УДК 519.21

О.А. ВОЙНА
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *avoina@hotmail.com.*

ДЕЯКІ МОДЕЛІ ОПТИМІЗАЦІЇ РІВНЯ ЗАПАСІВ У ЛОГІСТИЧНИХ ПРОЦЕСАХ

Анотація. Розглянуто задачі оптимального керування запасами в умовах невизначеності та запропоновано підходи до побудови стратегій, близьких до оптимальних, у моделях із зовнішнім постачанням ресурсів. Розглянуто, зокрема, покрокове узагальнення відповідних детермінованих задач введенням до них елементів невизначеності. На прикладах конкретних процесів запасання в логістичних системах, що характеризуються наявністю моментів регенерації, проілюстровано методологію аналітико-комп'ютерного моделювання та алгоритми знаходження оптимальних розв'язків.

Ключові слова: логістичні процеси, керування запасами, розв'язки в умовах невизначеності, зовнішнє постачання, оптимальна стратегія, комп'ютерне моделювання.

НЕВИЗНАЧЕНІСТЬ, ЯК ЕЛЕМЕНТ ЛОГІСТИЧНОГО ПРОЦЕСУ

Логістика — це одна із сучасних економічних дисциплін, використовувана під час досліджень функціонування ринку для ефективного керування господарською діяльністю. До головних її завдань відносять таку організацію господарських процесів, що гарантує споживачу можливість вчасно, у визначеному місці та за прийнятною ціною отримати своє замовлення. Попри те, що логістика має військове походження і її формування почалося ще в стародавні часи, сьогодні вже не виникає дискусії як щодо сутності господарських процесів, які охоплює назва «логістичне керування», так і щодо типу такого керування у військового командування чи в цивільних або змішаних структурах. Однак варто визнати, що натепер ще не існує єдиного загальноприйнятого погляду на логістику і не опрацьовано ще єдиного трактування всіх її понять, немає узгодженої єдиної термінології [1]. Часто як науковці, так і практики, використовуючи те саме поняття, розуміють його по-різному. Але, попри різне сприйняття, всі ці поняття так чи інакше описують і узагальнюють реальні процеси фізичного переміщення сировини та матеріалів, інформації, фінансів, а також керування цими процесами в операційному, тактичному і стратегічному аспектах.

Обов'язковим елементом будь-якої логістичної системи, що зумовлює характер процесів фізичного переміщення всіх наявних у ній ресурсів, є прийнята стратегія керування. Реалізацію будь-якого господарського проєкту слід розглядати як функціонування складної системи, в якій логістика відіграє роль окремої підсистеми. Своєю чергою, логістичний процес — це теж складна система, а системний підхід до її вивчення значною мірою зумовив швидкий розвиток логістики як окремої галузі наукових знань. Системний підхід до прийняття керувальних рішень базується на побудові формальної економіко-математичної моделі логістичної системи. Така модель повинна детально описувати всі головні її елементи, зв'язки між ними та адекватно відображати динаміку функціонування [2].

Ключовим у формуванні стратегій керування логістичними процесами є встановлення оптимального рівня запасів, тобто такого, що забезпечує ефективне функціонування всієї системи. Умови невизначеності, в яких відбуваються реальні логістичні процеси переміщення різноманітних ресурсів, суттєво ускладнюють розв'язання цієї проблеми. Тому оптимізація реальних логістичних процесів полягає у виборі в кожній конкретній ситуації найкращого розв'язку з множини всіх допустимих. Враховуючи невизначеність як невід'ємну рису будь-якого реального логістичного процесу, можна стверджувати, що кожна формальна його модель — це лише більш або менш вдале наближення реального процесу. Стратегія керування, побудована на її основі, буде лише наближенням до кращої стратегії. Отже, з практичної точки зору слід вибирати, можливо, не найкращі, а лише близькі до оптимальних розв'язки, які до того ж є зручними у використанні. Один із шляхів реалізації такого підходу полягає в тому, щоб розпочати аналіз реальних процесів фізичного переміщення наявних ресурсів (сировини, матеріалів, інформації, фінансів тощо) з побудови наближених детермінованих математичних моделей. Таким чином, отримуємо можливість усвідомити суть завдань матеріального забезпеченням виробничих процесів та вибрати способи їхнього формального відтворення. Введенням до цих моделей окремих елементів невизначеності з наступним узагальненням відповідних розв'язків поступово розширюємо коло практичних задач, для яких будемо мати обґрунтовані оптимальні (або близькі до них) розв'язки.

