УДК 519.65

П.С. МАЛАЧІВСЬКИЙ
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача
НАН України, Львів, Україна,
e-mail: *Petro.Malachivskyy@gmail.com*.

Л.С. МЕЛЬНИЧОК
Львів, Україна, e-mail: *levkom@gmail.com*.

Я.В. ПІЗЮР
Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна,
e-mail: *yaropolk.v.piziur@lpnu.ua*.

ЧЕБИШОВСЬКЕ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ З ВІДТВОРЕННЯМ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ ТА ЇЇ ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

Анотація. Запропоновано метод побудови чебишовського наближення дискретної функції багатьох змінних з відтворенням її значень і значень її частинних похідних у заданих точках. Метод ґрунтується на побудові граничного середньостепеневого наближення з відповідними інтерполяційними умовами. Для побудови середньостепеневого наближення використано ітераційну схему на основі методу найменших квадратів зі змінною ваговою функцією. Подані результати наближення функції однієї змінної підтверджують виконання характеристичної властивості чебишовського наближення з відтворенням значень функції та значень її похідних у заданих точках. Наведені тестові приклади засвідчують швидку збіжність запропонованого методу.

Ключові слова: чебишовське наближення, чебишовське наближення з умовою, функції багатьох змінних, середньостепеневе наближення, метод найменших квадратів, змінна вагова функція, частинні похідні.

ВСТУП

Чебишовське наближення функцій з відтворенням значень похідних розглянуто у працях [1–4]. У праці [5] встановлено характеристичну властивість чебишовського наближення функцій однієї змінної з відтворенням значень функції та похідних в заданих точках, а також наведено ефективні алгоритми обчислення параметрів цього наближення за схемою Ремеза. У цій праці запропоновано метод побудови чебишовського наближення функції багатьох змінних узагальненим поліномом із відтворенням значень функції та частинних похідних у заданих точках. Цей метод ґрунтується на побудові граничного середньостепеневого наближення з відповідними інтерполяційними умовами.

Задача побудови чебишовського наближення функцій з відтворенням значень функції та частинних похідних виникає тоді, коли через технічні вимоги потрібно, щоб апроксимаційний вираз у певних точках відтворював значення деякої заданої функціональної залежності та швидкість зміни її значень. Такі задачі трапляються, зокрема, під час проєктування вимірювальних приладів, у яких певному значенню вихідного сигналу сенсора має відповідати конкретне значення вимірюваної величини й забезпечується відповідна чутливість [5], у разі опису передавальних характеристик систем автоматизованого керування [6, 7] тощо. Потреба у наближенні функцій з відтворенням значень функції та частинних похідних виникає також під час встановлення функціональних залежностей для початкових умов у задачах із запізненнями [8, 9].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай $f(X)$ функція n змінних, де X вектор $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, є неперервною та диференційовною в деякій обмеженій області D, $D \subset R^n$ (R^n — n-вимірний векторний простір). Функцію $f(X)$, задану на множині точок $\Omega = \{X_j\}_{j=1}^{s}$, $\Omega \in D$, потрібно наблизити узагальненим поліномом

$$F_m(a; X) = \sum_{i=0}^{m} a_i \varphi_i(X), \tag{1}$$

де $\varphi_i(X)$, $i=\overline{0,\ m}$, — система лінійно незалежних неперервних та диференційовних на D дійсних функцій, $a_i, i=\overline{0,\ m}$, — невідомі параметри: $\{a_i\}_{i=0}^{m} \in A,\ A \subseteq R^{m+1}$. Чебишовське наближення функції $f(X)$ виразом (1) з відтворенням значень функції та частинних похідних полягає в тому, що в точках підмножини $U\ (U \subset \Omega)$, $U=\{U_i\}_{i=1}^{k}$ поліном $F_m(a; X)$ відтворює значення функції $f(X)$ і її частинних похідних.

Нехай для функції $f(X)$ існують неперервні частинні похідні першого порядку в точках підмножини U. Тоді у разі відтворення значення функції $f(X)$ та її частинних похідних першого порядку

$$f(U_i)=v_{i,0}\,,\quad \left.\frac{\partial f(X)}{\partial x_r}\right|_{X=U_i}=v_{i,r},\ i=\overline{1,\ k},\ r=\overline{1,\ n}, \tag{2}$$

степінь m полінома (1) з урахуванням умови (2) повинен бути $m \geq 2k$, а необхідна кількість s точок у множині Ω має задовольняти умову $s > m+k+1$. Чебишовське наближення функції $f(X)$ з відтворенням значень функції та частинних похідних (2) полягає в отриманні такого полінома (1), який у точках $U_i\ (i=\overline{1,\ k})$ відтворює значення функції та її частинних похідних

$$F_m(a;\ U_i)=v_{i,0},\quad \left.\frac{\partial F_m(a;X)}{\partial x_r}\right|_{X=U_i}=v_{i,r}\,,\ i=\overline{1,\ k}\,,\ r=\overline{1,\ n}\,, \tag{3}$$

а найбільша похибка цього наближення

$$\Delta(a)=\max_{X\in\Omega}|f(X)-F_m(a;X)| \tag{4}$$

є найменшою можливою на множині точок Ω.

Клас поліномів $F_m(a; X)$, що задовольняють умову (3), (4), характеризується деякою множиною параметрів $(A^* \subseteq A)$, для яких ця умова справджується. Якщо існує точка $a^* \in A^*$, для якої досягається точна нижня межа найбільшої похибки апроксимації $\Delta(a)$

$$\Delta(a^*)=\inf_{A^*}\Delta(a),$$

то вираз $F_m(a^*; X)$ на множині точок Ω є чебишовським наближенням функції $f(X)$, яке у точках підмножини U відтворює значення функції та її частинних похідних (3).

