

**В.О. ВАСЯНІН**

Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору  
НАН України, Київ, Україна,  
e-mail: *archukr@meta.ua*.

**О.М. ТРОФИМЧУК**

Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору  
НАН України, Київ, Україна,  
e-mail: *itgis@nas.gov.ua*.

**Л.П. УШАКОВА**

Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору  
НАН України, Київ, Україна,  
e-mail: *archukr@ukr.net*.

**МЕТОДОЛОГІЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ  
ПЕРСПЕКТИВНОГО РОЗВИТКУ ВУЗЛІВ І ТРАНСПОРТНИХ  
МАРШРУТІВ У БАГАТОПРОДУКТОВІЙ ІЄРАРХІЧНІЙ МЕРЕЖІ.  
І. ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ**

**Анотація.** Запропоновано методологію математичного моделювання поетапного розвитку вузлів і транспортних маршрутів в ієрархічній мережі з багатопродуктовими дискретними потоками кореспонденцій. Ця методологія ґрунтується на розв'язанні задач оптимізації структури зазначеної мережі та розподілу потоків. Як правило, такі мережі складаються з децентралізованої магістральної мережі та мереж у внутрішніх зонах обслуговування магістральних вузлів. У багатопродуктовій мережі кожен вузол може обмінюватися кореспонденціями (продуктами, товарами, вантажами, повідомленнями) з іншими вузлами. Кореспонденція характеризується вузлом-джерелом, вузлом-стоком та величиною, яку для мереж передачі даних задано кількістю байт, кілобайт тощо, а для транспортних мереж — кількістю тарно-штучних вантажів в упаковці уніфікованого розміру. У магістральній мережі всі кореспонденції передаються каналами зв'язку або транспортуються транспортними засобами у транспортних блоках заданого розміру (ємності, обсягу). Розглянуто основні постулати побудови математичної моделі перспективного розвитку магістральної мережі та наведено методику математичного моделювання поетапного розвитку вузлів і транспортних маршрутів, яка для кожного етапу розвитку включає прогнозування даних і параметрів мережі, розв'язання задач пакування кореспонденцій і вибір структури мережі, розв'язання задач розподілу та маршрутизації потоків транспортних блоків.

**Ключові слова:** багатопродуктові ієрархічні мережі, дискретні потоки, задачі комбінаторної оптимізації, математичні моделі, комп'ютерне моделювання.

**ВСТУП**

Зазвичай наявні та проєктовані комунікаційні мережі мають ієрархічну структуру і складаються з децентралізованої магістральної мережі та мереж у внутрішніх зонах обслуговування магістральних вузлів (внутрішніх мереж). Одними з найважливіших задач інформаційно-аналітичної системи (ІАС) управління процесами оброблення і розподілу дискретних потоків у багатопродуктовій ієрархічній мережі є прогнозування і оптимізація поетапного розвитку її інфраструктури. При цьому потрібно враховувати усі можливості якісного організаційно-технічного вдосконалення мережі за наявності обмежень на капітальні вкладення (інвестиції) і можливості їхнього освоєння. По суті, розв'язання цих задач визначає плани введення в дію виробничих потужностей і основних фондів елементів мережі (вузлових підприємств і ліній зв'язку, а саме вузлів і маршрутів транспортних засобів у транспортній мережі, вузлів і каналів зв'язку у мережі передачі даних) і трудових ресурсів за етапами розвитку. Як правило, перспективні плани розвитку складають на

декілька років (від трьох до десяти), а етапом планування виступає один рік. Результати розв'язання таких задач, а саме розподіл капітальних вкладень і інших матеріальних ресурсів за етапами впровадження, мають бути використані під час побудови більш деталізованих моделей на кожному етапі. Наприклад, для транспортних мереж потрібно розподілити всю суму капітальних вкладень етапу на придбання, модернізацію і введення в дію сортувального устаткування (ліній сортування вантажів), устаткування для навантаження-розвантаження вантажів у вузлових підприємствах, транспортних засобів для наявних і нових маршрутів перевезення. Для мереж передачі даних слід розподілити фінансові ресурси етапу на модернізацію і переобладнання між вузлами (мультиплексорами, комутаторами, маршрутизаторами тощо) і каналами зв'язку.

У кожному конкретному випадку вибір тривалості етапу перспективного прогнозування є самостійним завданням і залежить від швидкості впровадження й освоєння нової техніки та інформаційних технологій у мережевих інфраструктурах різних галузей у господарській сфері. Стійкість функціонування мережевих структур упродовж етапів планування у разі коливань навантажень у вузлах і лініях зв'язку мережі, виникнення відмов і дії випадкових чинників має бути забезпечена задачами оперативного управління.

Великий бібліографічний огляд математичних моделей, методів і алгоритмів розв'язання багатопродуктових задач (Multicommodity Network Flow Problems, MCNF) можна знайти в [1–5]. В одній з небагатьох робіт [6] розглянуто задачу маршрутизації збірних тарно-штучних вантажів у багатопродуктовій мережі, в якій здійснено інтеграцію процесів їхнього сортування та транспортування і враховано обмеження на час доставки вантажів. При цьому в один транспортний блок групують тільки ті вантажі, у яких збігаються пункти відправлення та призначення і часові вікна доставки, а обмеження на пропускні спроможності вузлів та дуг мережі не враховують. У [7, 8] описано багатопродуктові моделі маршрутизації з обмеженнями на пропускні спроможності дуг мережі та з жорсткими (the Hard Transit Time-Constrained, HTC-MCNF) та м'якими (the Soft Transit Time-Constrained, STC-MCNF) обмеженнями на час доставки вантажів, але вантажі з різними адресами призначення не об'єднують у спільні транспортні блоки.

На відміну від більшості сучасних підходів до моделювання та аналізу функціонування багатопродуктових мереж, у цій роботі розглянуто дискретні моделі транспортних процесів з цілочисловими змінними та параметрами. У практичних задачах слід враховувати процеси сортування вантажів у сортувальних центрах, обмеження на час їхньої доставки споживачеві, коливання потоків та навантажень в окремих вузлах і лініях зв'язку транспортної мережі, вантажопідйомність транспортних засобів, нелінійність приведених витрат на оброблення та транспортування потоків, а також багато інших реальних факторів та обмежень. Це зумовлює потребу в розробленні нових математичних моделей, методів, алгоритмів та інформаційної платформи для управління обробленням, розподілом і маршрутизацією потоків збірних вантажів, а також визначає важливість досліджуваної науково-прикладної проблеми для розвитку транспортної системи України.

Ця робота є продовженням низки досліджень ієрархічних мереж з дискретними потоками [9–11]. У ній запропоновано методологію математичного моделювання поетапного розвитку вузлів і транспортних маршрутів магістральної мережі, що ґрунтується на розв'язанні задач оптимізації структури мережі та розподілу потоків.

## ІЄРАРХІЧНА СТРУКТУРА МЕРЕЖІ

Кожен вузол в ієрархічній мережі має назву, унікальний індекс та порядковий номер. Кожному вузлу можна поставити у взаємно-однозначну відповідність множину індексів (номерів) інших вузлів, що кореспондуються з ним у магістральній та внутрішній мережах. У багатопродуктовій мережі кожен вузол може обмінюватися кореспонденціями (повідомленнями, вантажами) з усіма іншими вузлами. Кореспонденція характеризується вузлом-джерелом, вузлом-стоком та величиною, яку для мереж передачі даних задають кількістю байт, кілобайт тощо, а для транспортних мереж — кількістю тарно-штучних вантажів в упаковці уніфікованого розміру.