На використанні такого підходу базується також метод аналітично-комп'ютерного моделювання, коли в процесі прийняття рішень можуть використовуватись як точні розв'язки для окремих фрагментів моделі, так і результати комп'ютерного моделювання тих фрагментів, для яких точні розв'язки не вдається знайти.

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ КЕРУВАННЯ ЗАПАСАМИ

Звільнення зайвих «заморожених» зворотних засобів є суттєвим кроком до підвищення економічної ефективності будь-якого господарського процесу, а отже, стратегічною задачею для його логістики. Тому, насамперед необхідно встановити відповідний до потреб нормального функціонування рівень запасів. Визначивши оптимальну стратегію керування запасами, створимо потрібні передумови для побудови оптимальної стратегії керування всією логістичною системою.

У найбільш загальному вигляді класичну динамічну модель керування запасами описують змінні $\{Z_n, X_n, Y_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, чи $\{Z(t), X(t), Y(t)\}$, $t \geq 0$, відповідно у випадку дискретного та неперервного часу [3]. При цьому змінна Z — величина запасу, X — вхідний потік (кількість запасів, яка надходить до сховища), Y — вихідний потік (кількість запасів, що виходить зі сховища). Кожна з цих змінних може бути як випадковою величиною, так і визначатися детерміновано згідно з вибраною стратегією керування запасами.

Наступним базовим поняттям моделі (залежно від її типу) є попит $\xi_n, n = 0, 1, 2, \ldots$, чи $\xi(t)$, $t \geq 0$, який також може бути як випадковим, так і детермінованим. Розмір запасу у випадку дискретної моделі визначається рекурентними співвідношеннями $Z_{n+1} = Z_n + X_n - Y_n$ чи $dZ(t) = X(t) - Y(t)$ відповідно у випадку моделі з неперервним та дискретним часом. При цьому змінна Z в залежності від співвідношення між розміром запасу та величиною попиту може бути як додатною, так і від'ємною. Від'ємні значення Z вказують розмір дефіциту незадоволеного попиту. Вочевидь допускається, що описана загальна схема може мати нескінченну кількість своїх конкретних втілень. Для кожного з них будуть потрібні окремі методи дослідження та способи отримання розв'язків. Це, своєю чергою, залежить від способу формалізації таких категорій, як мета керування, раціональна поведінка, стратегія керування тощо, та чітке визначення поняття «оптимальна стратегія керування». Суттєво впливає на стратегію керування спосіб постачання та характер попиту на предмети постачання, їхня структура, способи поповнення і використання ресурсу та відповідні економічні чинники. Це, зокрема, витрати на зберігання ресурсу, який запасається, що залежать від його обсягу, вартість поставок включно з коштами на замовлення кожної нової партії, штрафні виплати внаслідок дефіциту тощо.

Саме детальний аналіз перелічених чинників значною мірою дає змогу за допомогою цільової функції відповідної моделі керування запасами відобразити головну мету та вибрану стратегію керування. Ключову роль при цьому відіграють різноманітні групи обмежень, які можуть стосуватися всіх елементів моделі. Особливу групу утворюють обмеження для елементів невизначеності в функціонуванні логістичних систем, які зумовлюють їхній стохастичний характер. З практичної точки зору є виправданим підхід, побудований на поступовому впровадженні до формальної моделі обмежень цієї групи. Формалізація логістичного процесу розпочинається з побудови наближеної детермінованої моделі, яка відображає суть завдань матеріального забезпечення та способів їхнього формального втілення.

Дослідивши таку наближену до адекватної модель, можна будувати, можливо, не оптимальні (тобто формально найкращі), але цілком прийнятні з практичної точки зору (а головне — прості в реалізації) розв'язки.