Задачі наближення функцій з інтерполяційними умовами були предметом дослідження багатьох вчених [2–4]. У монографії [10] розглянуто задачі апроксимації функцій з умовами у вигляді нерівностей. Чебишовське наближення з інтерполяційною умовою має певні особливості. У разі наближення функції однієї змінної альтернансна властивість щодо чергування зміни знаку в точках альтернансу не завжди виконується. На цю особливість вказано у низці праць, зокрема в [3, 11–14]. У [15] встановлено, що чебишовське наближення з інтерполяційною умовою характеризується збігом знаків похибки наближення в точках альтернансу, сусідніх з точкою інтерполювання. Ця характеристична властивість чебишовського наближення з інтерполюванням підтверджена побудовою такого чебишовського наближення для функцій багатьох змінних [16–18].

Характеристичну властивість чебишовського наближення функцій однієї змінної з інтерполюванням значень функції та її похідних встановлено у праці [5]. У ній також запропоновано методи побудови такого чебишовського наближення з використанням схеми Ремеза [19] з відповідно модифікованим алгоритмом уточнення наближення до точок чебишовського альтернансу.

У цій статті запропоновано метод побудови чебишовського наближення функцій багатьох змінних з інтерполюванням значень функції та її частинних похідних як граничного наближення у нормі простору L^p за умови $p \to \infty$. Цей метод полягає у послідовній побудові середньостепеневих наближень з відтворенням значень функції та її частинних похідних у заданих точках. Граничне значення норми $\|\Delta\|_{E^p}$ за умови $p \to \infty$, аналогічно до норми простору L^p за умови $p \to \infty$, відповідає нормі у просторі неперервних функцій $\|\Delta\|_C$ [2, 19].

ОБЧИСЛЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ЧЕБИШОВСЬКОГО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ З ІНТЕРПОЛЮВАННЯМ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ ТА ЇЇ ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

Метод побудови чебишовського наближення таблично заданих функцій багатьох змінних з інтерполюванням значень функції та її частинних похідних ґрунтується на ідеї послідовного обчислення середньостепеневого наближення з відповідною умовою щодо відтворення значень функції та її частинних похідних у просторі E^p для $p = 2, 3, 4, \dots$ [17, 20]. Покажемо суть цього методу на прикладі обчислення параметрів наближення виразом $F_m(a; X)$ з інтерполюванням значень функції та її частинних похідних лише в одній точці U_1 з урахуванням значення частинної похідної за змінною x_1.

Нехай для функції $f(X)$ на множині точок Ω існує чебишовське наближення поліномом $F_m(a; X)$ з відтворенням значення функції та її частинної похідної за змінною x_1 в точці U_1. Для побудови такого чебишовського наближення застосуємо метод послідовних середньостепеневих наближень виразом

$$\overline{F}_m(a; X) = a_0 \varphi_0(X) + a_1 \varphi_1(X) + \sum_{i=2}^{m} a_i \varphi_i(X), \tag{5}$$

де

$$a_0 = \left(v_{1,0} - \sum_{i=1}^{m} a_i \varphi_i(U_1) \right) \Big/ \varphi_0(U_1),$$

$$a_1 = \frac{v_{1,1} - \sum\limits_{i=2}^{m} a_i \left.\dfrac{\partial \varphi_i(X)}{\partial x_1}\right|_{X=U_1} - a_0 \left.\dfrac{\partial \varphi_0(X)}{\partial x_1}\right|_{X=U_1}}{\left.\dfrac{\partial \varphi_1(X)}{\partial x_1}\right|_{X=U_1}}.$$

Вираз $\overline{F}_m(a; X)$ отримано з полінома (1) з урахуванням інтерполяційної умови (2), (3) щодо відтворення значення функції $f(X)$ і значення її частинної похідної за змінною x_1 у точці U_1. Врахування цієї умови полягає у вилученні параметрів a_0 і a_1 з полінома (1). Вилучення параметра a_0 здійснено за припущення, що $\varphi_0(U_1)$ не дорівнює нулеві, а вилучення a_1 — за припущення, що значення частинної похідної за змінною x_1 у точці U_1 не дорівнює нулеві. Під час практичної реалізації вилучення параметрів a_0 і a_1, аналогічно до методу Гауса розв'язування систем лінійних рівнянь з вибором головного елемента, для забезпечення стійкості обчислювального процесу доцільно вилучати параметр $(i = \overline{0,\ m})$, коефіцієнт біля якого є найбільшим за модулем.

Використання полінома вигляду (5) дає можливість звести задачу чебишовського наближення виразом (1) з інтерполюванням значення функції та її частинної похідної до задачі побудови чебишовського наближення функції $f(X)$ на множині точок $\Omega_u = \Omega \setminus U_1$ поліномом $\overline{F}_m(a; X)$ відносно невідомих параметрів a_i $(i=\overline{2,\ m})$. Для обчислення значень цих параметрів використаємо ітераційну схему на основі методу найменших квадратів

$$\sum_{X\in\Omega_u}\rho_{p-2}(X)(f(X)-\bar{F}_{m,p}(a;X))^2 \xrightarrow[a\in A]{} \min,\quad p=2,3,4,\ldots \qquad (6)$$

з послідовним уточненням значень вагової функції [20]

$$\rho_0(X)\equiv 1,\qquad \rho_r(X)=\rho_{r-1}(X)|\Delta_r(X)|=\rho_0(X)\prod_{i=1}^{r}|\Delta_i(X)|,\qquad (7)$$
$$r=1,\ldots,\ p-2,$$

де $\Delta_k(X)=f(X)-\bar{F}_{m,k+1}(a;X)$, $k=\overline{1,r}$, $\bar{F}_{m,k}(a;X)$ — наближення функції $f(X)$ виразом (5) з використанням методу найменших квадратів з ваговою функцією $\rho_{k-2}(X)$ на множині точок Ω_u, яке відповідає середньостепеневому наближенню степеня k.

