УДК 519.8

Ю.І. ХАРКЕВИЧ
Волинський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна,
e-mail: *kharkevich.juriy@gmail.com.*

О.Г. ХАНІН
Волинський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна,
e-mail: *aleks.hanin@gmail.com.*

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ НА УЗАГАЛЬНЕНИХ КЛАСАХ ГЕЛЬДЕРА

Анотація. Досліджено деякі асимптотичні властивості розв'язків диференціальних рівнянь еліптичного типу з використанням методів теорії наближень. Розглянуто апроксимаційні характеристики операторів типу Пуассона як розв'язків диференціальних рівнянь вищих порядків на узагальнених класах Гельдера в рівномірній метриці. Розв'язано задачу Колмогорова–Нікольського (у термінології О.І. Степанця) про знаходження верхньої межі відхилень функцій, визначених за допомогою модуля неперервності, від операторів Абеля–Пуассона та Гаусса–Вейєрштрасса в метриці простору C. Згадані оператори є одним з ефективних інструментів дослідження математичних моделей, які виникають під час розв'язання багатьох прикладних оптимізаційних задач.

Ключові слова: оптимізаційні властивості функцій, апроксимаційні характеристики, задача Колмогорова–Нікольського, оператор Абеля–Пуассона, оператор Гаусса–Вейєрштрасса, класи Гельдера.

ВСТУП

З нагоди 100-річчя з дня народження Віктора Михайловича Глушкова — вченого, якого в 1996 р. згідно з рішенням комп'ютерного товариства IEEE було офіційно визнано піонером інформаційних технологій, очільника наукової школи кібернетики та засновника Інституту кібернетики АН УРСР, не можна не згадати його засадничого вкладу в створення та поширення автоматизованих систем керування технологічними процесами (АСК ТП). Але, як зазначав академік Глушков, створення АСК невід'ємне від постановки та розв'язання задач оптимізації. На його думку, під час розв'язання задач керування на електронних обчислювальних машинах особливе місце посідають проблеми оптимізації. Він вважав, що в процесі оптимізації потрібно вибирати такий варіант керування, за якого досягається мінімальне або максимальне значення деякого критерію, що характеризує якість керування [1]. У подальшому роботи в галузі методів оптимізації активно проводилися в Інституті кібернетики учнями академіка Глушкова (Ю.М. Єрмольєвим, В.С. Михалевичем, Б.М. Пшеничним, І.В. Сергієнко, А.О. Чикрієм, В.В. Шкурбою, Н.З. Шором та ін.), що зумовило створення української школи методів оптимізації, яка була визнана не лише на вітчизняних теренах, а й науковцями інших країн.

У широкому колі прикладних оптимізаційних задач як математичні моделі виникають системи диференціальних рівнянь вищих порядків [2–4]. У запропонованій роботі розглянуто проблему використання гладкісних характеристик функцій для розв'язання таких задач. Особливо це стосується випадку, коли потрібно досліджувати асимптотичні властивості розв'язків диференціальних рівнянь вищих порядків [5–8]. Так, під час знаходження похибки відхилення побудованої математичної моделі від реального досліджуваного процесу доводиться оперувати асимптотичними оцінками, які не завжди дають бажаний результат. Як один із можливих варіантів для усунення таких неточностей під час знаходження похибок пропонується використовувати гладкісні характеристики функцій.

Отже, якщо функція φ має більшу кількість похідних, ніж функція h, то вважають, що функція φ є більш гладкою, ніж функція h. У випадку, коли дві неперервні функції: φ і h, або взагалі не мають похідних, або мають однакову їхню кількість, то для порівняння ступеня їхньої гладкості користуються спеціальними характеристиками цих функцій, які називають «модулями неперервності» [9, с. 147]. І відповідно вважають, що з двох функцій більш гладкою є та, модуль неперервності якої швидше прямує до нуля. Зазначимо, що поняття модуля неперервності ввів А. Лебег ще на початку XX ст. І, незважаючи на більш ніж столітню історію існування, це поняття не лише не втратило своєї первісної вагомості, але й стало ще більш значущим для розв'язання задач варіаційного числення та методів оптимізації, задач теорії керування, ігрових задач динаміки [10–12] тощо. Мабуть, це зумовлено тим, що класи функцій, які визначають за допомогою модулів неперервності, є специфічним математичним апаратом, потрібним для розв'язання багатьох нагальних проблем сьогодення. Зокрема, актуальними в нинішніх умовах є дослідження апроксимативних властивостей розв'язків диференціальних рівнянь вищих порядків на класах функцій, що визначаються за допомогою модуля неперервності. Так, оператори, які є розв'язками диференціальних рівнянь вищих порядків еліптичного типу [13–16], мають важливе значення для розв'язання багатьох задач математичного моделювання [17–20].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо в одиничному крузі крайову задачу для рівняння