Модель з зовнішнім постачанням. Припустимо, що в початковий момент часу $t_0 = 0$ у системі є деякий запас необхідного ресурсу обсягом K_0. Ресурс використовується безперервно, а попит на нього визначається коефіцієнтом споживання k. Обсяг p повторного замовлення не залежить від його номера і при цьому $K_0 = p$. Вартість здійснення повторного замовлення становить l за ціною ресурсу c, вартість збереження одиниці запасу ресурсу — L, а відсутність ресурсу є недопустимою. Замовлення ресурсу у зовнішнього постачальника відбуваються в момент зниження запасу до рівня $K_{kr} < K_0$, τ — термін постачання, після чого система повертається в початковий стан. Побудова математичної моделі передбачає також чітке математичне окреслення елементів невизначеності, що відповідають параметрам $\{p, k, K_{kr}, c, l, L, \tau\}$. Зазвичай реалізується це за допомогою засобів теорії ймовірності, а конкретні значення цих параметрів ототожнюються з випадковими величинами.

Отже, використовуючи запропонований підхід, будемо спочатку вважати, що загальний час функціонування системи становить одну умовну одиницю, загальний обсяг попиту на ресурс дорівнює K, а параметри є сталими величинами. Тоді коефіцієнт використання ресурсу $k = K$. Таким чином, легко переконатися, що загальні витрати F на функціонування системи становлять $F = K \cdot c + l \cdot \dfrac{K}{p} + \dfrac{L \cdot p}{2}$. Метою керування є зменшення сукупних витрат на функціонування системи, а головним інструментом досягнення поставленої мети є можливість керування обсягом p повторного замовлення. Тому стратегією керування $\{p\}$ будемо називати довільне число p, що належить відрізку $p \in [\tau \cdot K, K]$, натомість оптимальною буде така стратегія $\{p_{\text{opt}}\}$, для якої виконується умова

$$F(p_{\text{opt}}) = \min_{\tau \cdot K \le p \le K} F(p) = \min_{\tau \cdot K \le p \le K} \left[K \cdot c + l \cdot \frac{K}{p} + \frac{L \cdot p}{2} \right].$$

Очевидно, що оптимальна стратегія $\{p_{\text{opt}}\}$ існує, а значення оптимального обсягу замовлення визначає формула $p_{\text{opt}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot l \cdot K}{L}}$. Величина p_{opt} називається економічним обсягом замовлення [4], а мінімальні витрати за весь час функціонування системи будуть становити $F(p_{\text{opt}}) = K \cdot c + \sqrt{2 \cdot l \cdot K \cdot L}$.

Природним узагальненням розглянутої задачі є модель з інтервалами різних рівнів цін, коли ціна товару $c = c(p)$ залежить від обсягу p повторного замовлення. Очевидно, що зміна ціни буде мати вплив на всю математичну модель. Припустимо, що маємо r можливих знижок на ціну товару $c = c_0 > c_1 > c_2 > \ldots > c_r$, що залежать від обсягу замовлення p. Встановлено r відповідних рівнів $P_1 < P_2 < \ldots < P_r$ корегування цін та утворено $(r+1)$ цінових інтервалів $\{[P_i, P_{i+1}],\ i = 0,1,2,\ldots, r\}$, де $P_0 = 0$, $P_{r+1} = K$. Для кожного з них встановлено ціну ресурсу $\{c_i, i = 0,1,2,\ldots, r\}$. Нехай $F^{(i)}(p)$, $p \in [P_i, P_{i+1}]$, означає цільову функцію моделі, в якій ціна ресурсу c_i, $i = 0,1,2,\ldots, r$. Тоді можна запропонувати таку методику визначення оптимального обсягу замовлення $\{p_{\text{opt}}\}$:

1) для кожного рівня цін c_i, $i = 0,1,2,\ldots, r$, не беручи до уваги обмеження $p \in [P_i, P_{i+1}]$, знаходимо економічний обсяг замовлення $p_{\text{opt}}^{(i)}$, $i = 0,1,2,\ldots, r$, якому відповідає мінімальне значення цільової функції;

2) для кожного $i = 0,1,2,\ldots, r$ знаходимо мінімальне значення цільової функції $F^{(i)}(p)$ та точку $p_{\text{opt}}^{(i)}$, в якій це значення досягається;

3) якщо $p_{\text{opt}}^{(i)} \in [P_i, P_{i+1}]$, то $\min\limits_{P_i \le p \le P_{i+1}} F^{(i)}(p) = F^{(i)}(p_{\text{opt}}^{(i)})$;