Побудова чебишовського наближення функції $f(X)$ полягає у послідовному обчисленні середньостепеневих наближень $f(X)$ виразом $\bar{F}_m(a;X)$ для $p=2,3,4,\ldots$. Ітераційний процес (6) з ваговою функцією (7) забезпечує послідовне отримання середньостепеневих наближень $\bar{F}_{m,p}(a;X)$, $p=2,3,4,\ldots$, функції $f(X)$ у просторі E^p, які відповідно до [19, 20] збігаються до чебишовського наближення.

Завершення ітерацій (6) можна контролювати досягненням деякої заданої точності ε

$$|\mu_{p-1}-\mu_p|\le\varepsilon\mu_p, \qquad (8)$$

де

$$\mu_p=\max_{X\in\Omega_u}|f(X)-\bar{F}_{m,p}(a;X)|.$$

У разі виконання умови (8) чебишовське наближення функції $f(X)$, заданої на множині точок $X\in\Omega$, з відтворенням значення функції $f(X)$ і значення її частинної похідної за змінною x_1 у точці U_1 поліномом (1) буде мати вигляд

$$F_m(a;X)=\bar{F}_{m,p}(a;X)\ . \qquad (9)$$

Відповідно до [20] послідовне уточнення значень вагової функції (7) з урахуванням похибок відтворення значень функції $f(X)$ за результатами всіх попередніх наближень методом найменших квадратів (6) забезпечує збіжність ітераційної схеми (6), (7) під час обчислення середньостепеневих наближень з інтерполюванням у точці U_1 значення функції та її частинної похідної. Шляхом задання значення ε у (8) можна досягнути потрібної точності обчислення параметрів такого чебишовського наближення.

Обчислення параметрів чебишовського наближення узагальненим поліномом (1) з інтерполюванням значення функції та її частинної похідної в декількох точках реалізують за аналогічною схемою. За такою самою схемою реалізують і побудову чебишовського наближення з відтворенням значень частинних похідних вищого порядку, а також змішаних частинних похідних. У цих випадках під час формування полінома вигляду (5) із полінома (1) потрібно вилучити певну кількість параметрів відповідно до кількості точок інтерполювання і заданих значень частинних похідних.

ОБЧИСЛЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ЧЕБИШОВСЬКОГО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ З ІНТЕРПОЛЮВАННЯМ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ ТА ЇЇ ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ З ВІДНОСНОЮ ПОХИБКОЮ

Якщо неперервна функція $f(X)$ на множині точок Ω не набуває значень, рівних нулеві, і для неї існує неперервна частинна похідна за змінною x_1 у точці U_1, то аналогічним методом можна обчислити чебишовське наближення $f(X)$ з інтерполюванням значення функції та її частинної похідної за змінною x_1 у точці U_1 виразом (1) з відносною похибкою. Для побудови такого чебишовського наближення функції $f(X)$ застосовують ітераційну схему на основі методу найменших квадратів (6) з ваговою функцією

$$\rho_r(X) = \rho_{r-1}(X) |\Theta_r(X)| = \rho_0(X) \prod_{i=1}^{r} |\Theta_i(X)|, \quad r = 1, \ldots, p-2, \tag{10}$$

де

$$\rho_0(X) = \frac{1}{f^2(X)}, \quad \Theta_k(X) = \frac{f(X) - \overline{F}_{m,k+1}(a; X)}{f(X)}, \quad k = \overline{1, r}, \tag{11}$$

а $\overline{F}_{m,k}(a; X)$ — наближення функції $f(X)$ виразом (5) з використанням методу найменших квадратів з ваговою функцією $\rho_{k-2}(X)$.

Під час побудови наближення з відносною похибкою завершення ітерацій за схемою (6) з ваговою функцією (10) можна контролювати досягненням деякої необхідної точності ε відповідно до умови (8), в якій

$$\mu_p(X) = \max_{X \in \Omega_u} |\Theta_p(X)|,$$

де $\Theta_p(X)$ — похибка (11) наближення функції $f(X)$ виразом $\overline{F}_{m,p}(a; X)$, отриманим методом найменших квадратів (6) на $(p-1)$-й ітерації.

У результаті шукане наближення неперервної функції $f(X)$, заданої на множині точок $X \in \Omega$, виразом (5) з відносною похибкою та інтерполюванням значення функції та її частинної похідної за змінною x_1 у точці U_1 збігається з $\overline{F}_{m,p}(a; X)$:

$$F_m(a; X) = \overline{F}_{m,p}(a; X).$$

Результати обчислення параметрів чебишовського наближення з відтворенням значення функції $f(X)$ і значень її частинних похідних у заданих точках узагальненим поліномом (1) для тестових прикладів підтверджують швидку збіжність ітераційного процесу (6) з ваговими функціями (7) і (10) під час наближення функцій однієї, двох та трьох змінних.

