УДК 519.8

Т.Т. ЛЕБЄДЄВА
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *lebedevatt@gmail.com.*
Н.В. СЕМЕНОВА
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *nvsemenova@meta.ua.*
Т.І. СЕРГІЄНКО
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *taniaser62@gmail.com.*

РЕГУЛЯРИЗАЦІЯ ВЕКТОРНОЇ ЗАДАЧІ З КВАДРАТИЧНИМИ КРИТЕРІЯМИ ОПТИМІЗАЦІЇ ЗА ПАРЕТО

Анотація. Стаття присвячена новим результатам щодо регуляризації векторних (багатокритерійних) задач оптимізації на допустимій множині довільної структури за можливих збурень вхідних даних векторного критерію. Розроблено і обгрунтовано підхід до регуляризації задач з квадратичними критеріальними функціями пошуку множини Парето.

Ключові слова: векторна задача, векторний критерій, оптимальність за Парето, множина Слейтера, стійкість задачі, збурення вхідних даних, квадратичні критеріальні функції, регуляризація.

ВСТУП

Математична модель векторної (багатокритерійної) оптимізації є однією з найпоширеніших моделей, оскільки вона описує економічні, воєнні, соціальні процеси (розподіл державних контрактів і дефіцитних ресурсів, формування бюджету, аналіз ризику в менеджменті щодо прийняття інноваційних, інвестиційних рішень у процесі маркетингових досліджень товарів та послуг, прогноз попиту, поведінку споживачів, визначення стратегічної стабільності тощо) [1–7].

На сьогодні для розв’язання важливих актуальних задач прийняття рішень, що виникають за можливих збурень вхідних даних та описуються векторними моделями оптимізації, все більшого значення набувають питання стійкості та регуляризації вказаних моделей. Існування нестійких (некоректно поставлених за Адамаром [8]) векторних задач природно зумовлює необхідність створення регуляризувального оператора, що вказує конкретний вигляд збурень вхідних даних задачі з метою заміни можливо нестійкої задачі серією стійких збурених. Важливий результат у цьому напрямі отримано у роботі [9], де з урахуванням теорії конусів перспективних напрямів [5] запропоновано регуляризацію за векторним критерієм і за обмеженнями векторної задачі цілочислового лінійного програмування пошуку множини Парето на обмеженій допустимій множині.

Численні роботи присвячено аналізу умов, за яких задача має ту чи іншу властивість стійкості [5, 6, 9–23]. Стійкість оптимізаційної задачі зазвичай визначається як властивість неперервності або напівнеперервності багатозначного відображення, яке кожному набору вхідних даних задачі із простору всіх можливих таких наборів ставить у відповідність визначену множину оптимальних розв’язків [5, 10]. У випадку, коли множина допустимих розв’язків скінченна, означення неперервності (напівнеперервності) спрощується і зводиться до властивості інваріантності множини розв’язків за «малих» збурень початкових даних, а складність дискретної структури множини допустимих розв'язків робить поведінку множини оптимальних розв'язків дискретної задачі непередбачуваною за умов зміни її параметрів. Ця стаття продовжує дослідження різних аспектів аналізу стійкості та регуляризації для векторних задач оптимізації на допустимій множині довільної структури, можливо дискретної, з різними критеріальними функціями та принципами оптимальності [5, 6, 9, 17–23]. Наведено нові результати щодо регуляризації векторних задач квадратичної оптимізації за можливих збурень вхідних даних векторного критерію. Здійснити процедуру регуляризації запропоновано на основі використання властивостей векторної задачі оптимізації за Слейтером.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ ТА ВЛАСТИВОСТІ

Розглянемо векторну задачу оптимізації вигляду

$$Q(F, X): \max\{F(x) \mid x \in X\},$$

де X — множина з R^n довільної структури, можливо дискретної, R^n — n-вимірний дійсний простір, $X \neq \varnothing$, $F(x) = \{f^1(x), f^2(x), \ldots, f^\ell(x)\}$, $f^i : R^n \to R^1$ — квадратичні функції вигляду $f^i(x) = \langle x, D_i x\rangle + \langle c_i, x\rangle$, $c_i = (c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{in}) \in R^n$, $D_i = [d^i_{jk}] \in R^{n\times n}$, $i \in N_\ell = \{1, 2, \ldots, \ell\}$, $j, k \in N_n = \{1, \ldots, n\}$.

