УДК 517.9: 519.6

В.М. БУЛАВАЦЬКИЙ

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *v_bulav@ukr.net.*

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДРОБОВО-ДИФЕРЕНЦІЙНОЇ КОНСОЛІДАЦІЙНОЇ ДИНАМІКИ ДЛЯ МОДЕЛІ З ПОХІДНОЮ КАПУТО–ФАБРІЦІО

Анотація. Одержано замкнені розв'язки деяких крайових задач дробово-диференційної фільтраційно-консолідаційної динаміки стосовно некласичної математичної моделі з урахуванням просторово-часової нелокальності процесу. Ця математична модель сформульована з використанням похідної Капуто–Фабріціо за часовою змінною та Рімана–Ліувілля за геометричною змінною. Разом з прямою задачею консолідації для масиву скінченної потужності розглянуто обернені крайові задачі щодо визначення невідомих функцій джерела, залежних лише від геометричної або часової змінної. Наведено умови існування регулярних розв'язків розглянутих задач.

Ключові слова: математичне моделювання, дробово-диференційна динаміка консолідаційних процесів, геопористі середовища, некласичні моделі, похідні Капуто–Фабріціо та Рімана–Ліувілля, крайові задачі, замкнені розв'язки, прямі та обернені задачі.

ВСТУП

Системні дослідження у галузі визначення закономірностей динаміки геоміграційних процесів на основі використання методології математичного і комп'ютерного моделювання є актуальним напрямком розвитку для сучасних наук, зокрема геоінформатики та геоматематики [1–5]. Варто зазначити, що за складних умов перебігу вказаних процесів у геопористих середовищах суттєвий вплив на їхню динаміку мають ефекти пам'яті та просторової нелокальності, врахування яких в математичних моделях переносу, побудованих на класичних підходах до моделювання, є достатньо ускладненим. Зазначені підходи до моделювання базуються на класичних законах переносу, які іноді є недостатньо адекватними за умов суттєвого відхилення досліджуваної системи від рівноважного стану [2, 6]. У зв'язку з цим набуває значної актуальності проблема знаходження і побудови нових, більш адекватних математичних моделей складних процесів переносу, що базуються на некласичних законах, справедливих за умов суттєвого відхилення від рівноважного стану. Зауважимо, що протягом останніх десятиліть істотного поширення набув підхід до моделювання динаміки процесів переносу у зазначених системах, що грунтується на використанні апарату інтегро-диференціювання дробового порядку [7–11], який показав свою незаперечну ефективність [12–19].

У цій роботі в межах зазначеного підходу розглянуто деякі нові задачі математичного моделювання дробово-диференційної динаміки процесів фільтраційної консолідації геопористих середовищ на основі некласичної моделі з урахуванням явища повзучості грунтового скелета та просторової нелокальності процесу. До того ж для розглядуваної моделі консолідації з урахуванням повзучості грунтового скелета та фактору просторової нелокальності консолідаційного процесу одержано як точний розв'язок прямої задачі фільтраційного ущільнення грунтового масиву скінченної потужності, так і розв'язки (в замкненому вигляді) деяких обернених крайових задач стосовно цієї консолідаційної моделі. Зокрема, розв'язано задачі визначення функції потужності джерела (залежної лише від геометричної змінної x) за відомою функцією кінцевої умови за часовою змінною та задачі знаходження невідомої функції джерела (залежної від часової змінної t) за додатковою інтегральною умовою перевизначення.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДРОБОВО-ДИФЕРЕНЦІЙНОЇ ЗА ПРОСТОРОМ І ЧАСОМ КОНСОЛІДАЦІЙНОЇ ДИНАМІКИ З УРАХУВАННЯМ ЯВИЩА ПОВЗУЧОСТІ ГРУНТОВОГО СКЕЛЕТА

Відповідно до теорії спадкової лінійної повзучості швидкість зміни коефіцієнта пористості у часі представлена у вигляді [5]

$$\frac{\partial e}{\partial t}=a_0\frac{\partial p}{\partial t}+a_1\gamma_1\int_0^t\frac{\partial p}{\partial \tau}e^{-\gamma_1(t-\tau)}d\tau, \tag{1}$$