Приклад 1. Обчислимо параметри чебишовського наближення функції $y(x) = \sqrt{0.1 + 2x + 3x^3 + 2.5x^4 + 1.75x^5}$, заданої в точках x_i, $i = \overline{0, 40}$, де $x_i = 0.05i$, поліномом четвертого степеня з відтворенням значення функції та її похідної у точці $U_1 = x_{29} = 1.4$, в якій значення функції дорівнює 5.490712158, а значення її похідної становить 7.348227125.

З використанням запропонованого методу для $\varepsilon = 0.003$ за 11 ітерацій (6) для функції $y(x)$ отримано поліном

$$P_4(a; x) = 0.3459997278 + 1.795836978x - 0.4746464649x^2 + \\ +1.67982163x^3 - 0.2729547137x^4, \tag{12}$$

який забезпечує абсолютну похибку наближення 0.0312740427. Аналогічне чебишовське наближення функції $y(x)$ поліномом четвертого степеня, обчислене за ітераційною схемою Ремеза з уточненням точок альтернансу за модифікованим алгоритмом Валле-Пуссена [5]

$$\overline{P}_4(a; x) = 0.346964491 + 1.792646244x - 0.4724033922x^2 + \\ +1.6800949026x^3 - 0.2733826156x^4, \tag{13}$$

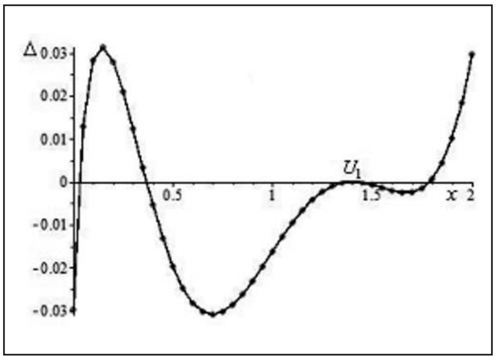

Рис. 1. Графік похибки чебишовського наближення функції $y(x)$ поліномом (12) з інтерполюванням значення функції та її похідної у точці $U_1 = 1.4$

забезпечує абсолютну похибку 0.030736727. Перевищення похибки наближення поліномом (12), порівняно з похибкою наближення, отриманого за схемою Ремеза (13), дорівнює 0.00053731549, що становить 1.72%.

Криву похибки апроксимації функції $y(x)$ поліномом (12) наведено на рис. 1.

Наведена на рис. 1 крива похибки наближення функції $y(x)$ поліномом (12) відповідає характеристичній властивості чебишовського наближення з інтерполюванням значення функції та її похідної в заданій точці [5]. Відповідно до характеристичної властивості чебишовського наближення з відтворенням значення функції та значення її похідних [5] кількість точок альтернансу t визначається формулою

$$t = m + 2 - u, \tag{14}$$

де $(m+1)$ — кількість невідомих параметрів полінома (1), а u — кількість відтворюваних значень функції та її похідних. Знаки похибки наближення в точках альтернансу, сусідніх з точкою умови, збігаються у тому разі, коли здійснюють відтворення лише значення функції. У разі відтворення значення функції та значення її похідної знаки похибок будуть різними. Під час відтворення значення функції та її першої і другої похідних знаки похибки в точках альтернансу, сусідніх з точкою умови, знову збігатимуться тощо.

Отже, відповідно до (14) крива похибки чебишовського наближення функції $y(x)$ поліномом (12) має чотири екстремальні точки, в яких досягає найбільшого за модулем відхилення. Значення модулів цих відхилень збігаються в межах заданої точності обчислення. Знак відхилень у цих точках чергується:

$$(0,\ -0.0302258228), \quad (0.15,\ 0.0312740427),$$
$$(0.7,\ -0.030915442), \quad (2,\ 0.02963250). \tag{15}$$

У точці умови $U_1 = 1.4$ значення похибки дорівнює нулеві. Екстремальні точки (15) збігаються з точками альтернансу, отриманими під час наближення (13) функції $y(x)$ за схемою Ремеза. У другій екстремальній точці (15) спостерігається дещо більше за модулем значення похибки наближення. Для досягнення кращого вирівнювання значень модулів похибок наближення в екстремальних точках можна підвищити точність обчислення чебишовського наближення, зменшивши значення ε в умові (8).

Чебишовське наближення функції $y(x)$ з точністю $\varepsilon = 0.000003$ отримано за 161 ітерацію за схемою (6)

$$P_4(a; x) = 0.3469479955 + 1.79293401x - 0.4728956472x^2 +$$
$$+1.680381463x^3 - 0.2734367783x^4\ . \tag{16}$$

Цей поліном забезпечує абсолютну похибку наближення 0.03076581. Похибка наближення (16) в екстремальних точках набуває таких значень:

$$(0,\ -0.0307202295),\ (0.15,\ 0.0.0307201814),$$
$$(0.7,\ -0.03076581),\ (2,\ 0.03072127).$$

З підвищенням точності ε обчислення наближення поліномом четвертого степеня екстремальні точки не змінилися, а значення модулів похибки наближення в цих точках майже вирівнялися. Перевищення похибки наближення поліномом (16) порівняно з похибкою наближення, отриманого за схемою Ремеза (13), дорівнює 0.000029083, що становить 0.095%.