4) якщо $p_{\text{opt}}^{(i)} < P_i$, то в інтервалі $p \in [P_i, P_{i+1}]$ за ціною c_i цільова функція $F^{(i)}(p)$ буде набувати мінімального значення в точці P_i: $\min\limits_{P_i \le p \le P_{i+1}} F^{(i)}(p) = F^{(i)}(P_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, r$;

5) у випадку $p_{\text{opt}}^{(i)} > P_{i+1}$ відповідно $\min\limits_{P_i \le p \le P_{i+1}} F^{(i)}(p) = F^{(i)}(P_{i+1})$, $i = 0,1,2,\ldots, r$.

Послідовність розгляду окремих інтервалів надання знижки та будування алгоритму визначення оптимального обсягу замовлення буде залежати від конкретних умов функціонування моделі.

Приклад 1. Припустимо, що параметри базової моделі набувають такі значення: $K = 12000$, $c = 30$, $l = 60$, $L = 20\%$. Одиниця виміру продукту, що зберігається, — штуки, а базова одиниця часу складається з $S = 400$ умовних одиниць, при цьому час реалізації одного замовлення становить $\tau = 10$ умовних одиниць. Початковий обсяг запасу $K_0 = p$. Точне значення економічного обсягу замовлення $p_{\text{opt}} = 489.898$. Оскільки йдеться про продукт, кількість якого вимірюється цілими числами, то найкращим з практичної точки зору буде замовлення обсягом $p^* = 490$. Аналогічно, втілюючи засаду «еластичності системи підтримки прийняття рішень», замість точного значення кількості циклів $n_K = \dfrac{K}{p_{\text{opt}}} = 24.495$, довжини циклу $\theta = \dfrac{S}{n_K} = 16.33$ та моменту $t_1 = 6.33$ складання повторного замовлення вибираємо обґрунтовані з практичної точки зору, близькі до них значення і отримуємо таку оптимальну стратегію: початковий запас має бути на рівні $K_0 = 490$ одиниць; перше замовлення необхідно скласти після моменту $t_1^* = 6$. Довжина реального циклу буде становити $\theta^* = 16$ умовних одиниць, а їхня кількість $n_K^* = \left(\dfrac{K}{p_{\text{opt}}} \right)^* = 25$. Оптимальні загальні витрати $F(p_{\text{opt}}) = 362939.4$. При цьому загальна вартість запасання продукту дорівнює 2939.39, що становить лише 0.85 % загальних витрат. Повторне замовлення обсягом $p^* = 490$ одиниць необхідно складати в момент, коли величина запасу знизиться до рівня $K_{kr} = \dfrac{K \cdot \tau}{S} = 300$.

Додамо до параметрів моделі два нових: $P = 550$ і $\Delta = 10\,\%$. Утворимо два інтервали різних рівнів цін: $\{([P_0; P_1], c_0);\ ([P_1; P_2], c_1)\}$. Якщо обсяг замовлення p перевищує рівень $P = 550$, то надається знижка в розмірі $\Delta = 10\,\%$ початкової ціни. Таким чином, $[P_0;\ P_1] = [0;\ 550]$, $c_0 = 30$, $[P_1;\ P_2] = [550;\ 12000]$, $c_1 = 27$. Якщо не брати до уваги обмеження $p \in [550;\ 12000]$, то економічний обсяг замовлення $p_{\text{opt}}^{(1)} = 516.4 < 550$. Отже, мінімального значення в інтервалі $p \in [550;\ 12000]$ за ціною $c_1 = 27$ цільова функція $F^{(1)}(p)$ буде набувати в точці $p^{(1)} = 550$. Обчислення показують що слід скористатися знижкою, оскільки загальні витрати в цьому випадку становлять $F^{(1)}(p^{(1)}) = 326794.1$ і зменшуються на величину 36145.3 порівняно з $F(p_{\text{opt}})$. Загальна вартість запасання продукту теж зменшується і дорівнює 2794.