Задачу $Q(F, X)$ розглядатимемо як задачу пошуку деякої підмножини множини $P(F, X)$ оптимальних за Парето розв'язків [5, 24]:

$$P(F, X) = \{x \in X \mid \pi(x, F, X) = \varnothing\}, \qquad (1)$$

де $\pi(x, F, X) = \{y \in X \mid F(y) \geq F(x), F(y) \neq F(x)\}$.

Якщо йтиметься про задачу пошуку точок множини Слейтера [5]:

$$S\ell(F, X) = \{x \in X \mid \sigma(x, F, X) = \varnothing\}, \qquad (2)$$

де $\sigma(x, F, X) = \{y \in X \mid F(y) > F(x)\}$, то таку задачу позначатимемо $Q_{Sl}(F, X)$. Задачу на відшукання точок множини Парето позначатимемо $Q_P(F, X)$.

Очевидні такі співвідношення:

$$\forall x \in X \;\; \sigma(x, F, X) \subset \pi(x, F, X) \;\text{ і }\; P(F, X) \subset S\ell(F, X).$$

Для задачі $Q(F, X)$ як вхідні дані, що можуть зазнати збурень, розглядатимемо коефіцієнти векторного критерію F. Будемо використовувати позначення, наведені у [23]. Набір вхідних даних позначимо $u = (D, C) \in U \subset R^{n\times n\times \ell} \times R^{\ell\times n}$, де U — простір вхідних даних задачі, щодо векторного критерію, $D = (D_1, \ldots, D_\ell) \in R^{n\times n\times \ell}$, $C = [c_{ij}] \in R^{\ell\times n}$. Далі, для уточнення, який саме елемент u із простору U вхідних даних відповідає задачі, що розглядається, замість позначень $F(x) = \{f^1(x), f^2(x), \ldots, f^\ell(x)\}$ для векторної цільової функції і часткових критеріїв будемо використовувати позначення $F_u(x) = (f_u^1(x), f_u^2(x), \ldots, f_u^\ell(x))$.

Для будь-якого натурального числа q дійсний векторний простір R^q розглядатимемо як нормований. Норму в R^q задамо формулою $\|z\| = \sum_{i\in N_q} |z_i|$, де $z = (z_1, z_2, \ldots, z_q) \in R^q$. Нормою деякої матриці $B = [b_{ij}] \in R^{m\times k}$ будемо вважати норму вектора $(b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{mk})$. Зазначимо [25], що у скінченновимірному просторі R^q будь-які дві норми: $\|\cdot\|^{(1)}$, $\|\cdot\|^{(2)}$, є еквівалентними, тобто існують такі числа $\alpha > 0$ та $\beta > 0$, що $\forall z \in R^q$ виконуються нерівності $\alpha \| z\|^{(1)} \le \| z\|^{(2)} \le \beta \| z\|^{(1)}$. З урахуванням цієї еквівалентності стверджуємо, що викладені далі результати є справедливими й для інших норм, уведених у скінченновимірному просторі.

Для набору вхідних даних $u \in U$ і будь-якого числа $\delta > 0$ визначимо множину $O_\delta(u)$ збурених вхідних даних як окіл точки u у просторі $R^{n \times n \times \ell} \times R^{\ell \times n}$ вхідних даних:

$$O_\delta(u) = \{u(\delta) \in U \mid \| u(\delta) - u\| < \delta\}.$$

Задача зі збуреними вхідними даними для векторного критерію матиме вигляд

$$Q(F_{u(\delta)}, X)\colon \max\{F_{u(\delta)}(x) | \, x \in X\},$$

де $u(\delta) \in O_\delta(u)$, $F_{u(\delta)}(x) = \{f^1_{u(\delta)}(x), f^2_{u(\delta)}(x), \ldots, f^\ell_{u(\delta)}(x)\}$.

Означення 1. Задачу $Q_{Sl}(F_u, X)$ $(Q_P(F_u, X))$ назвемо стійкою за векторним критерієм, якщо $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ таке, що $\forall u(\delta) \in O_\delta(u)$ виконано умову $Sl(F_{u(\delta)}, X) \subset O_\varepsilon(Sl(F_u, X))$ (відповідно $P(F_{u(\delta)}, X) \subset O_\varepsilon(P(F_u, X))$.

Тут і далі $O_\varepsilon(B) = \{x \in R^n | \inf\limits_{y \in B} \| x - y\| < \varepsilon\}$ — ε-окіл будь-якої множини $B \subset R^n$.