Чебишовське наближення функції $y(x)$ поліномом четвертого степеня з відтворенням значення функції та її похідної у точці $U_1 = 1.4$ з відносною похибкою з використанням методу (6) з ваговою функцією (10) для $\varepsilon = 0.003$ отримано за 11 ітерацій. Поліном

$$\overline{P}_4(a; x) = 0.325307492 + 2.247495549x - 1.674641846x^2 + \\ +2.732950235x^3 - 0.5721591318x^4 \tag{17}$$

забезпечує відносну похибку наближення 3.08656%. Аналогічне наближення функції $y(x)$, отримане за ітераційною схемою Ремеза з уточненням точок альтернансу за модифікованим алгоритмом Валле–Пуссена [5]

$$\overline{P}_4(a; x) = 0.32560630186 + 2.25435001x - 1.717400858x^2 + \\ +2.783107668x^3 - 0.5887457659x^4 , \tag{18}$$

забезпечує відносну похибку 2.96575%.

Графік відносної похибки наближення (17) також відповідає характерним ознакам чебишовського наближення з відтворенням функції та її похідної в точці $U_1 = 1.4$ [5]. В екстремальних точках відносна похибка наближення (17) набувала таких значень (у відсотках):

$$(0,\ -2.871261469),\ (0.05,\ 3.086562116), \\ (0.45,\ -3.073698013),\ (2,\ 2.775857107). \tag{19}$$

При цьому не всі екстремальні точки (19) наближення (17) збігаються з точками альтернансу наближення (18), а саме, третя точка альтернансу знаходиться в $x_9 = 0.4$, тоді як третя екстремальна точка наближення (17) заходиться в $x_{10} = 0.45$.

Для зменшення розкиду значень модулів відхилень в екстремальних точках (19) обчислено наближення функції $y(x)$ з точністю $\varepsilon = 0.000007$. За 132 ітерації (6) отримано поліном

$$\overline{P}_4(a; x) = 0.32560630186 + 2.25435001x - 1.717400858x^2 + \\ +2.783107668x^3 - 0.5887457659x^4, \tag{20}$$

який забезпечує відносну похибку наближення 2.96649%. В екстремальних точках відносна похибка цього наближення набувала таких значень (у відсотках):

$$(0,\ -2.966318587),\ (0.05,\ 2.966229551), \\ (0.4,\ -2.966492412),\ (2,\ 2.963889389).$$

Екстремальні точки наближення (20) збігаються з точками альтернансу наближення (18), отриманого за ітераційною схемою Ремеза з уточненням точок альтернансу за модифікованим алгоритмом Валле-Пуссена [5].

Приклад 2. Обчислимо параметри чебишовського наближення функції $y(x)$ з прикладу 1 поліномом четвертого степеня з відтворенням значення функції та її першої і другої похідних у точці $U_1 = x_{29} = 1.4$. У цій точці значення функції дорівнює 5.490712158, значення першої похідної становить 7.348227125, а другої похідної — 6.560817088.

З використанням запропонованого методу для $\varepsilon = 0.003$ за 5 ітерацій (6) для функції $y(x)$ отримано наближення

$$P_4(a; x) = 0.365996339 + 1.468967513x + 0.74325605x^2 + \\ +1.366736653x^3 - 0.215494133x^4, \tag{21}$$

яке забезпечує абсолютну похибку 0.0536693518.

Криву похибки наближення функції $y(x)$ поліномом (21) наведено на рис. 2.

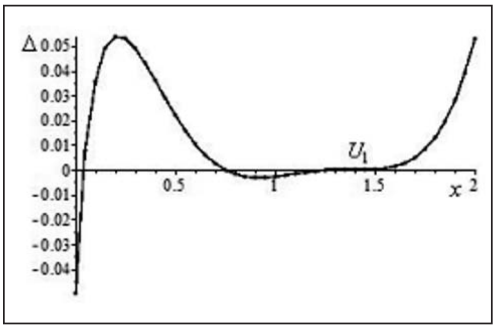

Рис. 2. Графік похибки наближення функції $y(x)$ поліномом (21) з відтворенням значення функції та її першої і другої похідних у точці $U_1 = 1.4$

Крива похибки наближення функції $y(x)$ поліномом (21) відповідає характеристичній властивості чебишовського наближення з відтворенням значення функції та її першої і другої похідних [5]. Відповідно до (14) ця крива має три екстремальні точки:

$$(0,\ -0.049768573),\quad (0.2,\ 0.0536693518),\ (2,\ 0.05279707), \tag{22}$$

в яких досягає найбільшого за модулем відхилення. Значення модулів цих відхилень збігаються в межах заданої точності. В екстремальних точках, сусідніх з точкою інтерполювання $U_1 = 1.4$, а саме в другій і третій екстремальній точці (22), знаки відхилень збігаються. В першій екстремальній точці (22) спостерігається дещо менше за модулем значення похибки наближення. Для досягнення кращого вирівнювання значень модулів похибок наближення в екстремальних точках для $\varepsilon = 0.00003$ отримано наближення

$$P_4(a; x) = 0.3523318686 + 2.086566788x - 1.279891574x^2 + \\ +2.291027573x^3 - 0.4144033331x^4 \tag{23}$$

за 62 ітерації з абсолютною похибкою 0.052543666. В екстремальних точках наближення (23) спостерігалися такі значення похибок:

$$(0,\ -0.052380553),\quad (0.2,\quad -0.052543666),\quad (2,\ 0.05235371).$$

Отже, з підвищенням точності ε обчислення наближення функції $y(x)$ поліномом четвертого степеня екстремальні точки не змінилися, а значення модулів похибки наближення в цих точках майже вирівнялися.

Чебишовське наближення функції $y(x)$ поліномом четвертого степеня з відтворенням значення функції та її першої і другої похідних у точці $U_1 = 1.4$ з відносною похибкою для $\varepsilon = 0.003$ було отримано за 7 ітерацій. Поліном

$$\overline{P}_4(a; x) = 0.327440849 + 2.14241456x - 1.250748203x^2 + \\ +2.285116276x^3 - 0.4308105112x^4 \tag{24}$$

забезпечує відносну похибку наближення 3.592%. Криву похибки наближення функції $y(x)$ поліномом (24) наведено на рис. 3.