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+(-1)^{\gamma+1}\,\frac{1}{r^2}\frac{\partial^{2\gamma} V}{\partial \theta}=0, \tag{1}$$

в якому $0\le r<1$, $0\le\theta\le 2\pi$, γ — натуральне число, а функція $V(\theta, r)$ є обмеженою в одиничному крузі $\Omega=\{0\le r<1,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$ і

$$V(\theta, r)|_{r=1}=\varphi(\theta), \tag{2}$$

причому функція $\varphi(\theta)$ з правої частини (2) є 2π-періодичною.

Зазначимо, що для $\gamma=1$ оператор у лівій частині (1) є ніщо інше як оператор Лапласа [21, 22]. Використовуючи метод Фур'є відокремлених змінних і враховуючи умову (2), отримуємо формальний розв'язок задачі (1), (2) у вигляді оператора

$$V_\gamma(\theta,\varphi,r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(z+\theta)Q_\gamma(r,z)dz, \tag{3}$$

де

$$Q_\gamma(r,z)=1+2\sum_{k=1}^{\infty}r^{k^\gamma}\cos kz. \tag{4}$$

Нехай далі $\omega(t)$ — деяка функція, яка є модулем неперервності першого порядку [9, с.157]. Тоді H^ω — клас всіх неперервних функцій φ [9, с.157], для кожної з яких

$$\omega(\varphi,t)\le\omega(t). \tag{5}$$

Такий клас функцій називатимемо узагальненим класом Гельдера.

Якщо $\varphi(\theta)$ — неперервна 2π-періодична функція, тобто $\varphi(\theta)\in C$, з нормою $||\varphi||=\max\limits_{0\le\theta\le 2\pi}|\varphi(\theta)|$, то, аналогічно до [22–24], позначимо

$$\mathcal{E}(V_\gamma(r),H^\omega)_C=\sup_{\varphi\in H^\omega}||V_\gamma(\cdot,\varphi,r)-\varphi(\cdot)||_C. \tag{6}$$

Таким чином, основним завданням запропонованої роботи є знаходження асимптотичних оцінок [25–27] для величин (6) у метриці простору C. Інакше кажучи, шукатимемо асимптотичні оцінки верхніх граней відхилень функцій узагальненого класу Гельдера H^{ω} від оператора, заданого за допомогою співвідношень (3), (4), і який своєю чергою є розв'язком диференціального рівняння (1), (2) у рівномірній метриці.

НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ КЛАСУ H^{ω} ОПЕРАТОРАМИ, ЯКІ Є РОЗВ'ЯЗКАМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Для того щоб отримати якісніші асимптотичні оцінки для величини (6), аналогічно до [28], у формулах (3) та (4) зробимо заміну змінної

$$\delta = -\frac{1}{\ln r} \tag{7}$$

для всіх $0 < r < 1$. Унаслідок чого оператор (3), який є розв'язком диференціального рівняння (1), (2), набере вигляду

$$V_\gamma(\theta, \varphi, \delta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(z+\theta) Q_\gamma(\delta, z)\, dz, \tag{8}$$

де

$$Q_\gamma(\delta, z) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^\gamma/\delta} \cos kz \tag{9}$$

є його ядром. І відповідно до позначення (6), (7) шукатимемо асимптотичну оцінку для величини

$$\mathcal{E}(V_\gamma(\delta), H^{\omega})_C = \sup_{\varphi \in H^{\omega}} \|V_\gamma(\cdot, \varphi, \delta) - \varphi(\cdot)\|_C. \tag{10}$$

Покажемо, що матиме місце теорема.