Продовжимо дослідження та встановимо два рівні $P_1 > P_2$ корегування початкової ціни c_0, а саме: $P_1 = 550$, $\Delta_1 = 10\,\%$ та $P_2 = 600$, $\Delta_2 = 20\,\%$, тобто дві можливі знижки на ціну. Якщо $p \geq P_1$, то надається знижка $\Delta_1\%$ початкової ціни c_0, якщо $p \geq P_2 > P_1$, то знижка становить $\Delta_2\% > \Delta_1\%$ початкової ціни c_0. Таким чином, утворюються три інтервали різних рівнів цін: $[P_0;\ P_1] = [0;\ 550]$, $c_0 = 30$; $[P_1;\ P_2] = [550; 600]$, $c_1 = 27$; $[P_2;\ P_3] = [600;\ 12000]$, $c_2 = 24$. Отже, приходимо до висновку, що оптимальна стратегія полягає в замовленні $p^{(2)} = 600$ одиниць ресурсу за ціною $c_2 = 24$, тобто $F^{(2)}(p^{(2)}) = 290640 < 326794$. Розмір заощаджень становить величину 72299.4 порівняно з $F(p_{\text{opt}})$, а на зберігання запасів потрібні кошти у розмірі 2640, що становить 0.9 % загальних витрат.

Модель з дефіцитом. Коли наявність дефіциту не призводить до катастрофічних наслідків, а має суто економічний характер, дефіцит виражається у вигляді додаткових видатків, то раціональну поведінку необхідно базувати на оптимальному балансі між штрафами за дефіцит та заощадженнями за зберігання. Існує два типи таких моделей:

— невиконані замовлення чекають на поповнення запасу, а розмір штрафних виплат пропорційний часу затримки;

— сплачується штраф і замовлення залишають систему.

У детермінованій моделі можливість існування дефіциту означає, що кожний з $(K\,/\,p)$ циклів $[0,\ T] = [0,\ t_1] \cup [t_1,\ T]$ довжиною $T = p\,/\,K$ буде складатися з двох частин: $[0,\ t_1]$ — період використання наявного запасу, $[t_1,\ T]$ — період його відсутності. Множина параметрів моделі $\{p, N, K, c,\ l,\ L,\ d,\ \tau\}$ порівняно з попередньою містить два нові параметри: сталий параметр d — штраф за дефіцит, змінний параметр N — максимальне значення попиту за відсутності запасу. Цільова функція моделі $F(p,\ N)$ має вигляд:

$$F(p, N) = K \cdot c + l \cdot \frac{K}{p} + \frac{L \cdot (p - N)^2}{2 \cdot p} + \frac{d \cdot N^2}{2 \cdot p}.$$

Аналізуючи її, дійшли висновку, що свого мінімального значення в області $0 < p < K$, $0 < N < p$ вона досягає в точці $(p^*,\ N^*)$ з координатами

$$p^* = \sqrt{\frac{2 \cdot l \cdot K}{L}} \cdot \sqrt{\frac{L + d}{d}};\ \ N^* = \sqrt{\frac{2 \cdot l \cdot K}{d}} \cdot \sqrt{\frac{L}{L + d}}.$$

Приклад 2. Проілюструємо цей результат, повертаючись до прикладу 1. Припустимо, що величина штрафу за відсутність ресурсу становить $d = 50\,\%$ його ціни. Оптимальний рівень повторного замовлення в моделі, де передбачається існування дефіциту, становить $p^* = 580$. Оптимальне значення для максимального дефіциту $N^* = 166$, а мінімальні витрати в моделі з дефіцитом $F(p^*, N^*) = 362484.2$. Отже, слід вибрати модель, в якій передбачена наявність дефіциту, та заощадити при цьому кошти в розмірі 455.2.

КЕРУВАННЯ ЗАПАСАМИ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

З практичної точки зору детерміновані математичні моделі можуть відтворювати загальній напрямок змін, що відбуваються в реальних умовах, причому можна говорити лише про певні середні величини параметрів моделі. Спроба побудувати більш адекватну модель з запровадженням елементів невизначеності спричинить появу ризику в процесі прийняття рішень. Тому задача знаходження найкращих розв'язків у випадку детермінованої моделі замінюється проблемою оптимального керування ризиком в умовах невизначеності. Для прикладу проаналізуємо величину попиту K на ресурс, що запасається. В реальній системі неможливо однозначно і точно визначити його потреби на тривалому проміжку часу. Припустимо, що дефіцит небажаний. Покажемо, у який спосіб можна знаходити прийнятні з огляду на ризик небажаної події розв'язки, не перебудовуючи кардинально детерміновану модель, а лише узагальнюючи окремі її припущення. А саме будемо вважати, що величина повторного замовлення залишається фіксованою на рівні знайденого в детермінованій моделі економічного обсягу p_{opt}.