У магістральній мережі всі кореспонденції передаються каналами зв'язку або транспортуються транспортними засобами у транспортних блоках заданого розміру (ємності, обсягу). Розмір транспортного блоку вимірюють кількістю одиниць кореспонденцій, яка вміщується у цей блок (наприклад, 64 Кбайт, 40 тарно-штучних вантажів). Усі магістральні вузли є сортувальними центрами, в яких кореспонденції спочатку сортують за адресами (вузлами) призначення, а потім пакують у транспортні блоки. У мережах передачі даних роль сортувальних центрів виконують мультиплексори передачі даних, а транспортним блоком є віртуальний контейнер. Оскільки величина окремих кореспонденцій значно менша за розмір транспортного блоку, вони під час сортування (мультиплексування) можуть кілька разів і в різних вузлах об'єднуватися (упаковуватися) з кореспонденціями, що мають інші адреси призначення. У разі такого об'єднання кореспонденцій у вузлах мережі зменшується кількість напрямків їхнього сортування та кількість транспортних блоків, потрібних для їхнього пакування. Проте в окремих вузлах з'являються додаткові обсяги сортування кореспонденцій, що не досягли адреси свого призначення. До того ж збільшується час доставки одержувачу тих кореспонденцій, які проходять додаткове сортування у транзитних вузлах транспортування.

У внутрішній зоні кожного магістрального вузла знаходяться вузли доставки та збору кореспонденцій (клієнти мережі передачі даних або транспортної мережі), які можуть обмінюватися кореспонденціями між собою та з іншими вузлами ієрархічної мережі тільки через цей магістральний вузол. Передача або транспортування кореспонденцій у внутрішній мережі здійснюється регіональними провайдерами або за маршрутами внутрішніх транспортних засобів.

На рис. 1 наведено фрагменти трирівневої мережі, де  $i, j, k$  — магістральні вузли з їхніми відповідними магістральними зонами обслуговування (ЗОВ),  $m$  — вузли доставки та збору кореспонденцій у внутрішній зоні обслуговування кожного магістрального вузла (внутрішній мережі).

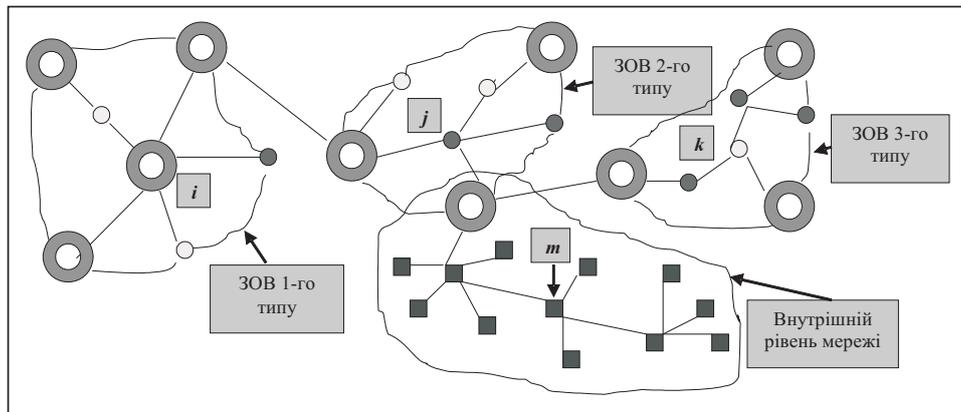


Рис. 1

Магістральні вузли різного типу відрізняються між собою функціональними можливостями, рівнем технічної оснащеності, чисельністю обслуговувального персоналу тощо. Деякі з них можуть сортувати потоки до всіх магістральних вузлів, інші — тільки потоки до магістральних вузлів у зоні свого обслуговування. В окремих магістральних вузлах може бути заборонене сортування транзитних потоків кореспонденцій та оброблення транзитних потоків транспортних блоків.

У [9] розглянуто узагальнену задачу пакування та розподілу потоків кореспонденцій в ієрархічній мережі, розв'язання якої здійснено у кілька етапів. На першому етапі розв'язують задачу вибору ієрархічної структури магістральної мережі та схеми сортування кореспонденцій у вузлах мережі, а також їхнього пакування у транспортні блоки [10]. На другому етапі постає задача розподілу та маршрутизації потоків транспортних блоків зі збірними кореспонденціями, які були сформовані під час розв'язання задачі першого етапу [11]. Під збірними кореспонденціями розуміють об'єднані в один транспортний блок повідомлення або тарно-штучні вантажі з різними адресами призначення, які можуть не збігатися з адресою призначення транспортного блоку. Збірні кореспонденції формують для того, щоб максимально скоротити кількість транспортних блоків, необхідних для їхнього пакування та передачі або транспортування у магістральній мережі.

#### **МЕТОДОЛОГІЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПОЕТАПНОГО РОЗВИТКУ ВУЗЛІВ І ТРАНСПОРТНИХ МАРШРУТІВ У МАГІСТРАЛЬНІЙ МЕРЕЖІ**

Розглянемо основні постулати побудови математичної моделі перспективного розвитку багатопродуктової комунікаційної мережі з дискретними потоками.

1. Під час прогнозування початкових даних і параметрів мережі (вихідних потоків, вартісних характеристик процесів оброблення і транспортування потоків тощо) для її поетапного розвитку використовують сучасні моделі і методи математичного моделювання на основі часових рядів даних. Це, зокрема, метод групового урахування аргументів (МГУА), методи авторегресії, нечіткі нейромережі, басівські моделі і мережі, що дають змогу отримати високоякісні прогнози для лінійних, нелінійних, стаціонарних і нестаціонарних процесів [12–15]. Більшість зазначених моделей і методів реалізована в численних пакетах програм оброблення статистичних і експериментальних даних і підтримки прийняття рішень у технічних, соціально-економічних, фінансових та інших галузях, як-от: NeuroShell2, ModelQest, ASPN, KnowledgeMiner, MatLab тощо.

2. На кожному етапі розвитку реалізуються усі багатопродуктові потоки в мережі, тобто всі потоки доставляються від посилачів (джерел) до одержувачів (стоків). Перед відправкою одержувачеві дискретні потоки кореспонденцій упаковують у транспортні блоки, причому в один транспортний блок можуть потрапити потоки з різними адресами призначення. Якщо у мережі виникають перевантаження і не можна стабілізувати її функціонування за рахунок оперативного перерозподілу потоків, то підвищення продуктивності вузлів і введення нових ліній зв'язку здійснюють за рахунок внутрішніх резервів і запасів мережевої інфраструктури.

3. Структура моделі розвитку мережі повинна забезпечувати можливість її декомпозиції на простіші підмоделі, за допомогою яких можна понизити загальну розмірність задачі і на кожному етапі розвитку виконувати почергову оптимізацію за окремими групами змінних початкової моделі. Тут йдеться про те, що під час проектування розвитку мережі на кожному етапі можна обґрунтовано розділити загальну задачу на задачі оптимізації вузлової

структури мережі і задачі оптимізації маршрутів транспортування потоків. Для задачі перспективного розвитку це означає, що розподіл фінансових і трудових ресурсів на кожному етапі можна виконувати окремо для вузлів мережі і для ліній зв'язку, розв'язуючи відповідно задачі оптимізації структури мережі і маршрутизації потоків.

