale approach to some limit theorems. *Duke turbulence conference (Durham, NC, April 23–25, 1976)*. Duke University Mathematics Series III, New York: Duke University, 1977. 120 p.

Y.M. Chabanyuk, A.V. Nikitin, U.T. Khimka

AVERAGING IN THE CONTROL PROBLEM FOR THE DIFFUISON TRANSFER PROCESS WITH SEMI-MARKOV SWITCHES

Abstract. The limit generators were constructed for the system of stochastic differential equations with semi-Markov switches and diffusion perturbance under the conditions of the existence of a single equilibrium point of the performance criterion. Assuming the existence of a single control on each interval, we solve a two-level problem. The article examines how the behavior of the limit process depends on the pre-limit normalization of the stochastic system in the ergodic semi-Markov environment.

Keywords: random evolution, stochastic optimization, semi-Markov switches.

Надійшла до редакції 20.02.2023