Установимо допустиму межу $\alpha > 0$ для ризику виникнення дефіциту і тим самим визначимо рівень безпеки $\gamma = 1 - \alpha \approx 1$, який повинні гарантувати прийняті рішення. Згідно з припущеннями моделі базова одиниця часу складається з S умовних одиниць $t \in \{1, 2, \ldots, S\}$. Тому цілком виправданим є умовний поділ загального попиту $K = K(S)$ на S «порцій» $\{k_1, k_2, \ldots, k_S\} = \{k_t, t = 1, 2, \ldots, S\}$, відповідно до кожної одиниці часу, а також вважати ці порції випадковими величинами. Дефіцит може виникнути тільки на проміжку реалізації чергового замовлення довжини τ. Загальний попит у ньому становить $R(\tau) = k_1 + k_2 + \ldots + k_\tau$. Отже, величину запасу R_γ у момент подання повторного замовлення, що гарантує рівень безпеки γ, слід визначати з умови $P\{R(\tau) > R_\gamma\} < 1 - \gamma$. Припустимо, наприклад, що $\{k_t, t = 1, 2, \ldots, S\}$ — однаково розподілені випадкові величини, а $E(k_t) = m = K / S$, $t = 1, 2, \ldots, S$. Тоді, крім мінімально-обов'язкового запасу в розмірі $\tau \cdot m$, необхідно передбачити ще й страховий резерв у розмірі $\delta_\gamma > 0$, який буде зберігатися протягом всього часу функціонування системи. Тому якщо $F_\alpha(p, R_\gamma)$ означає функцію ризику стохастичної моделі, то $F_\alpha(p, R_\gamma) = F(p) + L \cdot \delta_\gamma$.

Приклад 3. Якщо k_t має нормальний розподіл з параметрами (m, σ^2), то $\delta_\gamma = z_\gamma \cdot \sigma \cdot \sqrt{\tau}$, де z_γ — квантиль рівня γ для стандартного нормального розподілу. Для ілюстрації наведеного результату повернемось знову до числового прикладу 1, але без урахування дискретного характеру продукту, який зберігається: $m = 30$; $\sigma^2 = 9$. Припускаючи, що $\alpha = 1\%$, отримаємо $\delta_\gamma = 22$, $R_\gamma = m \cdot \tau + \delta_\gamma = 322$, $F_\alpha(p, R_\gamma) = 363072$. При цьому кошти на запасання додаткового резерву δ_γ становлять $L \cdot \delta_\gamma = 132.4$, тобто лише 0.036 % загальних витрат.

ВАРТІСНИЙ ПІДХІД ДО ВИБОРУ РІВНЯ ПОВТОРНОГО ЗАМОВЛЕННЯ

Вибір моменту, коли необхідно складати повторне замовлення на поповнення запасу в умовах невизначеності, можна обґрунтувати також вартісними показниками. А саме припустимо, що в разі загрози виникнення дефіциту можна скористатися терміновою доставкою *(urgent delivery)*, але за ціною, що значно перевищує *c*. Такий підхід полягає у визначенні двох величин: обсягу резервного запасу Z_r та обсягу термінової доставки z_{kr}^*. Оптимальне рішення буде ґрунтуватися на балансі втрат, спричинених відсутністю запасів, та видатків на їхнє зберігання. Тому до параметрів моделі необхідно додати вартість U термінової доставки одиниці запасу. Ефективність рішення буде залежати від співвідношення між вартістю зберігання $L \cdot Z_r$ резервного запасу протягом часу функціонування системи та загальними очікуваними коштами $U \cdot z_{kr}^*$ за потрібну термінову доставку. В такій моделі фактор невизначеності пов'язаний з випадковим попитом $R(\tau)$ в інтервалі виконання чергового замовлення. Введемо випадкову величину ψ — рівень нестачі запасів, та очікувану нестачу $E(\psi)$ в одному циклі повторного замовлення, а цільову функцію $F(p, Z_r)$ представимо у вигляді:

$$F(p, Z_r) = F(p) + L \cdot Z_r + \frac{U \cdot K}{p} \cdot E(\psi), \; 0 < p < K, \; 0 < Z_r < K - p.$$