Теорема 1. Якщо $\omega(z)$ — довільний фіксований модуль неперервності, то для всіх $\delta > 0$ буде справедлива рівність

$$\mathcal{E}(V_\gamma(\delta), H^{\omega})_C = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty}\int_0^{\pi} e^{-u^\gamma/\delta} \omega(z) \left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \cos 2\pi k u\right) \cos uz\, du\, dz. \tag{11}$$

Доведення. Оскільки згідно з (9)

$$\int_0^{2\pi} Q_\gamma(\delta, z)\, dz = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^\gamma/\delta} \cos kz\right) dz = \pi,$$

враховуючи (8), отримуємо

$$V_\gamma(\theta, \varphi, \delta) - \varphi(\theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\varphi(\theta+z) - \varphi(\theta)) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^\gamma/\delta} \cos kz\right) dz. \tag{12}$$

Оскільки клас H^{ω} — це множина всіх функцій, кожна з яких належить класу H^{ω}, то разом з функцією $\varphi(\theta) \in H^{\omega}$ розглянемо ще й функцію $\varphi_1(\theta) = \varphi(\theta + z)$. Тоді очевидно буде виконуватись рівність $V_\gamma(0; \varphi; \delta) - \varphi_1(0) = V_\gamma(\theta; \varphi; \delta) - \varphi(\theta)$.

Згідно з поняттям модуля неперервності першого порядку матимемо, що функція вигляду

$$\omega(\varphi; z)_X = \sup_{0 \le h \le z} \|\varphi(\theta + h) - \varphi(\theta)\|_X \le \sup_{0 \le h \le z} \varphi(h) = \varphi(z)$$

є модулем неперервності в деякому просторі X. А тому матимемо, що розглянуті функції $\varphi_1(\theta)$ і $\varphi(\theta)$ одночасно належатимуть класу H^{ω}. Отже, на основі співвідношення (10) можемо записати рівність

$$\mathcal{E}(V_{\gamma}(\delta), H^{\omega})_C = \sup_{\varphi\in H^{\omega}} ||V_{\gamma}(0;\varphi;\delta) - \varphi(0)||_C. \tag{13}$$

Далі, якщо розглянути функцію $\varphi_2(\theta) = \varphi(\theta) - \varphi(0)$ для всіх функцій $\varphi(\cdot)$ з класу H^{ω}, то очевидно, що функція $\varphi_2(\theta)$ також належатиме класу H^{ω}, причому обов'язково $\varphi_2(0) = 0$. Звідси зробимо висновок, що $V_{\gamma}(0;\varphi;\delta) = V_{\gamma}(0;\varphi;\delta) - \varphi(0)$.

Саме тому із формул (10), (12), (13) випливає рівність

$$\mathcal{E}(V_{\gamma}(\delta), H^{\omega})_C = \sup_{\varphi\in H^{\omega}} \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi} \varphi(z)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^{\gamma}/\delta} \cos kz)\right) dz\right|. \tag{14}$$

Унаслідок парності ядра $Q_{\gamma}(\delta; z)$, заданого за допомогою співвідношення (9), у своїх міркуваннях обмежимось лише випадком парних функцій $\varphi(\cdot)$. Таким чином, із (14) і 2π-періодичності функції $\varphi(\cdot)$ отримаємо

$$\mathcal{E}(V_{\gamma}(\delta), H^{\omega})_C = \sup_{\varphi\in H} \frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\pi} \varphi(z)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^{\gamma}/\delta} \cos kz\right) dz\right|, \tag{15}$$

де H — це множина парних 2π-періодичних функцій $\varphi \in H^{\omega}$ таких, що $\varphi(0) = 0$. Водночас маємо, що якою б не була функція $\varphi \in H$, згідно з (5) буде справедлива нерівність

$$\left|\int_0^{\pi} \varphi(\theta)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^{\gamma}/\delta} \cos kz\right) dz\right| \le \int_0^{\pi} \omega(z)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^{\gamma}/\delta} \cos kz\right) dz. \tag{16}$$

Оскільки $Q_{\gamma}(\delta, z) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^{\gamma}/\delta} \cos kz \ge 0$ і для функції $\varphi_0(\theta)$ з класу H $\varphi_0(z) = \omega(|z|)$ для всіх $|z| \le \pi$, очевидно