Наведена на рис. 3 крива похибки наближення відповідає характеристичній властивості чебишовського наближення з відтворенням значення функції та її першої і другої похідних [5]. Відповідно до (14) вона має три екстремальні точки, в яких почергово змінює знак. Вимога щодо збігу знаку похибки в точках екстремуму, сусідніх з точкою умови, задовольняється неявно, оскільки всі екстремальні точки розташовані ліворуч від точки умови $U_1 = 1.4$. В екстремальних точках наближення (24) спостерігалися такі значення похибок (у відсотках):

$$(0,\ -3.460433326),$$
$$(0.1,\ 3.488372961),$$
$$(0.5,\ -3.592149931)\ .$$

Приклад 3. Побудуємо чебишовське наближення функції $z(x,\ y) = \sqrt{1 + x^2 y^2 + x^4 y^4}$, заданої в точках $(x_i,\ y_j)$, $i = \overline{0,20}$, $j = \overline{0,20}$, де $x_i = 0.05i$, $y_j = 0.05j$, поліномом

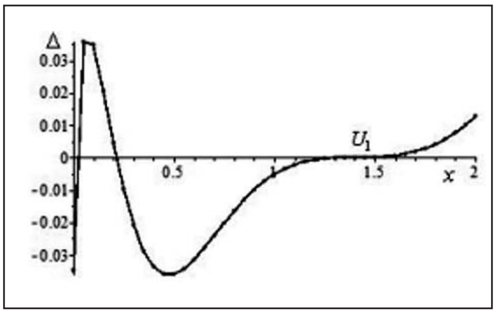

Рис. 3. Графік похибки наближення функції $y(x)$ поліномом (24) з відтворенням значення функції та її першої і другої похідних у точці U_1 = 1.4 з відносною похибкою

$$P_{3,3}(x,\ y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 (x^2 + y^2) + a_4 xy + a_5 (x^3 + y^3) \qquad (25)$$

за змінними x та y з абсолютною похибкою й інтерполюванням значення функції у точці (0.3, 0.3) та її частинної похідної за змінною x.

З використанням запропонованого методу для $\varepsilon = 0.003$ за 9 ітерацій (6) з ваговою функцією (7) для $z(x,\ y)$ отримано поліном

$$P_{3,3}(x,\ y) = 1.011614557 - 0.02259728775x - 0.02110846424y - \qquad (26)$$
$$-0.2225902564(x^2 + y^2) + 0.2134504065xy + 0.637591667(x^3 + y^3)\ ,$$

який забезпечує наближення функції $z(x,\ y)$ з абсолютною похибкою 0.011862596. У процесі ітерацій похибка наближення набувала таких значень:

0.018145539, 0.014416268, 0.012857721, 0.012649105, 0.012431550,
0.012210566, 0.012023069, 0.011877396, 0.011862596.

Поверхню похибки наближення функції $z(x,\ y)$ поліномом (26) наведено на рис. 4.

Наближення функції $z(x,\ y)$ поліномом вигляду (25) для $\varepsilon = 0.00003$ отримано за 71 ітерацію (6). Поліном

$$P_{3,3}(x,\ y) = 1.011601943 - 0.02278518305x - 0.02108309553y -$$
$$-0.2227674844(x^2 + y^2) + 0.2145979815xy + 0.6374063322(x^3 + y^3)$$

забезпечує наближення функції $z(x,\ y)$ з відтворенням значення функції та частинної похідної за змінною x у точці (0.3, 0.3) з абсолютною похибкою 0.011684458. Аналогічне чебишовське наближення функції $z(x,\ y)$ з відносною похибкою для $\varepsilon = 0.003$ отримано за 11 ітерацій (6) з ваговою функцією (10) поліномом

$$P_{3,3}(x,\ y) = 1.00877763 - 0.01031423504x - 0.009932408089y - \qquad (27)$$
$$-0.2496404643(x^2 + y^2) + 0.2094109698xy + 0.6566987156(x^3 + y^3)\ .$$

Цей поліном забезпечує відносну похибку наближення 0.897%. У процесі ітерацій (6) з ваговою функцією (10) відносна похибка наближення функції $z(x,\ y)$ поліномом (27) набувала таких значень (у відсотках):

1.8145539, 1.2057151, 1.0026065, 0.9756832, 0.9588898783, 0.9416442435,

0.9265121391, 0.9142422957, 0.9048377739, 0.8979119304, 0.8971420051.

Чебишовське наближення функції $z(x,\ y)$ поліномом вигляду (25) з інтерполюванням у точці (0.3, 0.3) значення функції та її частинної похідної за змінною x для $\varepsilon = 0.00003$ отримано за 104 ітерації (6) з відносною похибкою 0.885%.