де $e(t)$ — коефіцієнт пористості деформованого під дією прикладеного навантаження грунтового масиву, a_0 — параметр миттєвої деформації, a_1, γ_1 — параметри повзучості, що визначаються експериментально (γ_1 — швидкість зростання деформацій повзучості [3]), $p=p(x,t)$ — поровий тиск. Відповідно до [3–5] основне рівняння фільтраційної консолідації трифазного грунтового середовища з урахуванням зазначеного вище в одновимірному випадку запишемо у вигляді

$$\frac{\partial e}{\partial t}+\beta(1+\bar{e})\frac{\partial p}{\partial t}-(1+\bar{e})\frac{\partial u_x}{\partial x}=0, \tag{2}$$

де β — коефіцієнт об’ємної стискуваності газової компоненти, $\bar{e}$ — середнє значення коефіцієнта пористості, u_x — швидкість фільтрації.

Тоді згідно з (2) з урахуванням (1) за припущень основної розрахункової моделі Флоріна [3] одержуємо рівняння

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{a_1\gamma_1}{a_0+\beta(1+\bar{e})}\int_0^t\frac{\partial p}{\partial \tau}e^{-\gamma_1(t-\tau)}d\tau=C_v\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \tag{3}$$

де C_v — коефіцієнт консолідації [3–5].

Інтегро-диференційне рівняння (3) — це класичне визначальне рівняння для надлишкового тиску в розглядуваній математичній моделі фільтраційної консолідації грунтових середовищ з урахуванням явища повзучості грунтового скелета [3–5].

Уведемо позначення $\gamma_1=\dfrac{\mu}{1-\mu}$, $\zeta_\mu=\dfrac{a_1\mu}{a_0+\beta(1+\bar{e})}$ (μ — дійсний параметр, $0<\mu<1$) і перепишемо рівняння (3) у вигляді

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\zeta_\mu\,{}^{CF}D_t^\mu p(x,t)=C_v\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \tag{4}$$

де ${}^{CF}D_t^\mu$ — оператор дробової похідної Капуто–Фабриціо [12, 13] порядку μ за змінною t.

На відміну від узвичаєного класичного підходу до моделювання динаміки консолідаційних процесів стосовно локальних моделей [3–5] в цій роботі виконано математичне моделювання динаміки власне нелокального за геометричною змінною x фільтраційно-консолідаційного процесу в грунтових середовищах (з урахуванням суттєвого впливу фактора повзучості скелета). Тому, розповсюджуючи модельне рівняння (4) на випадок просторової нелокальності консолідаційного процесу, одержуємо таке дробово-диференційне модельне рівняння консолідації стосовно напірної функції $p(x,t)$:

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\zeta_\mu{}^{CF}D_t^\mu p(x,t)=C_\upsilon D_x^\alpha p(x,t)\ \ (0<\mu<1,\ 1<\alpha\le 2),\qquad(5)$$

де D_x^α — оператор дробової похідної Рімана–Ліувілля за змінною x порядку α $(1<\alpha\le 2)$ [8, 9].

Модельне рівняння (5) може слугувати основою нової (дробово-диференційної) математичної моделі динаміки фільтраційної консолідації грунтових середовищ з урахуванням фактора повзучості грунтового скелета та просторової нелокальності процесу. У межах цієї консолідаційної моделі поставимо і розв'яжемо деякі одновимірні за геометричною змінною крайові задачі некласичної теорії консолідації.

ПРЯМА ЗАДАЧА ДРОБОВО-ДИФЕРЕНЦІЙНОЇ КОНСОЛІДАЦІЙНОЇ ДИНАМІКИ ДЛЯ ГРУНТОВОГО МАСИВУ СКІНЧЕННОЇ ПОТУЖНОСТІ

Найпростіша пряма задача математичного моделювання дробово-диференційної консолідаційної динаміки для грунтового масиву одиничної потужності з проникливими межами зводиться до розв'язання в області $\Omega=\{(x,t):(0,1)\times(0,+\infty)\}$ крайової задачі вигляду