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi_0(z)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^{\gamma}/\delta} \cos kz\right) dz = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \omega(z)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^{\gamma}/\delta} \cos kz\right) dz. \tag{17}$$

Отже, об'єднавши співвідношення (15)–(17), отримаємо рівність

$$\mathcal{E}(V_{\gamma}(\delta), H^{\omega})_C = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \omega(z)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^{\gamma}/\delta} \cos kz\right) dz. \tag{18}$$

І насамкінець, для завершення доведення теореми запишемо ядро (9) оператора (8) (який є розв'язком диференціального рівняння (1), (2)) у вигляді

$$Q_{\gamma}(\delta, z) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^{\gamma}/\delta} \cos kz = \frac{1}{2} f_{\gamma,\delta}(0) + \sum_{k=1}^{\infty} f_{\gamma,\delta}(k), \tag{19}$$

де відповідно $f_{\gamma,\delta}(k) := e^{-k^{\gamma}/\delta} \cos kz$. Застосувавши до правої частини (19) формулу підсумовування Пуассона [29], отримаємо, що

$$Q_{\gamma}(\delta, z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(F_{\gamma,\delta}(0) + 2\sum_{k=1}^{\infty} F_{\gamma,\delta}(2\pi k)\right), \tag{20}$$

де $F_{\gamma,\delta}(v)$ — косинус перетворення Фур'є функції $f_{\gamma,\delta}(v)$, тобто

$$F_{\gamma,\delta}(v)=\int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} f_{\gamma,\delta}(u)\cos uv\,du=\int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-\delta^\gamma/\delta}\cos uz\cos uv\,du. \qquad (21)$$

Із (20) і (21) випливає, що

$$Q_\gamma(\delta,z)=\int_0^\infty e^{-\delta^\gamma/\delta}\cos uz\,du+2\sum_{k=1}^\infty \int_0^\infty e^{-\delta^\gamma/\delta}\cos uz\cos 2\pi ku\,du. \qquad (22)$$

Тож, підставляючи (22) у (18), отримуємо рівність (11).

Теорему доведено.

Зауваження 1. Проаналізуємо детальніше оператор $V_\gamma(\theta,\varphi,\delta)$, заданий за допомогою співвідношень (8) і (9), який відповідно є розв'язком диференціального рівняння вищого порядку (1), (2). Так, в окремих випадках цей оператор перетворюється в оператор типу Пуассона [30]. А саме для $\gamma=1$ матимемо оператор Абеля–Пуассона [31]

$$V_1(\theta,\varphi,\delta):=A(\theta,\varphi,\delta) \qquad (23)$$

і для $\gamma=2$ відповідно матимемо оператор Гаусса–Вейєрштрасса [32]

$$V_2(\theta,\varphi,\delta):=W(\theta,\varphi,\delta). \qquad (24)$$

Зауваження 2. Множина класів H^ω є узагальненням добре відомих класів Гельдера (або Ліпшиця) порядку α $(0<\alpha\le 1)$, які позначають H^α. Тобто класом функцій Гельдера H^α $(0<\alpha\le 1)$ називають множину всіх неперервних функцій φ таких, що за кожного фіксованого $\alpha\in(0,1]$ модуль неперервності задовольняє умову $\omega(\varphi;t)\le t^\alpha$.

Зауваження 3. Наслідуючи О. І. Степанця [33, с.198], казатимемо, що якщо в явному вигляді знайдено таку функцію $g(\delta)$, для якої для всіх $\delta\to\infty$ має місце асимптотична рівність $\mathcal{E}(V_\gamma(\delta),H^\alpha)_C=g(\delta)+o(g(\delta))$, то є розв'язана задача Колмогорова–Нікольського в рівномірній матриці для класу функцій Гельдера H^α $(0<\alpha\le 1)$ і оператора $V_\gamma(\theta,\varphi,\delta)$, який є розв'язком диференціального рівняння (1), (2).

Із зауважень 1–3 та теореми 1 випливають наступні твердження.