Під час оптимізації структури мережі і маршрутизації потоків потрібно брати до уваги капітальні і експлуатаційні витрати. У будь-якому разі слід враховувати експлуатаційні витрати у вузлах мережі і на лініях зв'язку на утримання штату адміністративно-управлінського, інженерно-технічного і робочого персоналу; впровадження й освоєння нових інформаційних технологій і засобів автоматизації і механізації виробництва; різні організаційні заходи тощо.

4. У процесі розвитку мережі на окремих етапах допускається перехід деяких її елементів (вузлів і ліній зв'язку) на нижчі рівні стану. Інакше кажучи, можна понизити рівень технічної оснащеності елементів мережі. Якщо при цьому мережа витримує середньопоточні навантаження і є економія приведених витрат, яку отримують за рахунок оптимізації процесів оброблення і транспортування потоків, то немає потреби на цьому етапі у додаткових вкладеннях матеріальних ресурсів у розвиток мережі. Проте реалізація ресурсів, виділених на цьому етапі для проведення реконструктивних заходів, дає змогу додатково скоротити експлуатаційні витрати на оброблення і транспортування потоків. Наприклад, результатом підвищення продуктивності вузлів і вантажопідйомності транспортних засобів є зменшення питомої вартості оброблення і перевезення одиниці потоку. Тому за наявності декількох послідовних етапів, на яких мережа витримує прогнозоване навантаження, потрібно розв'язати додаткову задачу і з'ясувати, що є вигіднішим: пропустити вкладення матеріальних ресурсів на цих етапах і зробити це пізніше на подальших етапах у разі збільшення навантажень і прогнозованої девальвації ресурсів, чи використати доступні ресурси етапу та забезпечити зниження експлуатаційних витрат на подальших етапах.

5. Капітальні вкладення й інші ресурсні обмеження у вартісній формі мають бути включені як у цільову функцію, так і в систему обмежень. При цьому критерієм оптимальності може бути мінімум приведених витрат на розвиток мережі або максимум економічної ефективності (прибутку) на кінець періоду планування. Ці умови є необхідними і достатніми (за умов адекватності використовуваних функцій витрат) для зіставності і порівнянності результатів, отриманих під час числового моделювання задачі перспективного розвитку, з фактичними даними про функціонування фізичної мережі на кожному етапі її розвитку.

6. Для задач перспективного розвитку мають бути побудовані дисконтовані за часом (тобто з урахуванням коефіцієнта приведення різночасних витрат — нормативного коефіцієнта ефективності капітальних вкладень) динамічні детерміновані і стохастичні моделі. Особливу увагу слід приділити динамічним стохастичним моделям розвитку мережі, в яких у явному вигляді є одна або декілька випадкових змінних, що негативно впливають на перебіг процесу розвитку. Стохастичні моделі дають змогу отримати ймовірнісні розподіли капітальних витрат та інших ресурсів за етапами розвитку, а також оцінити міру ризику їхнього вкладання.

Наведемо методику математичного моделювання поетапного розвитку вузлів і транспортних маршрутів у магістральній мережі, яка містить такі кроки.

**Крок 1. Прогнозування даних і параметрів мережі.** Для заданої кількості етапів розвитку мережі визначити такі прогнозовані показники: величину

магістральних міжвузлових потоків; вартісні характеристики процесів оброблення і транспортування (передачі) потоків; значення інших параметрів, що впливають на експлуатаційні витрати в мережі.

### Крок 2. Задачі пакування кореспонденцій і вибору структури мережі.

Для кожного етапу розвитку мережі за прогнозованими даними розв'язати задачу оптимізації її структури, отримати схему сортування вихідних потоків і розподіл витрат на сортування потоків і витрат на навантаження-розвантаження вихідних і вхідних транспортних блоків за вузлами. Загальна схема алгоритму розв'язання задачі ґрунтована на розв'язанні задачі пакування [10]. Задача пакування виникає у магістральних транспортних мережах і опорних мережах передачі даних з дискретними потоками кореспонденцій від постачальників до одержувачів. Її суть полягає в концентрації потоків вантажів та інформації у вузлах мережі. Кореспонденції з різними адресами призначення, що виходять з вузлів мережі, можуть бути об'єднані одна з одною та упаковані у спільні транспортні блоки (контейнери або віртуальні контейнери). У результаті об'єднання потоків зменшується кількість транспортних блоків для транспортування кореспонденцій, скорочується кількість напрямків сортування кореспонденцій у вузлах мережі в інші вузли, збільшується коефіцієнт завантаження транспортних блоків і транспортних засобів, більш продуктивно використовується висока пропускна спроможність магістральних каналів зв'язку. Водночас в окремих вузлах мережі виникають транзитні потоки кореспонденцій, що призводить до зростання загальної вартості оброблення потоків у мережі і збільшення часу доставки кореспонденцій одержувачеві.

Нехай  $G(N, E)$  — ієрархічна магістральна мережа з множиною вузлів  $N = N_1 \cup N_2 \cup N_3$ ,  $n = |N|$ , де  $N_1, N_2, N_3$  — множини вузлів першого, другого і третього типу відповідно, і множиною неорієнтованих дуг  $E$ ,  $e = |E|$ . Вважатимемо, що географічні координати розміщення вузлів мережі відомі і для кожного етапу розвитку мережі відома цілочислова матриця потоків кореспонденцій між усіма вузлами мережі  $A = \|a_{ij}\|_{n \times n}$ , в якій рядки відповідають вузлам відправлення, а стовпці — вузлам призначення. До того ж є деяка перетворена матриця  $X = \|x_{ij}\|_{n \times n}$ , елементи якої є цілочисловими шуканими змінними задачі пакування. Усі кореспонденції є однорідними (одного типу), під час транспортування їх можна об'єднувати в різних вузлах і упаковувати в транспортні блоки тільки повністю. Іншими словами, заборонено їхнє розгалуження (розщеплювання, дроблення на частини) і транспортування по декількох шляхах. Потоки  $a_{ij}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , у матриці  $A$  являють собою внутрішні потоки між вузлами четвертого типу в зоні обслуговування  $i$ -го вузла, які по магістральній мережі не транспортуються. Транспортування всіх кореспонденцій у магістральній мережі має здійснюватися в деяких транспортних блоках фіксованої місткості  $\omega \gg a_{ij}$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ ,  $i \neq j$ ,  $\omega \in Z^+$ .