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\zeta_\mu{}^{CF}D_t^\mu p(x,t)=C_\upsilon D_x^\alpha p(x,t)\ \ (0<\mu<1,\ 1<\alpha\le 2),\qquad(6)$$

$$p(0,t)=0,\quad p(1,t)=0\quad (t\ge 0),\qquad(7)$$

$$p(x,t)|_{t=0}=h(x)\quad (x\in[0,1]),\qquad(8)$$

де $h(x)$ — відома функція початкового розподілу тисків у масиві, $h(x)\in L^2[0,1]$, ${}^{CF}D_t^\mu, D_x^\alpha$ — оператори похідних Капуто–Фабріціо та Рімана–Ліувілля відповідно, які визначаються співвідношеннями [8, 9, 12, 13]:

$${}^{CF}D_t^\mu p(x,t)=\frac{1}{1-\mu}\int_0^t\frac{\partial p}{\partial\tau}e^{-\frac{\mu}{1-\mu}(t-\tau)}d\tau\quad(0<\mu<1),$$

$$D_x^\alpha p(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\displaystyle\int_0^x\frac{p(\zeta,t)}{(x-\zeta)^{\alpha-1}}d\zeta & (1<\alpha<2),\\ \dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} & (\alpha=2),\end{cases}$$

де $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функція Ейлера [20].

Розв'язок крайової задачі (6)–(8) знаходитимемо у вигляді ряду

$$p(x,t)=\sum_{n=1}^\infty u_n(t)\,\omega_n(x),\quad (x,t)\in\Omega,\qquad(9)$$

де $\omega_n(x)=x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^\alpha)$ — власні функції задачі Штурма–Ліувілля вигляду

$$D_x^\alpha\omega(x)=\lambda\omega(x),\quad \omega(0)=\omega(1)=0,\qquad x\in(0,1),\qquad(10)$$

$E_{\alpha,\alpha}(z)$ — двопараметрична функція Міттаг-Леффлера [21].

Задача (10) досліджувалася, зокрема, в роботах [22–24], в яких показано, що лише для власних значень λ_n, які є нулями двопараметричної функції Міттаг–Леффлера $E_{\alpha,\alpha}(\lambda)$, існують зазначені вище власні функції $\omega_n(x)$. У роботі [25] показано, що система функцій $\{\omega_n(x)\}_{n=1}^\infty$ утворює в $L^2(0,1)$ неортогональний базис. До того ж система власних функцій задачі, спряженої до задачі (10), визначається [24] у такий спосіб:

$$\{z_n(x)\}_{n=1}^{\infty} = \{(1-x)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n (1-x)^{\alpha})\}_{n=1}^{\infty}.$$

Відомо, що наведені вище системи функцій $\{\omega_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{z_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ утворюють біортогональну систему функцій [26–28].

Розвинемо функцію початкового розподілу тисків $h(x)$ у ряд за власними функціями задачі (10) у вигляді

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \omega_n(x), \tag{11}$$

де $h_n = (h, z_n)_{L^2(0,1)}$, і отримаємо із співвідношень (6)–(8) для знаходження невідомих функцій $u_n(t)$ $(t>0, n\in N)$ таку послідовність задач Коші:

$$u_n'(t) + \zeta_\mu \, {}^{CF}D_t^{\mu} u_n(t) - C_v \lambda_n u_n(t) = 0, \quad u_n(0) = h_n \quad (n \in N). \tag{12}$$

Застосовуючи до (12) перетворення Лапласа за змінною t, одержуємо співвідношення

$$\bar{u}_n(s) = h_n \frac{(1-\mu)s + \mu + \zeta_\mu}{(1-\mu)s^2 + [\mu + \zeta_\mu - C_v \lambda_n (1-\mu)]s - \mu C_v \lambda_n} \quad (n \in N), \tag{13}$$

де $\bar{u}_n(s)$ — образ перетворення Лапласа функції $u_n(t)$, s — параметр цього перетворення.

Далі перейдемо в співвідношеннях (13) до оригіналів перетворення Лапласа і отримаємо для розв'язків задач (12) такі вирази:

$$u_n(t) = \frac{h_n}{\varphi_n^{(1)} - \varphi_n^{(2)}} (\varphi_n^{(1)} e^{s_n^{(1)} t} - \varphi_n^{(2)} e^{s_n^{(2)} t}) \quad (n \in N), \tag{14}$$

$$\varphi_n^{(1)} = s_n^{(1)} + \frac{\mu + \zeta_\mu}{1-\mu}, \qquad \varphi_n^{(2)} = s_n^{(2)} + \frac{\mu + \zeta_\mu}{1-\mu} \quad (n \in N), \tag{15}$$

$$s_n^{(1,2)} = \frac{-[\mu + \zeta_\mu - C_v \lambda_n (1-\mu)] \pm \sqrt{\Delta_n}}{2(1-\mu)},$$

$$\Delta_n = [\mu + \zeta_\mu - C_v \lambda_n (1-\mu)]^2 + 4\mu C_v \lambda_n (1-\mu) \quad (n \in N). \tag{16}$$