Зазначимо, що стійкість за векторним критерієм задачі $Q_{Sl}(F_u, X)$ $(Q_P(F_u, X))$, де $u \in U$, означає, що точково-множинне відображення $Sl\colon U \to 2^X$, $u \to Sl(u) = Sl(F_u, X)$ (відповідно відображення $P\colon U \to 2^X$, $u \to P(u) = P(F_u, X))$ є напівнеперервним зверху за Хаусдорфом у точці u.

У роботі [23] доведено таку теорему.

Теорема 1. Якщо множина X є компактом, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ таке, що $\forall u(\delta) \in O_\delta(u)$, де $u \in U$, має місце включення $Sl(F_{u(\delta)}, X) \subset O_\varepsilon(Sl(F_u, X))$, тобто задача $Q_{Sl}(F_u, X)$ пошуку точок множини Слейтера є стійкою за векторним критерієм.

Далі розглянемо питання регуляризації задачі $Q_P(F_u, X)$ оптимізації за Парето, яка є можливо нестійкою до збурень вхідних даних для векторного критерію. Під час розв'язання такої задачі за умови можливих помилок чи неточностей у поданні коефіцієнтів векторного критерію існує вірогідність отримати розв'язки, які не є її Парето-оптимальними розв'язками і навіть не є достатньо близькими до них. Дійсно, у випадку, коли задача $Q_P(F_u, X)$ не є стійкою, згідно з означенням 1 знайдеться $\varepsilon > 0$ таке, що $\forall \delta > 0$ існує набір збурених вхідних даних $u(\delta) \in O_\delta(u)$, для якого множина $P(F_{u(\delta)}, X) \setminus O_\varepsilon P(F_u, X)$ не є порожньою. У зв'язку з цим виникає необхідність у регуляризації задачі $Q_P(F_u, X)$, що дає змогу отримати її істинні розв'язки, тобто розв'язки з множини $P(F_u, X)$. Здійснити процедуру регуляризації задачі $Q_P(F_u, X)$ запропоновано на основі використання задачі оптимізації за Слейтером, яка згідно з теоремою 1 є стійкою за векторним критерієм, якщо допустима множина X є компактом.

Зауважимо, що в статті [23] викладено і обґрунтовано підхід до регуляризації можливо нестійкої за векторним критерієм задачі $Q_P(F, X)$ у окремому випадку, коли критерій F складається з лінійних функцій $f^i(x) = \langle c_i, x\rangle$, $i \in N_\ell$. Для такої задачі набір u вхідних даних, які можуть зазнавати збурень, складається з елементів матриці C, тобто $u = C \subset U \subset R^{\ell \times n}$. Позначивши таку задачу з лінійними критеріями $Q_P(F_C, X)$, зауважимо, що запропонований у [23] підхід до її регуляризації полягає у заміні можливо нестійкої задачі $Q_P(F_C, X)$ оптимізації за Парето напевно стійкою задачею $Q_{S\ell}(F_{C^\tau}, X)$ оптимізації за Слейтером, в якій матриця C^τ коефіцієнтів векторного критерію є спеціальним чином збуреною (зміненою) порівняно з початковою матрицею C. Матриця C^τ отримана з матриці C заміною кожного її вектора-рядка c_i $(i \in N_\ell)$ на такий:

$$c_i^\tau = c_i - \tau \sum_{k \in N_\ell} \mu_k c_k, \tag{3}$$

де $\tau \in R^1$ — параметр збурення, $\sum_{k \in N_\ell} \mu_k c_k \in R^n$ — внутрішня точка опуклої оболонки множини $\{c_1, c_2, \ldots, c_\ell\}$ векторів-рядків матриці C, $\sum_{k \in N_\ell} \mu_k = 1$, $\mu_k > 0$ $(k \in N_\ell)$. Саме такий спосіб збурення матриці C використано нами і раніше для розроблення підходу до регуляризації повністю цілочислової задачі векторної оптимізації з лінійними критеріальними функціями [9].