Потрібно для кожного етапу визначити кількісний і якісний склад вузлів мережі і схему сортування кореспонденцій у кожному вузлі, які забезпечують максимальне скорочення приведених витрат на функціонування мережі. Формально, потрібно для усіх можливих комбінацій типів вузлів розв'язати задачу пакування і знайти мінімум функції

$$F = \sum_{ij \in S} C_{tr}^{ij}(u_{ij}, d_{ij}) + \sum_{i=1}^n C_{sort}^i(x_i, q_i) + \sum_{i=1}^n C_{load}^i(u_i) \quad (1)$$

за обмежень

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n x_{ji} - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ji}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} \leq h_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

$$x_{ij}, u_{ij} \geq 0 \text{ і цілі } \forall ij \in S, \quad (4)$$

де  $S$  — множина пар індексів  $(i, j)$  вузлів, що кореспондуються;  $x_{ij} = a_{ij} + \sum_{rs} a_{rs}^*$ , якщо кореспонденцію  $a_{ij}$  не об'єднано з жодною іншою кореспонденцією, де  $\{a_{rs}^*\}$  — множина кореспонденцій, об'єднаних з кореспонденцією  $a_{ij}$ , і  $x_{ij} = 0$ , якщо кореспонденцію  $a_{ij}$  об'єднано з будь-якою іншою кореспонденцією або  $i = j$ ;  $C_{tr}^{ij}(u_{ij}, d_{ij})$  — нелінійна функція транспортних витрат, яка залежить від кількості транспортних блоків  $u_{ij} = \left\lceil \frac{x_{ij}}{\omega} \right\rceil$  (тут  $\lceil x \rceil$  — найменше ціле, яке є більшим за  $x$  або дорівнює йому)

і довжини  $d_{ij}$  шляху їхнього транспортування між вузлами  $i$  та  $j$ .

Зазвичай у математичних моделях, що описують процеси оброблення і транспортування потоків, витрати пов'язують з величиною потоку по дугах мережі або шляхах передачі потоку. Для мереж передачі даних, де дуги асоціюються з каналами зв'язку, ці постановки виявляються досить прийнятними. У разі транспортних мереж значно складніше адекватно визначити вартісні функції, наприклад  $C_{tr}^{ij}(u_{ij}, d_{ij})$ , а отже, й отримати в результаті розв'язання задачі достовірну відповідь. У задачі (1)–(4) розраховують лише орієнтовну оцінку транспортних витрат і нижню межу витрат на оброблення транспортних блоків. Тому як  $C_{tr}^{ij}(u_{ij}, d_{ij})$  можна взяти функцію залежності питомої вартості транспортування потоку величиною  $u_{ij}$  на відстань  $d_{ij}$  від вантажопідйомності транспортного засобу або пропускної спроможності каналу зв'язку, яку задають у вигляді параметра  $w_\xi \in \{w_1, w_2, \dots, w_\alpha\}$ ,  $\xi = 1, \alpha$ . Наприклад, можна вважати, що  $C_{tr}^{ij}(u_{ij}, d_{ij}) = u_{ij}(k_1^\xi + k_2^\xi d_{ij}) / w_\xi \quad \forall ij \in S$ , де  $k_1^\xi, k_2^\xi$  — задані коефіцієнти. При цьому структура мережі не залежить від вибору значення  $w_\xi$ , а транспортні витрати розраховують лише орієнтовно (для заданого значення  $w_\xi$ ) під час розподілу сформованих потоків транспортних блоків по найкоротших шляхах за таким лексикографічним критерієм: мінімум дуг у шляху, мінімум довжини шляху;  $C_{sort}^i(x_i, q_i)$  — нелінійна функція залежності витрат від сумарного об'єму сортування  $q_i = q_{in}^i + \sum_{j=1}^n \delta_{ij}$  кореспонденцій, що обробляються у вузлі  $i$  ( $\delta_{ij} = 1$ , якщо  $x_{ij} \neq 0$  і  $\delta_{ij} = 0$ , якщо  $x_{ij} = 0$ , а  $q_{in}^i$  визначає задану кількість напрямків сортування для оброблення кореспонденцій  $a_{ii}$ ,  $i = \overline{1, n}$ );  $C_{load}^i(u_i)$  — нелінійна функція залежності витрат від сумарної кількості транспортних блоків  $u_i = \sum_{j=1}^n (u_{ij} + u_{ji})$ , оброблюваних у вузлі  $i$ ;  $h_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , — максимальна пропускна спроможність  $i$ -го вузла з оброблення транзитних кореспонденцій. Для вузлів другого та третього типу  $h_i = 0$ .

Під час розв'язання задачі також враховують обмеження на час доставки  $t_{ij} \leq T_{ij} \quad \forall ij \in S$  і кількість транзитних об'єднань  $\nu_{ij} \leq \nu_{\max} \quad \forall ij \in S$ , кореспонденцій під час їхнього транспортування з вузлів відправлення у вузли призначення, де  $T_{ij}$  і  $\nu_{\max}$  — відповідно заданий час доставки кореспонденцій одержу-

вачеві і максимально допустима кількість транзитних об'єднань кореспонденцій. У розрахунку часу доставки використовують такі параметри, які в явному вигляді не входять у модель: заданий час на сортування кореспонденцій і час на транзитне перевантаження транспортних блоків у вузлах мережі, середня швидкість руху транспортних засобів або передачі повідомлень тощо (частина II цієї роботи).

Перша складова функції (1) визначає транспортні витрати, друга — витрати на сортування, а третя — витрати на оброблення транспортних блоків. Вирази (2), (3) і (4) представляють відповідно умови балансу, обмеження на пропускні спроможності вузлів і значення змінних  $x_{ij}$ .

У [10] запропоновано алгоритми для розв'язання задачі пакування з функціями витрат на оброблення і транспортування кореспонденцій, які ґрунтовані на дискретному аналогу методу локального спуску. У ньому околиці (neighborhood) метричного простору допустимих розв'язків вибирають з евристичних міркувань з урахуванням специфіки структур даних і особливостей задачі.

Слід зазначити, що під час розв'язання задачі можна не враховувати обмеження на пропускні спроможності вузлів (3). Додаткові обмеження  $t_{ij} \leq T_{ij}$ ,  $v_{ij} \leq v_{\max} \forall ij \in S$ , також можна не брати до уваги, проте на вимогу проєктувальника транспортної мережі або адміністратора мережі передачі даних усі обмеження можуть бути задані як директивні. Якщо задачу вибору структури розв'язували для транспортної мережі, то треба додатково розв'язати задачу розвезення порожніх контейнерів.

Під час розв'язання задачі для кожного етапу розвитку мережі визначають не лише структуру мережі, а й оптимальну схему сортування вихідних потоків кореспонденцій у вибраній структурі. Якщо при цьому використовують функції приведених витрат  $C_{\text{sort}}^i(x_i, q_i)$ ,  $C_{\text{load}}^i(u_i)$ , адекватні процесам сортування й оброблення, то для вузлів мережі можна отримати досить реальну оцінку їхньої величини, тобто визначити необхідні приведені витрати на функціонування вузлів на період завершення планування (друга складова функції (1) і частково третя — без урахування витрат на транзитне перевантаження транспортних блоків). Для транспортних витрат і витрат на оброблення транспортних блоків розраховують лише попередні оцінки. Реальні оцінки цих витрат можна отримати тільки після розв'язання задачі розподілу і маршрутизації сформованих транспортних блоків у транспортній мережі або мережі передачі даних (у витратах на оброблення транспортних блоків у вузлах мережі враховують тільки вхідні і вихідні потоки, транзитні потоки не беруть до уваги; для транспортних мереж не враховують витрати на перевезення й оброблення порожніх контейнерів).