Отже, співвідношення (9), (14)–(16) визначають формальний розв'язок поставленої задачі. Можна показати, що за деяких додаткових умов цей розв'язок є регулярним. Для цього припустимо, що визначена згідно (11) функція $h(x)$ задовольняє такі умови: $h(x) \in C^2[0,1]$, $h(0) = h(1) = h'(1) = 0$. Тоді з урахуванням відомої нерівності [21]

$$|E_{\alpha,\alpha}(z)| \le \frac{C_1}{1+|z|} \qquad (z \in \mathbb{C},\ C_1 > 0),$$

$$\left(1 < \alpha < 2, \alpha \in R, \mu \le |\arg(z)| \le \pi, \mu \in \left(\frac{\pi\alpha}{2}, \min\{\alpha\pi, \pi\}\right)\right),$$

виконуючи інтегрування частинами в співвідношенні для $(h(x), z_n(x))_{L^2(0,1)}$, маємо оцінку

$$|h_n| \le \frac{C_2}{|\lambda_n|^2} \qquad (C_2 > 0, n \in N). \tag{17}$$

Відповідна оцінка для власних функцій $\omega_n(x)$, як відомо [24–28], має вигляд

$$|\omega_n(x)| \le \frac{M_1}{|\lambda_n| x} \quad (M_1 > 0, x > 0, n \in N). \tag{18}$$

З урахуванням оцінок (17), (18) та співвідношень (14)–(16) одержуємо для членів ряду (9) оцінку

$$|u_n(t)\omega_n(x)| \le \frac{M_2}{|\lambda_n|^3 x} \quad (M_2 > 0,\ t > 0,\ x > 0,\ n \in N). \tag{19}$$

Оскільки власні значення λ_n задачі (10) для $\mathrm{Im}\,(\lambda_n) > 0$ мають такі властивості [26–28]:

- $|\lambda_k| < |\lambda_{k+1}|$ для $k \ge 1$,
- для достатньо великих n і $\arg(\lambda_n) > \dfrac{\alpha\pi}{2}$ маємо $|e^{\lambda_n t}| < 1$, $|\lambda_n| \sim \mathrm{O}(n^{\alpha})$

$(1 < \alpha < 2)$,
з урахуванням (19) одержуємо, що мажорувальним для ряду (9) є збіжний узагальнений гармонічний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3\alpha}} \quad (1 < \alpha \le 2).$$

Отже, на основі мажорантної ознаки Вейєрштраса ряд (9) є рівномірно збіжним на множині $\Omega_T := [0,1] \times [0,T]$ $(T > 0)$ і являє собою неперервну функцію на цій множині $p(x,t) \in C(\Omega_T)$. Аналогічно доводиться, що для $t > 0$ ряд (9), (14)–(16) являє собою функцію, диференційовну почленно один раз за змінною t і два рази за змінною x.

ДЕЯКІ ОБЕРНЕНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕКЛАСИЧНОЇ МОДЕЛІ КОНСОЛІДАЦІЇ

Обернену крайову задачу консолідації для функції джерела, що залежить лише від геометричної змінної x, сформулюємо як задачу знаходження в області $Q := (0,1) \times (0,T)$ пари функцій $\{p(x,t), f(x)\}$ (таких, що $p(x,t) \in C(\overline{Q})$, $f(x) \in C[0,1]$) на основі розв'язання крайової задачі:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \zeta_\mu {}^{CF}D_t^{\mu} p(x,t) = C_v D_x^{\alpha} p(x,t) + f(x) \quad (0 < \mu < 1,\ \ (1 < \alpha \le 2), \tag{20}$$

$$p(0,t) = 0, \quad p(1,t) = 0 \quad (0 \le t \le T), \tag{21}$$

$$p(x,0) = 0, \quad p(x,T) = g(x) \quad (x \in [0,1]), \tag{22}$$

де $g(x)$ — відома функція додаткової (кінцевої) умови (значення тиску в точці x в кінцевий момент часу $t = T$ $(T > 0)$).

Розв'язок задачі (20)–(22) знаходимо у вигляді

$$p(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\omega_n(x), \tag{23}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \omega_n(x), \tag{24}$$

де $\omega_n(x) = x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^{\alpha})$ — власні функції задачі (10).