Критичний рівень запасу R, на якому передбачено складання повторного замовлення, визначається рівністю $R = \tau \cdot m + Z_r$, де $E(k_t) = m = K / S$ — середні потреби на ресурс, що запасається, для кожної окремої умовної одиниці часу. Таким чином, виникає задача визначення оптимальної величини резервного запасу $Z_r^{(\text{opt})}$ з огляду на баланс між видатками на зберігання $L \cdot Z_r$ та термінову доставку $\frac{U \cdot K}{p} \cdot E(\psi)$, тобто

$$L \cdot Z_r^{(\text{opt})} + \frac{U \cdot K}{p} \cdot E(\psi) = \min_{Z_r} \left(L \cdot Z_r + \frac{U \cdot K}{p} \cdot E(\psi) \right).$$

Приклад 4. Припустимо, що параметри (m, B) характеризують відповідно середні потреби на ресурс і середнє відхилення попиту від норми протягом умовної одиниці часу, а структура випадкової величини $R(\tau)$ визначається рівністю $R(\tau) = \tau \cdot m + B \cdot \eta_{[-\tau,\tau]}$, в якій випадкова величина $\eta_{[-\tau,\tau]}$ має рівномірний розподіл на проміжку $[-\tau, \tau]$. Тоді нестача ресурсу ψ визначається рівністю $\psi = \max\{(R(\tau) - \tau \cdot m - Z_r), 0\}$, а її математичне сподівання $E(\psi) = \frac{(B \cdot \tau - Z_r)^2}{4 \cdot B \cdot \tau}$. Якщо виконується умова $0 \le \frac{2L \cdot p}{K \cdot U} \le 1$, то оптимальне значення $Z_r^{(\text{opt})}$ величини резервного запасу: $Z_r^{(\text{opt})} = B \cdot \tau \cdot \left(1 - \frac{2L \cdot p}{K \cdot U}\right)$.

У прикладі 3 на підставі прийнятих припущень $m = 30$, $B = 3$. Якщо припустити, що вартість U термінової доставки одиниці запасу становить $U = 18$, то отримаємо $Z_r^{(\text{opt})} = 29.183$; $R = \tau \cdot m + Z_r^{(\text{opt})} = 329.183$; $F(p, Z_r^{(\text{opt})}) = 363116.94$. При цьому кількість коштів на запасання додаткового резерву $Z_r^{(\text{opt})}$ становить $0.008\,\%$ загальних витрат, а додатковий резерв $Z_r^{(\text{opt})}$ гарантує рівень безпеки $\gamma = 1 - P\{R(\tau) > R\} = 0.9864$.

АНАЛІТИЧНО-КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Приклад 5 [2]. Припустимо, що k_t, $t = 1, 2, \ldots, S$, має нормальний розподіл з параметрами (m, σ^2) і при цьому $E(k_t) = m = K / S$. Тоді випадковий попит

$R(\tau)$ в інтервалі виконання замовлення також буде мати нормальний розподіл з параметрами $(\tau \cdot m, \tau \cdot \sigma^2)$. Отже,

$$E(\psi) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot \tau}} \int_{\tau \cdot m + Z_r}^{\infty} (x - \tau \cdot m - Z_r) \cdot e^{-\frac{(x-\tau \cdot m)^2}{2\tau \cdot \sigma^2}} dx.$$

Для знаходження розв’язку $Z_r^{(\text{opt})}$ використаємо метод аналітичного комп’ютерного моделювання та проведемо обчислювальний експеримент для різних значень параметрів моделі. За великих значень резервного запасу Z_r величину суми $\left(L \cdot Z_r + \frac{U \cdot K}{p} \cdot E(\psi) \right)$ буде визначати перший доданок. Зменшення Z_r спричинить спочатку зменшення величини цієї суми, а після досягнення мінімального значення вона знову почне зростати. Отже, обчислювальний комп’ютерний експеримент може проводитися так:

1) встановлюємо проміжок $[0, Z_r^{(\infty)}]$, в якому реально може змінюватись резервний запас;