Крім структури мережі, основними результатами розв'язання задачі є поточкові матриці  $X = \|x_{ij}\|_{n \times n}$  та  $U = \|u_{ij}\|_{n \times n}$  кореспонденцій і транспортних блоків відповідно; матриця попередніх оцінок часу доставки кореспонденцій одержувачам  $\tilde{T} = \|\tilde{t}_{ij}\|_{n \times n}$ ; довідкова матриця об'єднання потоків кореспонденцій  $C = \|c_{ij}\|_{n \times n}$ , елементи якої визначають так:

$$c_{ij} = \begin{cases} k, & \text{якщо потік } a_{ij} \text{ об'єднується з потоком } a_{ik}, \\ i, & \text{якщо потік } a_{ij} \text{ безпосередньо направляєється у вузол } j, \\ 0, & \text{якщо } i = j, \end{cases}$$

де  $k$  — вузол, через який виконується перетворення потоку  $a_{ij}$ . Матрицю  $C$  використовують для відновлення послідовності вузлів мережі  $\Omega_{ij} = \{(i, k_1)\}$ ,

$(k_1, k_2), \dots, (k_m, j)\}$  з проміжними вузлами  $\{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ , в яких виконують додаткове (транзитне) сортування кожного потоку  $a_{ij}$ , при цьому  $i, j=1, n$ ,  $i \neq j$ , та їхня загальна кількість  $v_{ij} = |\{k_1, k_2, \dots, k_m\}|$ , а також для розрахунку  $t_{ij}$  — часу їхньої доставки кінцевим одержувачам. Ці результати використовують як вхідні дані для розв'язання задачі розподілу та маршрутизації потоків транспортних блоків. Довідкова матриця об'єднання потоків повністю визначає схему сортування кореспонденцій у всіх вузлах мережі та адресує потоки транспортних блоків, які будуть розподілені за маршрутами транспортних засобів або каналами зв'язку. У вузлах реальної транспортної мережі або мережі передачі даних довідкову матрицю використовують для автоматизованого керування обладнанням, яке здійснює процеси сортування адресних вантажів, або як таблицю злиття повідомлень (message merging) у віртуальні контейнери.

### **Крок 3. Задача розподілу і маршрутизації потоків транспортних блоків.**

За результатами розв'язання задачі оптимізації структури мережі для кожного етапу її розвитку розв'язати задачу розподілу та маршрутизації потоків. Задача розподілу та маршрутизації дискретних багатопродуктових потоків транспортних блоків зі збірними (змішаними, об'єднаними) кореспонденціями виникає у транспортних мережах з дрібно-партійними вантажами та в магістральних опорних мережах передачі даних з технологією віртуальних контейнерів [11]. Під збірними кореспонденціями, як і раніше, розуміють об'єднані в один транспортний блок (контейнер) тарно-штучні вантажі або сполучення з різними адресами призначення, які можуть не збігатися з адресою призначення транспортного блоку. Змістовна постановка задачі полягає у виборі такої схеми розподілу і маршрутизації потоків транспортних блоків, яка забезпечує максимальне зниження приведених витрат на оброблення і транспортування потоків. Задачу слід розв'язувати в інтерактивному режимі і визначати основні техніко-економічні показники функціонування магістральної мережі у разі зміни початкових даних, параметрів і обмежень транспортної моделі. Оскільки не завжди вдається формалізувати всі чинники, що впливають на вибір найкращого розв'язку, для остаточного вибору схеми розподілу і маршрутизації потоків можна скористатися практичним досвідом диспетчерів транспортних мереж і адміністраторів мереж передачі даних, а також базою знань в інформаційно-аналітичній системі підтримки прийняття рішень.

Нехай  $G(N, P)$  — ієрархічна магістральна мережа з множиною неорієнтованих дуг  $P$ ,  $p=|P|$  і множиною вузлів  $N = N_1 \cup N_2 \cup N_3$ ,  $n=|N|$ , де  $N_1, N_2, N_3$  — множини вузлів першого, другого і третього типу відповідно. Вузли мережі відповідають пунктам сортування, відправлення, призначення і перевантаження потоків, а дуги — ділянкам доріг (для транспортних мереж) або каналам зв'язку (для мереж передачі даних), які з'єднують вузли мережі.

Потоки для кожного етапу розвитку мережі задані цілочисловими матрицями кореспонденцій (початковою  $A = \|a_{ij}\|_{n \times n}$  і перетвореною  $A' = \|a'_{ij}\|_{n \times n} = X = \|x_{ij}\|_{n \times n}$ ) та цілочисловою матрицею транспортних блоків  $\tilde{A} = \|\tilde{a}_{ij}\|_{n \times n} = U \|u_{ij}\|_{n \times n}$ . Відома також матриця попередніх оцінок часу доставки кореспонденцій одержувачам  $\tilde{T} = \|\tilde{t}_{ij}\|_{n \times n}$  та інша інформація, отримана після розв'язання задачі вибору структури мережі. Елементи матриці  $\tilde{T}$  виступають як початкові обмеження на час доставки під час розв'язання задачі розподілу і маршрутизації потоків транспортних блоків.

Нехай  $\{m_k\}$ ,  $k = \overline{1, l}$ , — задана множина проєктованих маршрутів транспортних засобів або каналів зв'язку, кожен з яких складається з послідовності вузлів і дуг мережі  $G$ , що сполучає початковий і кінцевий вузли маршруту або каналу зв'язку. Вважатимемо, що множина  $\{m_k\}$  для кожної неорієнтованої дуги мережі  $G$  містить прямий і зворотний маршрути, і у процесі розв'язання задачі у множину  $\{m_k\}$  можуть бути включені нові маршрути, генеровані за певними правилами. Множина  $\{m_k\}$  може містити декілька маршрутів, що сполучають будь-яку пару вузлів. Кожен маршрут транспортної мережі має такі характеристики: функція середньорічних приведених витрат на експлуатацію і утримання маршруту; вантажопідйомність і періодичність руху транспортних засобів; час прибуття та відправлення транспортного засобу для кожного вузла в маршруті тощо. Для кожного маршруту в мережі передачі даних задано функцію середньорічних приведених витрат на експлуатацію та утримання каналу зв'язку, його довжину і пропускну спроможність.

Побудуємо маршрутну мультимережу  $G_M(N, P_M)$  транзитивним замиканням вузлів усіх маршрутів з множини  $\{m_k\}$ , де  $N$  — множина вузлів мережі,  $P_M$  — множина її орієнтованих маршрутних дуг. Між будь-якими вузлами  $\alpha$  і  $\beta$  мережі  $G_M$  існує маршрутна дуга, якщо вони пов'язані з  $\{m_k\}$  хоча б одним маршрутом транспортного засобу або каналом зв'язку. Введемо такі змінні:  $u_{ij,k}^{\alpha\beta}$  — невідомий потік транспортних блоків з  $i$  до  $j$ , що проходить по дузі  $p_{\alpha\beta} \in P_M$ , отриманій з маршруту  $\{m_k\}$  ( $u_{ij,k}^{\alpha\beta}$  визначають дугові потоки у транспортних блоках на маршрутній мережі  $G_M$ );  $u_{ij,k}^{\eta\xi}$  — невідомий потік транспортних блоків з  $i$  до  $j$ , що проходить по дузі  $p_{\eta\xi} \in P$  на маршруті  $m_k$ .