Теорема 2. Для оператора Абеля–Пуассона

$$A(\theta,\varphi,\delta)=V_1(\theta;\varphi,\delta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(z+\theta)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^\infty e^{-k/\delta}\cos kz\right\}dz$$

і функцій класу Гельдера H^α $(0<\alpha\le 1)$ мають місце асимптотичні рівності

$$\mathcal{E}(A(\delta),H^1)_C=\mathcal{E}(V_1(\delta),H^1)_C=\sup_{\varphi\in H^1}\|A(\theta,\varphi,\delta)-\varphi(\theta)\|_C=\frac{2}{\pi}\frac{\ln\delta}{\delta}+O(1/\delta),\ \ \delta>0,$$

$$\mathcal{E}(A(\delta),H^\alpha)_C=\mathcal{E}(V_1(\delta),H^\alpha)_C=$$

$$=\sup_{\varphi\in H^\alpha}\|A(\theta,\varphi,\delta)-\varphi(\theta)\|_C=\sec\frac{\alpha\pi}{2}\frac{1}{\delta^\alpha}+O(1/\delta),\ \ \delta>0.$$

Теорема 3. Для оператора Гаусса–Вейєрштрасса

$$W(\theta,\varphi,\delta)=V_2(\theta;\varphi,\delta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(z+\theta)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}e^{-k^2/\delta}\cos kz\right\}dz$$

і функцій класу Гельдера H^{α} $(0<\alpha\leq 1)$ мають місце асимптотичні рівності

$$\mathcal{E}(W(\delta),H^1)_C=\mathcal{E}(V_2(\delta),H^1)_C=\sup_{\varphi\in H^1}||W(\theta,\varphi,\delta)-\varphi(\theta)||_C=\frac{2}{\sqrt{\pi\delta}}+O\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}e^{s\delta}}\right),$$

$$\delta>0,\ 0<s\leq\frac{\pi^2}{4},$$

$$\mathcal{E}(W(\delta),H^{\alpha})_C=\mathcal{E}(V_2(\delta),H^{\alpha})_C=\sup_{\varphi\in H^{\alpha}}||W(\theta,\varphi,\delta)-\varphi(\theta)||_C=$$

$$=\frac{2^{\alpha}}{\sqrt{\pi}}+\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\frac{1}{\delta^{\alpha}}+O(e^{-s\delta}),$$

$$\delta>0,\ 0<s\leq\frac{\pi^2}{4}.$$

ВИСНОВКИ

У запропонованій роботі розглянуто оператори з так званими дельта-подібними ядрами [34] як розв'язки відповідних диференціальних рівнянь еліптичного типу (в полярних координатах всередині одиничного круга). Різноманітні застосування диференціальних рівнянь вищих порядків та їхніх систем у математичному моделюванні, теорії керування, теорії ігрових задач динаміки [35–37] тощо все більше стимулює подальший розвиток світового народного господарства. У роботі досліджено поведінку верхньої межі відхилення функцій класу H^{ω} від операторів, які є розв'язками диференціальних рівнянь вищих порядків. Розв'язана задача Колмогорова–Нікольського для операторів Абеля–Пуассона та Гаусса–Вейєрштрасса на класах функцій H^{α}, $0<\alpha\leq 1$, у рівномірній метриці. Зокрема, знайдено асимптотичні рівності для верхніх меж відхилень функцій узагальнених класів Гельдера як від операторів Абеля–Пуассона, так і від операторів Гаусса–Вейєрштрасса в метриці простору C.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Глушков В.М. Введение в АСУ. Київ: Техніка, 1974. 320 с.
2. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Semenets V.V., Chikriy A.A. On the optimal impulse control in descriptor systems. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2019. Vol. 51, N 5. P. 1–15. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v51.i5.10.
3. Chikrii A.A., Rappoport I.S. Method of resolving functions in the theory of conflict-controlled processes. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2012. Vol. 48, N 4. P. 512–531. https://doi.org/10.1007/s10559-012-9430-y.
4. Chikrij A.A., Dzyubenko K.G. Bilinear markovian processes of search for moving objects. *Problemy Upravleniya i Informatiki (Avtomatika)*. 1997. N 1. P. 92–106.
5. Kharkevych Yu.I. On some asymptotic properties of solutions to biharmonic equations. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2022. Vol. 58, N 2. P. 251–258. https://doi.org/10.1007/s10559-022-00457-y.
6. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of conjugate differentiable functions by biharmonic Poisson integrals. *Ukr. Math. J.* 2009. Vol. 61, N 3. P. 399–413. https://doi.org/10.1007/s11253-009-0217-x.