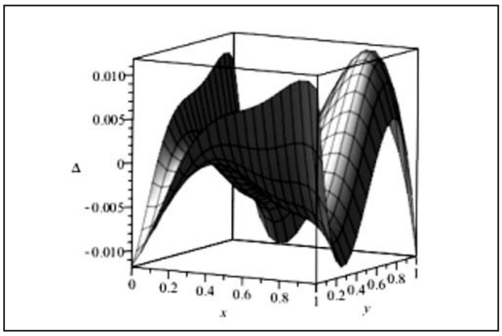

Рис. 4. Графік похибки наближення функції $z(x, y)$ поліномом (26) з інтерполюванням функції та її частинної похідної за змінною x в точці $(0.3, 0.3)$

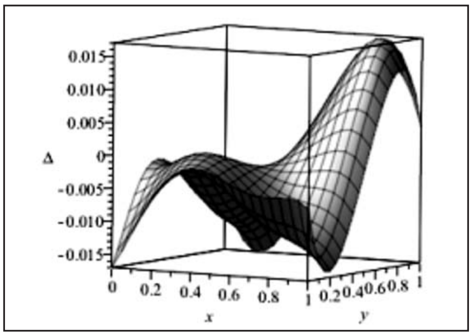

Рис. 5. Графік похибки наближення функції $z(x, y)$ поліномом (28) з відтворенням значення функції та її частинних похідних за змінними x та y у точці $(0.3, 0.3)$

Приклад 4. Знайдемо чебишовське наближення функції $z(x, y)$ поліномом вигляду (25) з абсолютною похибкою та інтерполюванням у точці (0.3, 0.3) значення функції та її частинних похідних за змінними x та y.

З використанням запропонованого методу для $\varepsilon = 0.003$ за 15 ітерацій (6) отримано поліном

$$P_{3,3}(x, y) = 1.017032766 - 0.04432459848x - 0.04317454105y - \\ -0.1453875537(x^2 + y^2) + 0.1715231526xy + 0.5930874643(x^3 + y^3), \quad (28)$$

який забезпечує наближення функції $z(x, y)$ з відтворенням значення функції та її частинних похідних за змінними x та y з абсолютною похибкою 0.017081356. Поверхню похибки наближення функції $z(x, y)$ поліномом (28) наведено на рис. 5.

Аналогічне наближення з відносною похибкою для $\varepsilon = 0.003$ отримано за 13 ітерацій поліномом

$$P_{3,3}(x, y) = 1.012014878 - 0.0267601486x - 0.02424062703y - \\ -0.1856997229(x^2 + y^2) + 0.1715231526xy + 0.6176165445(x^3 + y^3). \quad (29)$$

Наближення (29) забезпечує відносну похибку 1.21%.

Приклад 5. Знайдемо чебишовське наближення функції $z_3(x, y, t) = e^{-xyt}$, заданої в точках (x_i, y_j, t_r), $i = \overline{0,10}$, $j = \overline{0,10}$, $r = \overline{0,10}$, де $x_i = 0.1i$, $y_j = 0.1j$, $t_r = 0.1r$, поліномом першого степеня за змінними x, y та t з абсолютною похибкою та інтерполюванням у точці (0, 0, 0) значення функції та її частинної похідної за змінною x.

З використанням запропонованого методу для $\varepsilon = 0.003$ за 8 ітерацій отримано наближення функції $z_3(x, y, t)$ поліномом

$$P_1(a; x, y, t) = 1 - 0.03433746055y - 0.03433865145t - 0.006854905875xy - \\ -0.006854905875xt + 0.02819199884yt - 0.6190301664xyt$$

з абсолютною похибкою 0.043041667. Аналогічне наближення функції $z_3(x, y, t)$ для $\varepsilon = 0.00003$ отримано за 136 ітерацій з абсолютною похибкою 0.0412510837 поліномом

$$P_1(a; x, y, t) = 1 - 0.03433746055y - 0.03433865145t - 0.006854905875xy - \\ -0.006854905875xt + 0.02819199884yt - 0.6190301664xyt.$$

Наближення функції $z_3(x, y, t)$ поліномом першого степеня з відносною похибкою та інтерполюванням у точці (0, 0, 0) значення функції та її частинної похідної за змінною x для $\varepsilon = 0.003$ отримано за 18 ітерацій

$$P_1(a; x, y, t) = 1 - 0.04741963329y - 0.04741973017t - 0.01511050257xy -$$
$$-0.0151103877xt + 0.03437989145yt - 0.5636678726xyt$$

з похибкою 6.756629%. Аналогічне наближення для $\varepsilon = 0.00003$ отримано за 136 ітерацій з відносною похибкою 6.470431886% поліномом

$$P_1(a; x, y, t) = 1 - 0.04741963329y - 0.04741973017t - 0.01511050257xy -$$
$$-0.0151103877xt + 0.03437989145yt - 0.5636678726xyt\ .$$