Позначаючи g_n коефіцієнти розвинення функції $g(x)$ в ряд за власними функціями задачі (10), тобто $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \omega_n(x)$, маємо з другої умови з (22) співвідношення

$$u_n(T) = g_n \quad (n \in N), \tag{25}$$

де $g_n = (g(x), z_n(x))_{L^2(0,1)}$. Тоді з урахуванням (23), (24) на основі (20), (21) та першої умови з (22) одержуємо послідовність задач Коші у вигляді

$$u'_n(t) + \zeta_\mu {}^{CF}D_t^\mu u_n(t) = C_v \lambda_n u_n(t) + f_n, \quad u_n(0) = 0 \quad (n \in N). \tag{26}$$

Застосовуючи до (26) інтегральне перетворення Лапласа за змінною t, одержуємо

$$\bar{u}_n(s) = \frac{f_n}{s}\left[\frac{s}{(s - s_n^{(1)})(s - s_n^{(2)})} + \frac{\mu}{1-\mu}\frac{1}{(s - s_n^{(1)})(s - s_n^{(2)})}\right] \quad (n \in N), \tag{27}$$

де $\bar{u}_n(s)$ — образ перетворення Лапласа функції $u_n(t)$, s — параметр перетворення, значення $s_n^{(1)}, s_n^{(2)}$ $(n \in N)$ визначаються згідно з (16).

Переходячи в співвідношеннях (27) до оригіналів перетворення Лапласа, одержуємо розв'язки задач (26) у вигляді

$$u_n(t) = \frac{f_n}{\psi_n^{(1)} - \psi_n^{(2)}}\left(\frac{\psi_n^{(1)}}{s_n^{(1)}}(e^{s_n^{(1)}t} - 1) - \frac{\psi_n^{(2)}}{s_n^{(2)}}(e^{s_n^{(2)}t} - 1)\right) \quad (n \in N), \tag{28}$$

де введено позначення

$$\psi_n^{(1)} = s_n^{(1)} + \frac{\mu}{1-\mu}, \quad \psi_n^{(2)} = s_n^{(2)} + \frac{\mu}{1-\mu} \quad (n \in N). \tag{29}$$

Враховуючи співвідношення (28), на основі (25) одержуємо

$$f_n = g_n(\psi_n^{(1)} - \psi_n^{(2)})\left(\frac{\psi_n^{(1)}}{s_n^{(1)}}(e^{s_n^{(1)}T} - 1) - \frac{\psi_n^{(2)}}{s_n^{(2)}}(e^{s_n^{(2)}T} - 1)\right)^{-1} \quad (n \in N). \tag{30}$$

Отже, формальний розв'язок поставленої задачі визначається співвідношеннями (23), (28), (29) та (24), (30). Покажемо, що за певних умов одержаний розв'язок оберненої задачі є класичним, а знайдена функція джерела $f(x)$ — неперервна.

Нехай функція $g(x)$ задовольняє умови $g(x) \in C^2[0,1]$, $g(0) = g(1) = 0$, $g'(1) = 0$. Тоді, як зазначено вище, має місце нерівність

$$|g_n| \le \frac{C_1^+}{|\lambda_n|^2} \quad (C_1^+ > 0,\ n \in N). \tag{31}$$

Враховуючи оцінку власних функцій $\omega_n(x)$ вигляду (18), а також оцінку (31), на основі співвідношень (30), (29), (16) одержуємо нерівність

$$|f_n \omega_n(x)| \le \frac{C_2^+}{|\lambda_n|^2 x} \quad (C_2^+ > 0, x > 0,\ n \in N). \tag{32}$$

З урахуванням зазначених вище властивостей власних значень λ_n задачі (10) одержуємо на основі (32), що мажорувальним для ряду (24) є збіжний узагальнений гармонічний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2\alpha}} \quad (1 < \alpha \le 2).$$

Отже, на основі мажорантної ознаки Вейєрштраса ряд (24) є рівномірно збіжним на відрізку $[0,1]$ і його сума є неперервною функцією на цьому відрізку: $f(x)\in C[0,1]$. Зазначимо, що рівномірна збіжність ряду (23) в області $\overline{Q}$ є наслідком того, що мажорувальним для нього рядом є узагальнений гармонічний ряд, визначений вище у прямій задачі. Тоді $p(x,t)\in C(\overline{Q})$.