З метою регуляризації квадратичної задачі $Q_P(F_u, X)$ оптимізації за Парето, де $u = (D, C) \in U \subset R^{n \times n \times \ell} \times R^{\ell \times n}$, перейдемо до відповідної задачі $Q_{Sl}(F_{u^\tau}, X)$ оптимізації за Слейтером, в якій векторна цільова функція $F_u(x)$ замінена спеціальним чином збуреною функцією вигляду

$$F_{u^\tau}(x) = \{f_{u^\tau}^1(x), f_{u^\tau}^2(x), \ldots, f_{u^\tau}^\ell(x)\}, \tag{4}$$

де $u^\tau = (D^\tau, C^\tau)$, $\tau \in R^1$, – параметр збурення, вектори-рядки c_i^τ $(i \in N_\ell)$ збуреної матриці $C^\tau \in R^{\ell \times n}$ отримано відповідно до формули (3), $D^\tau = (D_1^\tau, D_2^\tau, \ldots, D_\ell^\tau) \in R^{n \times n \times \ell}$, $D_i^\tau = D_i - \tau \sum_{k \in N_\ell} \mu_k D_k \in R^{n \times n}$, $\sum_{k \in N_\ell} \mu_k = 1$, $\mu_i > 0$, $f_{u^\tau}^i(x) = \langle x, D_i^\tau x \rangle + \langle c_i^\tau, x \rangle$, $i \in N_\ell$. Зазначимо, що аналогічний підхід до побудови збурених матриць C^τ і D_i^τ $(i \in N_\ell)$ використаний у роботі [15] для дослідження питань регуляризації повністю цілочислової задачі векторної оптимізації з квадратичними критеріальними функціями.

РЕГУЛЯРИЗАЦІЯ ВЕКТОРНОЇ ЗАДАЧІ ЗА МОЖЛИВИХ ЗБУРЕНЬ КВАДРАТИЧНИХ КРИТЕРІЇВ

Наведена далі теорема обґрунтовує запропонований у цій роботі підхід до регуляризації задачі $Q_P(F_u, X)$ з метою запобігання помилкових розв'язків, отриманих у процесі розв'язання задачі за наявності збурень чи неточностей у вхідних даних її векторного критерію.

Теорема 2. Якщо допустима множина X задачі $Q_P(F_u, X)$ є компактом, тоді $\forall \tau < 0$ і $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ таке, що $\forall u^\tau(\delta) \in O_\delta(u^\tau)$ мають місце включення

$$S\ell(F_{u^\tau(\delta)}, X) \subset O_\varepsilon S\ell(F_{u^\tau}, X) \subset O_\varepsilon P(F_u, X). \tag{5}$$

Доведення. Враховуючи теорему 1, дійдемо висновку щодо справедливості лівої частини включень (5). Щоб упевнитися в справедливості правої частини цих включень, достатньо довести, що $\forall \tau < 0$

$$S\ell(F_{u^\tau}, X) \subset P(F_u, X). \tag{6}$$

Для цього розглянемо два можливі випадки: 1) $X = P(F_u, X)$, 2) $X \setminus P(F_u, X) \neq \varnothing$. У першому з них включення (6) є очевидним. Зауважимо також, що в цьому випадку задача $Q_P(F_u, X)$ є стійкою до збурень векторного критерію. Дійсно, виходячи від супротивного, $\exists \varepsilon > 0$ таке, що $\forall \delta > 0 \;\; \exists u(\delta) \in O_\delta(u)$ і $\exists y \in P(F_{u(\delta)}, X) \setminus O_\varepsilon P(F_u, X) \subset X \setminus P(F_u, X) \neq \varnothing$, що суперечить припущенню стосовно збігу множин $P(F_u, X)$ і X.

Розглянемо другий випадок. Виберемо будь-яку точку $z \in X \setminus P(F_u, X)$. Для неї відповідно до формули (1) маємо $\pi(z, F_u, X) = \{y \in X \,|\, F_u(y) \geq F_u(z), F_u(y) \neq F_u(z)\} \neq \varnothing$. Доведемо, що $\forall \tau < 0$ має місце включення $\pi(z, F_u, X) \subset \subset \sigma(z, F_{u^\tau}, X)$, де $\sigma(z, F_{u^\tau}, X) = \{y \in X \,|\, F_{u^\tau}(y) > F_{u^\tau}(z)\}$, що з урахуванням формули (2) буде свідчити про належність $z \in X \setminus S\ell(F_{u^\tau}, X)$ і, отже, про справедливість включення $X \setminus P(F_u, X) \subset X \setminus S\ell(F_{u^\tau}, X)$. Як результат отримаємо включення (6).