ВИСНОВКИ

Чебишовське наближення функцій багатьох змінних узагальненим поліномом (1) з відтворенням значень функції та її частинних похідних можна обчислити за ітераційною схемою (6). Цей метод полягає у послідовній побудові середньостепеневих наближень з відповідними інтерполяційними умовами щодо значень функції та її частинних похідних. Середньостепеневі наближення обчислено за ітераційною схемою на основі методу найменших квадратів (6) з ваговою функцією (7) для наближення з абсолютною похибкою і з ваговою функцією (10) для наближення з відносною похибкою. Значення цих вагових функцій формують з урахуванням результатів наближення на попередніх ітераціях. Запропонований метод дає змогу обчислити наближення функції багатьох змінних з відтворенням значень функції та її частинних похідних із потрібною точністю. Тестові приклади підтверджують швидку збіжність запропонованого методу під час побудови наближення як з абсолютною, так і з відносною похибками.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Laurent P.–J. Approximation et Optimisation. Paris: Hermann; 1972. 531 p.
2. Collatz L., Krabs W. Approximationstheorie. Tschebyscheffsche approximation mit anwendungen. Teubner Studienbucher Mathematik (TSBMA). Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 1973. 209 p. https://doi.org/10.1007/978-3-322-94885-4.
3. Nürnberger G., Sommer M. Alternation for best spline approximation. *Numer. Math.* 1983. Vol. 41, N 2. P. 207–221. https://doi.org/10.1007/BF01390213.
4. Попов Б.А. Равномерное приближение сплайнами. Киев: Наук. думка, 1989. 272 с.
5. Малачівський П.С., Скопецький В.В. Неперервне й гладке мінімаксне сплайн-наближення. Київ: Наук. думка, 2013. 270 с.
6. Fedorchuk V., Ivaniuk V., Ponedilok V. The method of decoding signals of temperature sensors of communication network equipment based on the use of nonlinear Volterra integral models. *Proc. 2022 IEEE 4th International Conference on Advanced Trends in Information Theory (ATIT 2022)* (15-17 December 2022, online venue, Ukraine). Online venue, 2022. P. 19–22.
7. Verlan A., Fedorchuk V., Ivaniuk V., Sterten J. Using non-linear integral models in automatic control and measurement systems for sensors' input signals' recovery. *Advances in Intelligent Systems and Computing*. 2021. AISC. Vol. 1323. P. 18–25. https://doi.org/10.1007/_3.
8. Bomba A., Baranovsky S., Blavatska O., Bachyshyna L. Infectious disease model generalization based on diffuse perturbations under conditions of body's temperature reaction. *Computers in Biology and Medicine*. 2022. Vol. 146. 105561. https//doi.org/10.1016/j.compbiomed.2022.105561.

9. Bomba A.Ya., Baranovsky S.V., Pasichnyk M.S., Pryshchepa O.V. Modeling small-scale spatial distributed influences on the development of infectious disease process. *Mathematical Modeling and Computing*. 2020. Vol. 7, N 2. P. 310–321. https//doi.org/10.23939/mmc2020.02.310.

10. Корнейчук Н.П., Лигун А.А., Доронин В.Г. Аппроксимация с ограничениями. Киев: Наук. думка, 1982. 250 с.

11. Collatz L., Albrecht J. Aufgaben aus der Angewandten Mathematik I. Gleichungen in einer oder mehreren Variablen, Approximationen. Berlin: Akademie-Verlag, 1972.

12. Dunham C., Zhu C. Strong uniqueness of nonlinear Chebyshev approximation (with interpolation). *Proc. 20th Manitoba Conference on Numerical Mathematics and Computing* (September 1990, Winnipeg, Manitoba, Canada). Winnipeg, 1990. *Congressus Numerantium*. 1991. Vol. 80. P. 161–169.

13. Dunham C.B. Discrete Chebyshev approximation with interpolation. *International Journal of Computer Mathematics*. 1982. Vol. 11, N 3–4. P. 243–245.

14. Skopetskii V.V., Malachivskii P.S. Chebyshev approximation of functions by the sum of a polynomial and an expression with a nonlinear parameter and endpoint interpolation. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2009. Vol. 45, N 1. P. 58–68. https://doi.org/10.1007/s10559-009-9078-4.

15. Мельничок Л.С., Попов Б.А. Наилучшее приближение табличных функций с условием. *Алгоритмы и программы для вычисления функций на ЭЦВМ.* 1977. Вып. 4. С. 189–200.

16. Malachivskyy P.S., Melnychok L.S., Pizyur Y.V. Chebyshev approximation of the functions of many variables with the condition. *Proc. IEEE 15th International Conference on Computer Sciences and Information Technologies (CSIT 2020)* (23-26 September 2020, Zbarazh, Ukraine). Zbarazh, 2020. Vol. 1. P. 54–57. https://doi.org/10.1109/CSIT49958.2020.9322026.

17. Malachivskyy P., Melnychok L., Pizyur Ya. Chebyshev approximation of multivariable functions with the interpolation. *Mathematical Modeling and Computing*. 2022. Vol. 9, N. 3, P. 757–766. https://doi.org/10.23939/mmc2022.03.757.

18. Malachivskyy P.S., Melnychok L.S., Pizyur Y.V. Chebyshev approximation of multivariable functions by a constrained rational expression. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2023. Vol. 59, N. 1. P. 146–159. https://doi.org/10.1007/s10559-023-00552-8.

19. Ремез Е.Я. Основы численных методов чебышевского приближения. Киев: Наук. думка, 1969. 623 с.

20. Malachivskyy P.S., Pizyur Ya.V., Malachivskyi R.P., Ukhanska O.M. Chebyshev approximation of functions of several variables. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2020. Vol. 56, N 1. P. 118–125. https://doi.org/10.1007/s10559-020-00227-8.

P.S. Malachivskyy, L.S. Melnychok, Ya.V. Pizyur

CHEBYSHEV APPROXIMATION OF MULTIVARIABLE FUNCTIONS WITH REPRODUCTION OF THE VALUES OF THE FUNCTION AND ITS PARTIAL DERIVATIVES

Abstract. A method for constructing the Chebyshev approximation of a discrete multivariable function with reproduction of function's values and partial derivatives at given points is proposed. The idea of the method is based on the construction of the boundary mean-power approximation with the appropriate interpolation conditions. An iterative scheme based on the least squares method with a variable weight function is used to construct the mean-power approximation. The results of the approximation of the function of one variable confirm the fulfillment of the characteristic property of the Chebyshev approximation with the reproduction of the values of the function and the values of its derivatives at the given points. The test examples confirm the fast convergence of the proposed method.

Keywords: Chebyshev approximation, Chebyshev approximation with the condition, multivariable functions, mean-power approximation, least squares method, variable weight function, partial derivatives.

Надійшла до редакції 27.02.2023