Далі розглянемо обернену задачу щодо знаходження функції інтенсивності джерела (залежної від часової змінної t) у разі задання додаткової інтегральної умови. Знайдемо в області $Q:=(0,1)\times(0,T)$ пару функцій $\{p(x,t),a(t)\}$ (таких, що $p(x,t)\in C(\overline{Q})$, $a(t)\in C[0,T]$, на основі розв'язку крайової задачі

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\zeta_\mu {}^{CF}D_t^\mu p(x,t)=C_v D_x^\alpha p(x,t)+a(t)f(x,t) \quad (0<\mu<1,\ 1<\alpha\le 2), \quad (33)$$

$$p(0,t)=0, \quad p(1,t)=0 \quad (0\le t\le T), \quad (34)$$

$$p(x,0)=h(x) \quad (0\le x\le 1), \quad \int_0^1 p(x,t)\,dx=E(t) \quad (0\le t\le T), \quad (35)$$

де $h(x)$, $f(x,t)$, $E(t)$ — задані функції (друга умова з (35) — інтегральна умова перевизначення).

Знаходячи розв'язок розглядуваної задачі у вигляді (23), з урахуванням (33), (34) та першої умови з (35) одержуємо послідовність задач Коші у вигляді

$$u_n'(t)+\zeta_\mu {}^{CF}D_t^\mu u_n(t)=C_v\lambda_n u_n(t)+a(t)f_n(t), \quad u_n(0)=h_n \quad (n\in N), \quad (36)$$

де уведено позначення $f_n(t)=(f(x,t),z_n(x))_{L^2(0,1)}$, $h_n=(h(x),z_n(x))_{L^2(0,1)}$.

Аналогічно викладеному вище, застосовуючи до задачі (36) метод інтегрального перетворення Лапласа за часом, знаходимо її розв'язок у вигляді

$$u_n(t)=h_n R_n(t)+\int_0^t a(\tau)f_n(\tau)G_n(t-\tau)d\tau \quad (n\in N), \quad (37)$$

де

$$R_n(t)=g_n^{(1)}e^{s_n^{(1)}t}-g_n^{(2)}e^{s_n^{(2)}t}, \ g_n^{(1)}=\frac{\varphi_n^{(1)}}{\nu_n}, \ g_n^{(2)}=\frac{\varphi_n^{(2)}}{\nu_n}, \ \nu_n=s_n^{(1)}-s_n^{(2)},$$

$$G_n(t)=r_n^{(1)}e^{s_n^{(1)}t}-r_n^{(2)}e^{s_n^{(2)}t}, \ r_n^{(1)}=\frac{\psi_n^{(1)}}{\nu_n}, \ r_n^{(2)}=\frac{\psi_n^{(2)}}{\nu_n} \quad (n\in N). \quad (38)$$

Отже, з урахуванням співвідношень (37) для функції тиску $p(x,t)$ одержуємо

$$p(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(h_n R_n(t)+\int_0^t a(\tau)f_n(\tau)G_n(t-\tau)\,d\tau\right)\omega_n(x) \quad (39)$$

(тут $R_n(t), G_n(t)$ визначаються співвідношеннями (38), $a(t)$ — функція, яка підлягає визначенню).

Виконуючи інтегрування рівняння (33) на проміжку $0\le x\le 1$, з урахуванням другої умови з (35) маємо

$$E'(t)+\zeta_\mu {}^{CF}D_t^\mu E(t)=C_v\int_0^1 D_x^\alpha p(x,t)dx+a(t)\int_0^1 f(x,t)dx. \quad (40)$$

Далі на основі співвідношення (39) знаходимо

$$\int_0^1 D_x^\alpha p(x,t)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\left(h_n R_n(t)+\int_0^t a(\tau)f_n(\tau)G_n(t-\tau)d\tau\right)(E_\alpha(\lambda_n)-1), \quad (41)$$

де $E_\alpha(\cdot)$ — однопараметрична функція Міттаг-Леффлера [21]. Підставляючи (41) в співвідношення (40), одержуємо рівняння

$$a(t)=\left(\int_0^1 f(x,t)dx\right)^{-1}\left(E'(t)+\zeta_\mu {}^{CF}D_t^\mu E(t)-J(t)-\int_0^1 K(t,\tau)a(\tau)d\tau\right), \quad (42)$$