Потрібно мінімізувати функцію

$$\sum_{k=1}^l C_{\text{tr}}^k \left( \left( \sum_{\eta\xi \in q_k} \sum_{ij \in S} u_{ij,k}^{\eta\xi} \right), d_k \right) + \sum_{\beta=1}^n C_{\text{load}}^\beta \left( \sum_{\alpha=1}^n \sum_{k=1}^l \sum_{ij \in S} (u_{ij,k}^{\alpha\beta} + u_{ij,k}^{\beta\alpha}) \right) \quad (5)$$

за обмежень

$$\sum_{\beta=1}^n \sum_{k=1}^l u_{ij,k}^{\alpha\beta} - \sum_{\beta=1}^n \sum_{k=1}^l u_{ij,k}^{\beta\alpha} = \begin{cases} \tilde{a}_{ij} & \text{для } i = \alpha, \\ 0 & \text{для } i \neq \alpha, j \neq \alpha, \\ -\tilde{a}_{ij} & \text{для } j = \alpha, \text{ де } \alpha = \overline{1, n}, ij \in S; \end{cases} \quad (6)$$

$$\sum_{\alpha=1}^n \sum_{k=1}^l \sum_{ij \in S} (u_{ij,k}^{\alpha\beta} + u_{ij,k}^{\beta\alpha}) - \sum_{j=1}^n (\tilde{a}_{\beta j} + \tilde{a}_{j\beta}) \leq 2b_\beta, \beta = \overline{1, n}; \quad (7)$$

$$\sum_{ij \in S} u_{ij,k}^{\eta\xi} \leq W_{\eta\xi}^k \text{ для всіх } \eta\xi \in q_k, k = \overline{1, l}; \quad (8)$$

$$\sum_{\beta=1}^n \sum_{ij \in S} (u_{ij,k}^{\alpha\beta} + u_{ij,k}^{\beta\alpha}) \leq b_\alpha, \alpha \in v_k, k = \overline{1, l}; \quad (9)$$

$$t_{av} = 1 / \tilde{a}_\Sigma \sum_{k=1}^l \sum_{\eta\xi \in q_k} f_{\eta\xi}^k / (W_{\eta\xi}^k - f_{\eta\xi}^k) \leq T_{\text{max}}, \quad (10)$$

$$\text{де } \tilde{a}_\Sigma = \sum_{ij \in S} \tilde{a}_{ij}, f_{\eta\xi}^k = \sum_{ij \in S} u_{ij,k}^{\eta\xi};$$

$$u_{ij,k}^{\alpha\beta} \geq 0, u_{ij,k}^{\eta\xi} \geq 0 \text{ — цілі числа.} \quad (11)$$

Передбачається, що є оператор  $\Phi: u_{ij,k}^{\alpha\beta} \Rightarrow \{u_{ij,k}^{\eta\xi}\}$ ,  $p_{\alpha\beta} \in P_M$ ,  $p_{\eta\xi} \in P$ ,  $ij \in S$ ,  $k = \overline{1, l}$ , який відображає потік по маршрутній дузі маршруту  $m_k$  у мережі  $G_M$  на відповідну підмножину дуг маршруту  $m_k$  у мережі  $G$ , і враховано обмеження на час доставки потоків кореспонденцій одержувачеві  $t_{ij} \leq \tilde{t}_{ij}$ ,  $ij \in S$ .

Зазначимо, що кількість обмежень (6) можна скоротити до кількості вузлів-джерел потоків і записати їх у такому вигляді:

$$\sum_{\beta=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^l u_{ij,k}^{\alpha\beta} - \sum_{\beta=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^l u_{ij,k}^{\beta\alpha} = \begin{cases} \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} & \text{для } i = \alpha, \\ 0 & \text{для } i \neq \alpha, j \neq \alpha, \\ -\sum_{i=1}^n \tilde{a}_{ij} & \text{для } j = \alpha, \text{ де } \alpha = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

У конкретних випадках розв'язання задачі до вказаних обмежень можуть бути додані обмеження на заборону розгалуження потоків:

$$u_{ij,k}^{\alpha\beta} = \begin{cases} \tilde{a}_{ij}, & \text{якщо потік проходить по дузі } \alpha\beta \in m_k, \\ 0 & \text{в іншому випадку.} \end{cases} \quad (12)$$

У формулах (5)–(12) уведено такі позначення:  $C_{tr}^k$  — нелінійна функція, яка визначає залежність транспортних витрат від кількості транспортних блоків, що транспортуються по маршруту  $m_k$ , і від довжини маршруту  $d_k$ . Вважатимемо, що функції приведених витрат  $C_{tr}^k$  задані для кожного маршруту з множини  $\{m_k\}$ . Для транспортних мереж характерна залежність цих функцій від робочого парку та вантажопідйомності транспортних засобів на маршруті, а для мереж передачі даних — від пропускної спроможності та довжини каналів зв'язку. Слід зазначити, що функції питомої вартості транспортування й оброблення одиниці потоку (одного транспортного блоку) тут застосовувати не можна;  $q_k$  — впорядкована множина дуг з  $P$ , що становлять маршрут  $m_k$ ;  $C_{load}^\beta$  — нелінійна функція витрат на оброблення транспортних блоків у вузлі  $\beta$ ;  $b_\beta$ ,  $\beta = \overline{1, n}$ , — максимальна пропускна спроможність  $\beta$ -го вузла у транспортних блоках. Пропускна спроможність задають для транзитних потоків, оскільки вихідні і вхідні потоки для кожного вузла мають бути оброблені безумовно. Для вузлів третього типу  $b_\beta = 0$ ;  $W_{\eta\xi}^k$  — вантажопідйомність транспортного засобу або пропускна спроможність каналу зв'язку на маршруті  $m_k$  на дузі  $\eta\xi \in P$  у транспортних блоках,  $W_{\eta\xi}^k \in \{w_1, w_2, \dots, w_\nu\}$ , де  $w_1, w_2, \dots, w_\nu$  — цілі додатні числа, впорядковані за зростанням;  $b_\alpha^k$  — обмеження на максимальну сумарну кількість транспортних блоків, яку можна обробити в транзитному вузлі  $\alpha$  на маршруті  $m_k$ ;  $v_k$  — впорядкована множина вузлів з  $N$  на маршруті  $m_k$ ;  $t_{av}$ ,  $T_{max}$  — відповідно розрахункова середня і задана максимальна затримка у транспортуванні (передачі) транспортних блоків у мережі;  $t_{ij}$ ,  $\tilde{t}_{ij}$ ,  $ij \in S$ , — відповідно розрахунковий і заданий час на доставку потоків кореспонденцій  $a_{ij}$  з  $i$  до  $j$ .

Перша складова функції визначає транспортні витрати, друга — витрати на оброблення транспортних блоків. Умови (6) забезпечують нерозривність потоку, а умови (7)–(10) є відповідно обмеженнями на пропускні спроможності вузлів, пропускні спроможності маршрутів, об'єми оброблення транспортних блоків у вузлах слідування транспортних засобів або в комутованих вузлах мережі передачі даних, та середню затримку в передачі транспортних блоків.