Для будь-яких $\tau < 0$, $i \in N_\ell$, $y \in \pi(z, F_u, X)$ та $\mu_k > 0$ $(k \in N_\ell)$ таких, що $\sum_{k \in N_\ell} \mu_k = 1$, оцінимо різницю

$$f^i_{u^\tau}(y) - f^i_{u^\tau}(z) = \langle y, D_i^\tau y \rangle + \langle c_i^\tau, y \rangle - \langle z, D_i^\tau z \rangle - \langle c_i^\tau, z \rangle = \left\langle y, (D_i - \tau \sum_{k \in N_\ell} \mu_k D_k) y \right\rangle +$$

$$+ \left\langle c_i - \tau \sum_{k \in N_\ell} \mu_k c_k, y \right\rangle - \left\langle z, (D_i - \tau \sum_{k \in N_\ell} \mu_k D_k) z \right\rangle - \left\langle c_i - \tau \sum_{k \in N_\ell} \mu_k c_k, z \right\rangle =$$

$$= f_u^i(y) - f_u^i(z) - \tau \sum_{k \in N_\ell} \mu_k (f_u^i(y) - f_u^i(z)) > 0 .$$

Отже, довели, що будь-яка точка $y \in \pi(z, F_u, X)$ належить множині $\sigma(z, F_{u^\tau}, X)$, і тим самим завершили доведення теореми.

Опишемо процедуру регуляризації можливо нестійкої задачі $Q_P(F_u, X)$ у випадку, коли її множина допустимих розв'язків X є компактом.

Задачу $Q_P(F_u, X)$ пошуку Парето-оптимальних розв'язків, а фактично задачу $Q_P(F_{u(\delta)}, X)$, де $u(\delta) \in O_\delta(u)$, $\delta > 0$, з можливими досить малими збуреннями (неточностями, помилками) у коефіцієнтах векторного критерію заміняємо аналогічною задачею оптимізації за Слейтером, попередньо збуривши спеціальним чином вхідні дані для її векторного критерію відповідно до формул (3) і (4). Отримана в результаті такої заміни задача $Q_{Sl}(F_{u^\tau(\delta)}, X)$, де $\tau \in R^1$ — параметр збурення, є стійкою згідно з теоремою 1. Ґрунтуючись на теоремі 2 (див. формулу (5)), дійшли висновку, що розв'язки цієї задачі будуть достатньо близькими до істинних розв'язків задачі $Q_P(F_u, X)$.

ВИСНОВКИ

Існування нестійких векторних задач зумовлює необхідність створення регуляризувального оператора, що представляє собою конкретний вид збурень вхідних даних задачі з метою заміни можливо нестійкої задачі серією стійких збурених. У статті наведено нові результати щодо регуляризації векторних задач оптимізації за умови можливих збурень вхідних даних векторного критерію, який складається з квадратичних функцій. Для векторних задач оптимізації за Парето розроблено і обґрунтовано процедуру їхньої регуляризації, що базується на використанні властивості стійкості (у визначеному розумінні) стосовно збурень коефіцієнтів векторного критерію задачі пошуку розв'язків із множини Слейтера.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Steuer R. Multiple criteria optimization: Theory, computation and application. New York: John Wiley, 1986. 546 p.
2. Ehrgott M. Multicriteria optimization. Berlin; Heidelberg: Springer, 2005. 323 p.
3. Johannes J. Vector optimization. Theory, applications, and extensions. Second edition. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. 481 p.
4. Sawaragi Y., Nakayama H., Tanino T. Theory of multiobjective optimization. New York: Academic Press, 1985. 322 p.
5. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. Киев: Наук. думка, 1995. 170 с.
6. Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения, исследования. Киев: Наук. думка, 2003. 264 с.
7. Luc D.T. Theory of vector optimization. *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. 1989. Vol. 39. Berlin: Springer. 184 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-50280-4.
8. Hadamard J. Sur les problems aux derives partielles et leur signification physique. *Princeton University Bulletin.* 1902. Vol. 13. P. 49–52.
9. Kozeratskaya L.N., Lebedeva T.T., Sergienko T.I. Regularization of integer vector optimization problems. *Cybernetics and Systems Analysis.* 1993. Vol. 29, N 3. P. 455–458. https://doi.org/10.1007/BF01125553.
10. Bank B., Guddat J., Klatte D., Kummer B., Tammer K. Non-liniar parametric optimization. Berlin: Akademie-Verlag, 1982. 226 p.
11. Белоусов Е.Г., Андронов В.Г. Разрешимость и устойчивость задач полиномиального программирования. Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1993. 272 с.
12. Greenberg H. An annotated bibliography for post-solution analysis in mixed integer and combinatorial optimization. In: *Advances in Computational and Stochastic Optimization, Logic Programming and Heuristic Search. Interfaces in Computer Science and Operations Research.* Computer Science Interfaces Series. D.L Woodruff. (ed.). New York: Springer Science+Business Media, 1998. P. 97–148. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2807-1_4.
13. Emelichev V.A., Girlich E., Nikulin Yu.V., Podkopaev D.P. Stability and regularization of vector problems of integer linear programming. *Optimization*. 2002. Vol. 51, N 4. P. 645–676. https://doi.org/10.1080/0233193021000030760.
14. Емеличев В.А., Подкопаев Д.П. Устойчивость и регуляризация векторных задач целочисленного линейного программирования. *Дискретный анализ и исследование операций.* 2001. Сер. 2. Т. 8, № 1. С. 47–69.
15. Emelichev V.A., Gurevsky E.E. On the regularization of vector integer quadratic programming problems. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2009. Vol. 45, N 2. P. 274–280. https://doi.org/10.1007/s10559-009-9101-9.
16. Emelichev V.A., Kotov V.M., Kuzmin K.G., Lebedeva T.T., Semenova N.V., Sergienko T.I. Stability and effective algorithms for solving multiobjective discrete optimization problems with incomplete information. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2014. Vol. 46, N 2. P. 27–41.
17. Kozeratskaya L.N. Vector optimization problems: Stability in the decision space and in the space of alternatives. *Cybernetics and Systems Analysis.* 1994. Vol. 30, N 6. P. 891–899. https://doi.org/10.1007/BF02366448.