де

$$J(t)=C_v\sum_{n=1}^{\infty}h_n R_n(t)(E_\alpha(\lambda_n)-1),$$

$$K(t,\tau)=C_v\sum_{n=1}^{\infty}f_n(\tau)G_n(t-\tau)(E_\alpha(\lambda_n)-1).$$

Запишемо (42) в операторному вигляді

$$a(t)=F[a(t)],$$

де F — права частина рівності (42). Додатково припустимо виконання таких умов:

$$f\in C(\overline{Q}),\ \left|\int_0^1 f(x,t)dx\right|\geq\frac{1}{M_*}>0,\ E(t)\in C[0,T],$$

$$h(x)\in C^2[0,1],\ h(0)=h(1)=h'(1)=0,\ |\lambda_n|\sim O(n^\alpha)\ (1<\alpha\leq 2).$$

Тоді для $t\in[0,T]$ одержуємо

$$|F[a_1(t)]-F[a_2(t)]|=\left(\int_0^1 f(x,t)dx\right)^{-1}\int_0^t K(t,\tau)|a_1(\tau)-a_2(\tau)|d\tau\leq$$

$$\leq M_* K_* T\,||a_1(\tau)-a_2(\tau)||_{C[0,T]} \quad (M_*,K_*,T>0).$$

У випадку $M_*\leq(K_*T)^{-1}$ рівняння (42) має єдиний розв'язок $a(t)\in C[0,T]$ на основі теореми Банаха про нерухому точку. Далі можна показати, що розв'язок $p(x,t)$, визначений згідно із співвідношенням (39), є регулярним розв'язком. Доведемо, зокрема, що $p(x,t)$ являє собою неперервну на множині $\overline{Q}$ функцію. Дійсно, враховуючи відповідні оцінки для $h_n,\omega_n(x),f_n(t),a_n(t)$, а також співвідношення (38), яке визначає функції $G_n(t)$ $(n\in N)$, одержуємо на основі (39) оцінку

$$|p(x,t)|\leq\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{M_1}{|\lambda_n|^2}+M_2\right)\frac{M_3}{|\lambda_n|} \qquad (M_1,M_2,M_3>0).$$

З урахуванням того, що $|\lambda_n|\sim O(n^\alpha)$ $(1<\alpha\leq 2)$, маємо, що ряд у правій частині останньої нерівності є рівномірно збіжним за ознакою Вейєрштраса. Таким чином, $p(x,t)\in C(\overline{Q})$.

Остаточно зазначимо, що з використанням методики робіт [26–28] легко встановити єдиність розв'язку $p(x,t)$.

ВИСНОВКИ

У роботі одержано замкнені розв'язки деяких одновимірних крайових задач дробово-диференційної фільтраційно-консолідаційної динаміки геопористих середовищ стосовно некласичної математичної консолідаційної моделі з урахуванням явищ повзучості скелета та просторової нелокальності процесу. Постановки відповідних крайових задач виконано в межах математичної моделі, що містить похідну Капуто–Фабріціо за часовою змінною та Рімана–Ліувілля за геометричною змінною. Разом з прямою задачею консолідації геомасиву скінченної потужності розглянуто також обернені крайові задачі щодо визначення невідомих функцій джерела, які залежать лише від геометричної або часової змінної. Наведено умови існування регулярних розв'язків розглянутих задач.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ляшко И.И., Демченко Л.И., Мистецкий Г.Е. Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах. Киев: Наук. думка, 1991. 264 с.
2. Хасанов М.М., Булгакова Г.Т. Нелинейные и неравновесные эффекты в реологически сложных средах. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 288 с.
3. Флорин В.А. Основы механики грунтов. Т. 2. Москва: Госстройиздат, 1961. 544 с.
4. Власюк А.П., Мартинюк П.М. Математичне моделювання консолідації грунтів в процесі фільтрації сольових розчинів. Рівне: Вид–во УДУВГП, 2004. 211 с.
5. Ширинкулов Т.Ш., Зарецкий Ю.К. Ползучесть и консолидация грунтов. Ташкент: Фан, 1986. 390 с.
6. Лыков А.В., Берковский Б.М. Законы переноса в неньютоновских жидкостях. Тепло- и массообмен в неньютоновских жидкостях. Москва: Энергия, 1968. С. 5–14.
7. Мейланов Р.П., Бейбалаев В.Д., Шибанова М.Р. Прикладные аспекты дробного исчисления. Saarbrucken: Palmarium Academic Publishing, 2012. 135 с.
8. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 p.
9. Podlubny I. Fractional differential equations. New York: Academic Press, 1999. 341 p.
10. Mainardi F. Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. London: Imperial College Press, 2010. 368 p.
11. Sandev T., Tomovsky Z. Fractional equations and models. Theory and applications. Cham, Switzerland: Springer Nature Switzerland AG, 2019. 344 p.
12. Caputo M., Fabrizio M. A new definition of fractional derivative without singular kernel. *Progress Fractional Differentiation and Applications.* 2015. Vol. 1, N 2. P. 73–85.
13. Owolabi K.N., Atangana A. Numerical methods for fractional differentiations. Springer Nature Singapore Pte Ltd, 2019. 329 p.
14. Allwright A., Atangana A. Fractal advection-dispersion equation for groundwater transport in fractured aquifers with self-similarities. *The European Physical Journal Plus.* 2018. Vol. 133(2). P. 1–14.
15. Chechkin A.V., Gorenflo R., Sokolov I.M., Gonchar V.Y. Distributed order time fractional diffusion equation. *Fract. Calc. Appl. Anal.* 2003. N 6. P. 259– 257.
16. Zaslavsky G.M. Chaos, fractional kinetics and anomalous transport. *Phys. Reports.* 2002. Vol. 371. P. 461–580.
17. Bogaenko V., Bulavatsky V. Fractional-fractal modeling of filtration-consolidation processes in saline saturated soils. *Fractal and Fractional.* 2020. Vol. 59, N 4. P. 2–12, doi:10.3390/fractalfract4040059.
18. Bulavatsky V.M., Kryvonos Iu.G. The numerically analytical solutions of some geomigratory problems within the framework of fractional-differential mathematical models. *Journal of Automation and Information Science.* 2014. Vol. 46, N 2. P. 1–11.