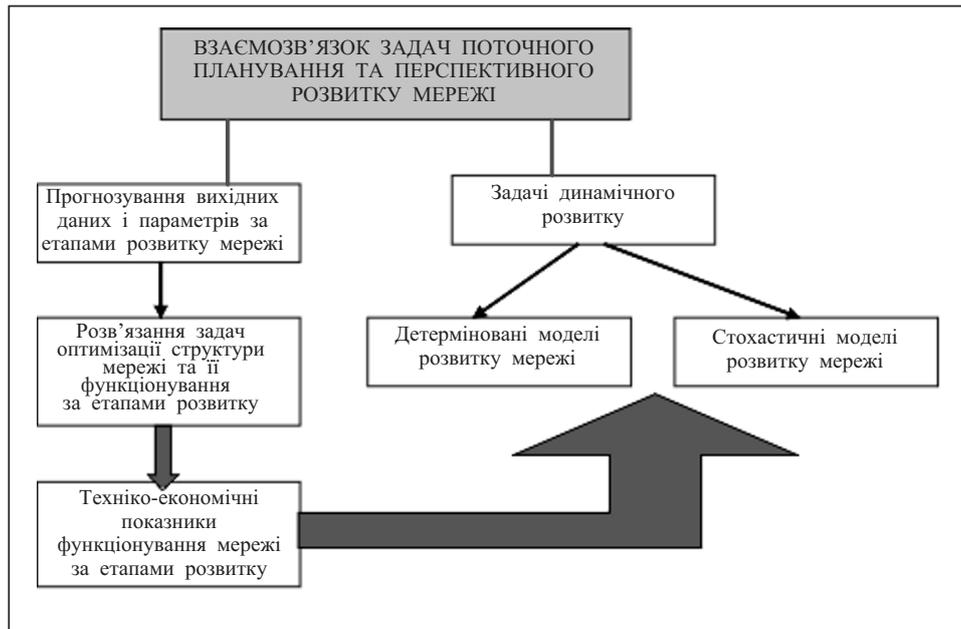


Рис. 2

Задачу (5), (6)–(12) слід розв'язати для кожного етапу розвитку мережі без урахування обмежень (7) і (9) і отримати остаточні техніко-економічні показники функціонування мережі для усіх етапів. Результати розв'язання містять для кожного вузла мережі схему сортування вихідних потоків з оцінками часу доставки кореспонденції одержувачам, витрати на сортування потоків, витрати на навантаження–вивантаження вихідних, вхідних і транзитних транспортних блоків, а також витрати на транспортування (передачу) потоків транспортних блоків на оптимізованих маршрутах і повну інформацію про шляхи їхнього транспортування.

У [9] запропоновано метод перетворення задачі (5)–(12) у послідовність  $l$ -багатовимірних задач про ранець зі зв'язувальними обмеженнями. Для розв'язання останніх побудовано низку алгоритмів, які істотно використовують специфіку структури задачі та абстрактні типи даних. Ці алгоритми дають змогу за прийнятний час отримати розв'язки задачі, які є раціональними з погляду проектувальника мережі.

На рис. 2 схематично продемонстровано, як можна використати задачі поточного планування для побудови динамічних детермінованих і стохастичних моделей поетапного розвитку мережі.

У другій частині цієї роботи на прикладі транспортної мережі буде показано, що використання задач оптимізації структури мережі та розподілу і маршрутизації потоків дає змогу отримати початкові дані для побудови динамічних детермінованих і стохастичних моделей поетапного розвитку мережі. Також буде роз'яснено, в який спосіб можна використати ці задачі для оперативного перерозподілу потоків у разі відмов устаткування у вузлах і на лініях зв'язку (внаслідок перевищення пропускних спроможностей вузлів і каналів зв'язку, вантажопідйомності транспортних засобів тощо).

## ВИСНОВКИ

1. Для ефективного управління процесами оброблення й розподілу дискретних потоків у багатопродуктовій ієрархічній мережі потрібно опти-

мізувати довгострокові, тактичні та оперативні рішення, використовуючи сучасні інформаційно-аналітичної системи (ІАС) і методи математичного моделювання та комбінаторної оптимізації. При цьому слід враховувати всі можливості якісного організаційно-технічного вдосконалення мережі за наявності обмежень на капітальні вкладення (інвестиції) та можливості їхнього освоєння. Зменшення приведених капітальних і експлуатаційних витрат за рахунок оптимізації рішень дає змогу знижувати тарифи в комунікаційних мережах, підтримувати здорову конкуренцію та постійно підвищувати якість обслуговування господарських підприємств та населення.

2. У більшості відомих робіт, присвячених розв'язанню задач оптимізації структури мережі й розподілу та маршрутизації потоків, розглянуто ідеалізовані математичні моделі, в яких не враховано багато обмежень, притаманних реальним процесам оброблення та транспортування дискретних потоків. Часто як відстань між вузлами мережі беруть евклідову відстань, коли виконується правило трикутника, а такі важливі параметри як функції витрат, відстань, час доставки кореспонденцій, час обслуговування тощо, наявні в моделях у деякому абстрактному вигляді і моделюються константами. У математичних моделях розглянутих задач оптимізації структури мережі і розподілу потоків потрібно враховувати капітальні та експлуатаційні витрати, причому капітальні вкладення та інші ресурсні обмеження у вартісній формі мають бути включені як у цільову функцію, так і в систему обмежень. Також у цих моделях слід брати до уваги всі обмеження та параметри, які дадуть змогу розрахувати технічні та економічні показники функціонування мережі на всіх етапах її розвитку, близькі до фактичних. Під час розв'язання задач визначення структури ієрархічної мережі і транспортних маршрутів потрібно враховувати реальні географічні особливості та характеристики мережі й зовнішні фактори, які складно формалізувати. Модель фізичної структури мережі слід формувати за участі досвідчених експертів і диспетчерів транспортних перевезень, а також постачальників послуг мереж передачі даних.

3. Задачі оптимізації структури мережі та маршрутизації потоків можна з успіхом застосовувати для отримання початкових даних під час побудови динамічних моделей поетапного розвитку вузлів і транспортних маршрутів мережі з дискретними потоками кореспонденцій. При цьому на кожному етапі розвитку мережі слід використовувати сучасні моделі і методи математичного моделювання і прогнозування на основі часових рядів даних, як-от: метод групового урахування аргументів, методи авторегресії, нечіткі нейромережі, баєсівські моделі і мережі тощо.

4. Автори планують застосувати запропоновану методику до побудови детермінованих і стохастичних моделей задач перспективного розвитку вузлів і транспортних маршрутів мережі для заданих обсягів інвестицій для кожного етапу розвитку і за умови їхнього обмеженого обсягу на кінцевий період планування. В умовах нестабільної економіки України в перехідний період для задач перспективного розвитку багатопродуктових комунікаційних мереж з дискретними потоками потрібно побудувати дисконтовані за часом детерміновані та стохастичні моделі. Особливу увагу слід приділити побудові стохастичних динамічних моделей розвитку мережі, що дають змогу отримати ймовірнісні розподіли капітальних витрат й інших ресурсів за етапами розвитку та оцінити міру ризику їхнього вкладення.