18. Sergienko I.V., Lebedeva T.T., Semenova N.V. Existence of solutions in vector optimization problems. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2000. Vol. 36, N 6. P. 823–828. https://doi.org/10.1023/A:1009401209157.

19. Lebedeva T.T., Semenova N.V., Sergienko T.I. Stability of vector problems of integer optimization: Relationship with the stability of sets of optimal and nonoptimal solutions. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2005. Vol. 41, N 4. P. 551–558. https://doi.org/10.1007/s10559-005-0090-z.

20. Lebedeva T.T., Semenova N.V., Sergienko T.I. Qualitative characteristics of the stability vector discrete optimization problems with different optimality principles. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2014. Vol. 50, N 2. P. 228–233. https://doi.org/10.1007/s10559-014-9609-5.

21. Lebedeva T.T., Semenova N.V., Sergienko T.I. Properties of perturbed cones ordering the set of feasible solutions of vector optimization problem. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2014. Vol. 50, N 5. P. 712–717. https://doi.org/10.1007/s10559-014-9661-1.

22. Lebedeva T.T., Semenova N.V., Sergienko T.I. Multi-objective optimization problem: Stability against perturbations of input data in vector-valued criterion. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2020. Vol. 56, N 6. P. 953–958. https://doi.org/10.1007/s10559-020-00315-9.

23. Lebedeva T.T., Semenova N.V., Sergienko T.I. Stability and regularization of vector optimization problems under possible criteria disturbances. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2022, Vol. 58, N 5. P. 721–726. https://doi.org/10.1007/s10559-022-00505-7.

24. Pareto V. Manuel d'economie politique. Paris: V. Giard & E. Briere, 1909.

25. Ляшко І.І., Ємельянов В.Ф., Боярчук О.К. Математичний аналіз. Ч. 1. Київ: Вища школа, 1992. 495 с.

T.T. Lebedeva, N.V. Semenova, T.I. Sergienko

REGULARIZATION OF THE VECTOR PROBLEM WITH QUADRATIC CRITERIA OF PARETO OPTIMIZATION

Abstract. The article is devoted to new results related to regularization of vector (multicriteria) optimization problems on a feasible set of an arbitrary structure under possible perturbations of input data of a vector criterion. An approach to regularization of the problems of finding the Pareto set with quadratic criterion functions has been developed and substantiated.

Keywords: vector problem, vector criterion, Pareto optimality, Slater's set, stability of the problem, perturbations of initial data, quadratic criterion functions, regularization.

Надійшла до редакції 23.01.2023