19. Bulavatsky V.M., Bohaienko V.O. Numerical simulation of fractional- differential filtration-consolidation dynamics within the framework of models with non-singular kernel. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2018. Vol. 54, N 2. P. 193–204.

20. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1967. 436 с.

21. Gorenflo R., Kilbas A.A., Mainardi F., Rogosin S.V. Mittag–Leffler functions, related topics and applications. Berlin: Springer Verlag, 2014. 454 p.

22. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

23. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. Москва: Физматлит, 2003. 272 с.

24. Aleroev T.S., Kirane M., Tang Y.-F. Boundary-value problems for differential equations of fractional order. *Journal of Mathematical Science.* 2013. Vol. 194, N 5. P. 499–512.

25. Хасамбиев М.В., Алероев Т.С. Краевая задача для одномерного дробно-дифференциального уравнения адвекции–диффузии. *Вестник Московского государственного строительного университета.* 2014. № 6. С. 71–76.

26. Aleroev T.S., Kirane M., Malik S.A. Determination of source term for a time fractional diffusion equation with an integral type over-determining condition. *Electronic Journal of Differential Equations.* 2013. Vol. 270. P. 1–16.

27. Ali M., Aziz S., Malik S.A. Inverse problem for a space-time fractional diffusion equation: Application of fractional Sturm-Liouville operator. *Math. Methods Appl. Sci.* 2018. Vol. 41. P. 2733–2744.

28. Ali M., Aziz S., Malik S.A. Inverse source problem for a space-time fractional diffusion equation. *Fract. Calc. Appl. Anal.* 2018. Vol. 21. P. 844–863.

V.M. Bulavatsky

BOUNDARY-VALUE PROBLEMS OF FRACTIONAL-DIFFERENTIAL CONSOLIDATION DYNAMICS FOR THE MODEL WITH THE CAPUTO–FABRIZIO DERIVATIVE

Abstract. Closed-form solutions to some boundary-value problems of fractional-differential filtration-consolidation dynamics with respect to the non-classical mathematical model taking into account the space-time nonlocality of the process are obtained. This mathematical model is formulated using the Caputo–Fabrizio derivative for the time variable and the Riemann-Liouville derivative for the geometric variable. Along with the direct consolidation problem for an array of finite thickness, the inverse boundary-value problems are considered to determine the unknown source functions that only depend on the geometric or time variable. Conditions for the existence of regular solutions to the considered problems are given.

Keywords: mathematical modeling, fractional-differential dynamics of consolidation processes, geoporous media, non-classical models, Caputo–Fabrizio and Riemann–Liouville derivatives, boundary-value problems, closed-form solutions, direct and inverse problems

Надійшла до редакції 09.05.2022