5. Перспективними напрямками досліджень є розроблення математичних моделей, методів та алгоритмів для довгострокового планування, які враховують ризики вкладення інвестицій у розвиток мережі, а також моделей

поточного планування та оперативного управління для визначення меж економічної ефективності вже отриманих розв'язків на задані періоди планування у разі коливання потоків та зміни параметрів моделей. Для транспортних мереж оперативна інформація в цьому випадку може надходити від GPS з бортів транспортних засобів, дронів (БПЛА), системи електронних замовлень з використанням інтернету, та пристроїв мобільного зв'язку (стільникових телефонів, планшетів, смартфонів тощо).

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Barnhart C., Hane C.A., Vance P.H. Integer Multicommodity Flow Problems. In: Network Optimization. Pardalos P.M., Hearn D.W., Hager W.W. (Eds.). *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. 1997. Vol. 450. P. 17–31. Berlin; Heidelberg: Springer, 1997. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-59179-2\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-642-59179-2_2).
2. Barnhart C., Hane C.A., Vance P.H. Using branch-and-price-and-cut to solve origin-destination integer multicommodity flow problems. *Operations Research*. 2000. Vol. 48, N. 2. P. 318–326. <https://doi.org/10.1287/opre.48.2.318.12378>.
3. Encyclopedia of Optimization. Second Ed. Floudas C.A., Pardalos P.M. (Eds.). New York: Springer, 2009. 4626 p.
4. Wang I-L. Multicommodity network flows: a survey, part I: applications and formulations. *International Journal of Operations Research*. 2018. Vol. 15, N. 4. P. 145–153. [https://doi.org/10.6886/IJOR.201812\\_15\(4\).0001](https://doi.org/10.6886/IJOR.201812_15(4).0001).
5. Wang I-L. Multicommodity network flows: a survey, part II: solution methods. *International Journal of Operations Research*. 2018. Vol. 15, N. 4. P. 155–173. [https://doi.org/10.6886/IJOR.201812\\_15\(4\).0002](https://doi.org/10.6886/IJOR.201812_15(4).0002).
6. Cohn A., Root S., Wang A., Mohr D. Integration of the load matching and routing problem with equipment balancing for small package carriers. *Transportation Science*. 2007. Vol. 41, Iss. 2. P. 238–252. <https://doi.org/10.1287/trsc.1060.0174>.
7. Hellsten E., Koza D.F., Contreras I., Cordeau J.F., Pisinger D. The transit time constrained fixed charge multi-commodity network design problem. *Computers & Operations Research*. 2021. Vol. 136. Article number 105511. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2021.105511>.
8. Trivella A., Cornan F., Koza D.F., Pisinger D. The multi-commodity network flow problem with soft transit time constraints: Application to liner shipping. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*. 2021. Vol. 150. Article number 102342. <https://doi.org/10.1016/j.tre.2021.102342>.
9. Trofymchuk O.M., Vasyanin V.A. Simulation of packing, distribution and routing of small-size discrete flows in a multicommodity network. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2015. Vol. 47, Iss. 7. P. 15–30. <https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v47.i7.30>.
10. Trofymchuk O.M., Vasyanin V.A., Kuzmenko V.N. Optimization algorithms for packing of small-lot correspondence in communication networks. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. Vol. 52, N. 2. P. 258–268. <https://doi.org/10.1007/s10559-016-9822-5>.
11. Vasyanin V.A., Trofymchuk O.M., Ushakova L.P. Problem of groupage cargo routing in the multicommodity transport network with given tariffs and delivery time constraints. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2022. Vol 58, N 6. P. 966–976. <https://doi.org/10.1007/s10559-023-00531-z>. <https://rdocu.be/c2Vh9>.

12. Bidyuk P., Gozhij A., Matsuki Y., Kuznetsova N., Kalinina I. Modeling and forecasting economic and financial processes using combined adaptive models. *Proc. XV International Scientific Conference "Intellectual Systems of Decision-Making and Problems of Computational Intelligence" (ISDMCI'2020)* (25–29 May 2020, Kherson, Ukraine). Kherson, 2020. In: *Lecture Notes in Computational Intelligence and Decision Making*. Babichev S., Lytvynenko V., Wójcik W., Vyshemyrskaya S. (Eds.). AISC. 2021. Vol. 1246. P. 395–408. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-54215-3\\_25](https://doi.org/10.1007/978-3-030-54215-3_25).
13. Bidyuk P., Kalinina I., Gozhij A. Methodology of constructing statistical models for nonlinear non-stationary processes in medical diagnostic systems. *Proc. 3rd International Conference on Informatics & Data-Driven Medicine — IDDM'2020* (19–21 November 2020, Växjö, Sweden). Växjö, 2020. *CEUR Workshop Proceedings*. 2020. Vol. 2753. P. 36–45. URL: <http://ceur-ws.org/Vol-2753/paper4.pdf>.
14. Bidyuk P., Gozhij A., Kalinina I., Vysotska V. Methods for forecasting nonlinear non-stationary processes in machine learning. *Proc. 3rd International Conference on Data Stream Mining and Processing — DSMP 2020* (21–25 August 2020, Lviv, Ukraine). Lviv, 2020. In: *Data Stream Mining & Processing*. Babichev S., Peleshko D., Vynokurova O. (Eds.). CCIS. 2020. Vol. 1158. P. 470–485. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-61656-4\\_32](https://doi.org/10.1007/978-3-030-61656-4_32).
15. Kuznetsova N., Bidyuk P. Integrated approach to financial data analysis, modeling and forecasting. *Proc. 2020 IEEE 2nd International Conference on System Analysis & Intelligent Computing — SAIC* (5–9 October 2020, Kyiv, Ukraine. Kyiv, 2020). In: *System Analysis & Intelligent Computing*. Zgurovsky M., Pankratova M. (Eds.). SCI. 2022. Vol. 1022. P. 315–337. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-94910-5\\_16](https://doi.org/10.1007/978-3-030-94910-5_16).

**V.A. Vasyanin, O.M. Trofymchuk, L.P. Ushakova**

**METHODOLOGY OF THE MATHEMATICAL MODELING FOR PERSPECTIVE DEVELOPMENT OF NODES AND TRANSPORT ROUTES IN A MULTICOMMODITY HIERARCHICAL NETWORK. I. OPTIMIZATION PROBLEMS**

**Abstract.** The paper proposes a methodology for mathematical modeling of the step-by-step development of nodes and transport routes in a hierarchical network with multicommodity discrete flows of correspondence based on solving the problems of optimizing its structure and distribution of flows. As a rule, such networks consist of a decentralized trunk network and networks in the internal service areas of trunk nodes. In a multicommodity network, each node can exchange correspondence (products, goods, cargo, messages) with other nodes. Correspondence is characterized by a source node, a sink node, and a quantity, which for data transmission networks is given by the number of bytes, kilobytes, etc., and for transport networks by the number of cargo units in a package of uniform size. In the trunk network, all correspondence is transmitted via communication channels or transported in vehicles in transport blocks of a given size (capacity, volume). The authors considered the main postulates of generating a mathematical model of the perspective development of the trunk network and gave a method of mathematical modeling of the step-by-step development of nodes and transport routes, which includes, for each stage of development, the forecasting of data and network parameters, solving the problem of packing correspondence and choosing the structure of the network, solving the problem of distribution and routing of flows of transport blocks.

**Keywords:** multicommodity hierarchical networks, discrete flows, combinatorial optimization problems, mathematical models, computer simulation.

*Надійшла до редакції 06.06.2023*