7. Zajac J., Korenkov M.E., Kharkevych Yu.I. On the asymptotics of some Weierstrass functions. *Ukr. Math. J.* 2015. Vol. 67, N 1. P. 154–158. https://doi.org/10.1007/s11253-015-1070-8.

8. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Approximating properties of biharmonic Poisson operators in the classes $\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}$. *Ukr. Math. J.* 2017. Vol. 69, N 5. P. 757–765. https://doi.org/10.1007/s11253-017-1393-8.

9. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. Москва: Наука, 1977. 512 с.

10. Chikrii A.A., Chikrii G.Ts. Matrix resolving functions in game problems of dynamics. *Proc. of the Steklov Institute of Mathematics.* 2015. Vol. 291. P. 56–65. https://doi.org/10.1134/S0081543815090047.

11. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Chikrii A.A. On a differential game in an abstract parabolic system. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2016. Vol. 293 (Suppl 1). P. 254–269. https://doi.org/10.1134/S0081543816050229.

12. Chikrii A., Matychin I. Riemann-Liouville, Caputo, and sequential fractional derivatives in differential games. Breton M., Szajowski K. (Eds.). Advances in Dynamic Games. *Annals of the International Society of Dynamic Games,* Birkhäuser Boston. 2011. Vol. 11. P. 61–81. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8089-3_4.

13. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. On the approximation of functions of the Hölder class by biharmonic Poisson integrals. *Ukr. Math. J.* 2000. Vol. 52, N 7. P. 1113–1117. https://doi.org/10.1023/A:1005285818550.

14. Kharkevych Yu.I., Kal'chuk I.V. Asymptotics of the values of approximations in the mean for classes of differentiable functions by using biharmonic Poisson integrals. *Ukr. Math. J.* 2007. Vol. 59, N 8. P. 1224–1237. https://doi.org/10.1007/s11253-007-0082-4.

15. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of (ψ, β)-differentiable functions defined on the real axis by Abel–Poisson operators. *Ukr. Math. J.* 2005. Vol. 57, N 8. P. 1297–1315. https://doi.org/10.1007/s11253-005-0262-z.

16. Kal'chuk I.V., Hrabova U.Z., Filozof L.I. Approximation of the classes $W^r_{\beta}H^{\alpha}$ by three-harmonic Poisson integrals. *J. Math. Sci. (N.Y.)*. 2021. Vol. 254, N 3. P. 397–405. https://doi.org/10.1007/s10958-021-05311-8.

17. Chikrii A.A., Prokopovich P.V. Simple pursuit of one evader by a group. *Cybernetics and Systems Analysis.* 1992. Vol. 28, N 3. P. 438–444. https://doi.org/10.1007/BF01125424.

18. Bushev D.N., Kharkevich Y.I. Finding solution subspaces of the Laplace and heat equations isometric to spaces of real functions, and some of their applications. *Math. Notes.* 2018. Vol. 103, N 5–6. P. 869–880. https://doi.org/10.1134/S0001434618050231.

19. Pilipenko Yu.B., Chikrii A.A. The oscillation processes of conflict control. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika.* 1993. Vol. 57, N 3. P. 3–14.

20. Albus J., Meystel A., Chikrii A.A., Belousov A.A., Kozlov A.I. Analytical method for solution of the game problem of soft landing for moving objects. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2001. Vol. 37, N 1. P. 75–91. https://doi.org/10.1023/A:1016620201241.

21. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. On approximation of functions from the class $L^{\psi}_{\beta,1}$ by the Abel–Poisson integrals in the integral metric. *Carpathian Math. Publ.* 2022. Vol. 14, N 1. P. 223–229. https://doi.org/10.15330/cmp.14.1.223–229.

22. Kal'chuk I.V., Kharkevych Y.I. Approximating properties of biharmonic Poisson integrals in the classes $W^r_{\beta}H^{\alpha}$. *Ukr. Math. J.* 2017. Vol. 68, N 11. P. 1727–1740. https://doi.org/10.1007/s11253-017-1323-9.

23. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of functions defined on the real axis by operators generated by λ-methods of summation of their Fourier integrals. *Ukr. Math. J.* 2004. Vol. 56, N 9. P. 1509–1525. https://doi.org/10.1007/s11253-005-0130-x.

24. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of conjugate differentiable functions by their Abel–Poisson integrals. *Ukr. Math. J.* 2009. Vol. 61, N 1. P. 86–98. https://doi.org/10.1007/s11253-009-0196-y.

25. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Fourier transform of the summatory Abel–Poisson function. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2022. Vol. 58, N 6. P. 957–965. https://doi.org/10.1007/s10559-023-00530-0.
26. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of functions from the class $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ by Poisson biharmonic operators in the uniform metric. *Ukr. Math. J.* 2008. Vol. 60, N 5. P. 769–798. https://doi.org/10.1007/s11253-008-0093-9.
27. Kharkevich Yu.I., Stepanyuk T.A. Approximation properties of Poisson integrals for the classes $C^{\psi}_{\beta}H^{\alpha}$. *Math. Notes.* 2014. Vol. 96, N 5–6. P. 1008–1019. https://doi.org/10.1134/S0001434614110406.
28. Kal'chuk I.V., Kharkevych Yu.I. Approximation of the classes $W^{r}_{\beta,\infty}$ by generalized Abel–Poisson integrals. *Ukr. Math. J.* 2022. Vol. 74, N 9. P. 575–585. https://doi.org/10.1007/s11253-022-02084-4.
29. Kharkevych Yu.I. Approximative properties of the generalized Poisson integrals on the classes of functions determined by a modulus of continuity. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2019. Vol. 51, N 4. P. 43–54. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v51.i4.40.
30. Kharkevych Yu.I. On Approximation of the quasi-smooth functions by their Poisson type integrals. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2017. Vol. 49, N 10. P. 74–81. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v49.i10.80.
31. Kal'chuk I., Kharkevych Yu. Approximation properties of the generalized Abel–Poisson integrals on the Weyl-Nagy classes. *Axioms.* 2022. Vol. 11, N 4: 161. https://doi.org/10.3390/axioms11040161.
32. Kharkevych Yu.I., Kal'chuk I.V. Approximation of (ψ,β)-differentiable functions by Weierstrass integrals. *Ukr. Math. J.* 2007. Vol. 59, N 7. P. 1059–1087. https://doi.org/10.1007/s11253-007-0069-1.
33. Степанец А. И. Методы теории приближения. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. Ч. I. 427 с.
34. Bushev D.M., Kharkevych Yu.I. Conditions of convergence almost everywhere for the convolution of a function with delta-shaped kernel to this function. *Ukr. Math. J.* 2016. Vol. 67, N 11. P. 1643–1661. https://doi.org/10.1007/s11253-016-1180-y.
35. Chikrij A.A., Ejdel'man S.D. Game problems of control for quasilinear systems with fractional Riemann–Liouville derivatives. *Kibernetika i Sistemnyj Analiz.* 2001. N 6. P. 66–99.
36. Kharkevych Yu. Approximation theory and related applications. *Axioms.* 2022, Vol. 11, N 12. P. 736. https://doi.org/10.3390/axioms11120736.
37. Chikrii A.A., Matichyn I.I. Game problems for fractional-order linear systems. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.* 2010. Vol. 268. P. 54–70. https://doi.org/10.1134/S0081543810050056.

Yu.I. Kharkevych, O.G. Khanin

ASYMPTOTIC PROPERTIES OF THE SOLUTIONS OF HIGHER-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS ON GENERALIZED HÖLDER CLASSES

Abstract. Some asymptotic properties of the solutions of elliptic-type differential equations are investigated using the methods of approximation theory. The approximation characteristics of Poisson-type operators as solutions of higher-order differential equations on generalized Hölder classes in a uniform metric have been investigated. In particular, the Kolmogorov–Nikol'skii problem (in O.I. Stepanets terminology) of finding the upper bounds for the deviations of functions defined by the modulus of continuity from the Abel–Poisson and Gauss–Weierstrass operators in the space metric is solved. The above-mentioned operators are one of the efficient tools for the analysis of the mathematical models that arise when solving many applied optimization problems.

Keywords: optimization properties of functions, approximative characteristics, Kolmogorov–Nikol'skii problem, Abel–Poisson operator, Gauss–Weierstrass operator, Hölder classes.

Надійшла до редакції 07.02.2023