2) вибираємо відповідну в конкретній ситуації довжину кроку Δ_1;

3) вибираючи величини резервного запасу $Z_{r1}^{(s)} = Z_r^{(\infty)} - s \cdot \Delta_1$, для $s = 1, 2, \ldots$ обчислюємо наближення $E^{(s)}(\psi)$ математичного сподівання $E(\psi)$ величини нестачі запасів в одному циклі повторного замовлення, що визначається

$$E_{r1}^{(s)}(\psi) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot \tau}} \int_{\tau \cdot m + Z_{r1}^{(s)}}^{\tau \cdot m + Z_r^{\infty}} (x - \tau \cdot m - Z_{r1}^{(s)}) \cdot e^{-\frac{(x-\tau \cdot m)^2}{2\tau \cdot \sigma^2}} dx;$$

4) обчислюємо приблизне значення суми $\left(L \cdot Z_{r1}^{(s)} + \frac{U \cdot K}{p} \cdot E_{r1}^{(s)}(\psi) \right)$ для резервного запасу величиною $Z_{r1}^{(s)}$;

5) продовжуємо цей процес доти, поки загальна вартість зберігання та термінової доставки почне зростати.

Тоді першим наближенням $Z_{r(1)}^{(\text{opt})}$ оптимального розв’язку буде те значення $Z_{r1}^{(s^*)}$, для якого сума є найменшою серед обчислених. Таким чином, оптимальне значення $Z_r^{(\text{opt})}$ резервного запасу буде локалізоване на проміжку $[Z_{r1}^{(s^*+1)}, Z_{r1}^{(s^*-1)}]$, а $Z_r^{(\text{opt})} \approx Z_{r(1)}^{(\text{opt})}$. Перше наближення мінімального значення суми, що визначає баланс між видатками на зберігання та термінову доставку, становить $F(p, Z_{r1}^{(s^*)}) = L \cdot Z_{r1}^{(s^*)} + \frac{U \cdot K}{p} \cdot E_{r1}^{(s^*)}(\psi)$. За потреби цей процес можна продовжити, зменшуючи довжину кроку $\Delta_2 < \Delta_1$. Результатом буде коротший проміжок $[Z_{r2}^{(s^*+1)}, Z_{r2}^{(s^*-1)}]$ та краще ніж $Z_{r(1)}^{(\text{opt})}$ наближення $Z_{r(2)}^{(\text{opt})} \in [Z_{r2}^{(s^*+1)}, Z_{r2}^{(s^*-1)}]$ оптимального розв’язку $Z_r^{(\text{opt})} \approx Z_{r(2)}^{(\text{opt})}$, для якого $F(p, Z_{r2}^{(s^*)}) \le F(p, Z_{r1}^{(s^*)})$.

Проілюструємо це на прикладі, що розглядається. Оскільки $\tau = 10$, а $k_t \Leftrightarrow N(30; 9)$, то можна покласти $Z_r^{(\infty)} = 27$. Виберемо в першій ітерації крок довжиною $\Delta_1 = 3$. За проведеними обчисленнями маємо такі результати: $Z_{r1}^{(1)} = 24$, $F(p, Z_{r1}^{(1)}) = 145.554$; $Z_{r1}^{(2)} = 21$, $F(p, Z_{r1}^{(2)}) = 135.236$; $Z_{r1}^{(3)} = 18$, $F(p, Z_{r1}^{(3)}) = 139.229$.

Таким чином, $Z_r^{(\text{opt})} \approx Z_{r(1)}^{(\text{opt})} = 21$, $F(p, Z_{r1}^{(s^*)}) = F(p, Z_{r1}^{(2)}) = 135.236$.

Результати наступної ітерації для $\Delta_2 = 1.5$: $Z_{r2}^{(4)} = 21$, $F(p, Z_{r2}^{(4)}) = 135.236$; $Z_{r2}^{(5)} = 19.5$, $F(p, Z_{r2}^{(5)}) = 134.687$; $Z_{r2}^{(6)} = 18$, $F(p, Z_{r2}^{(6)}) = 139.229$.

Таким чином, $Z_r^{(\text{opt})} \approx Z_{r(2)}^{(\text{opt})} = 19.5$, $F(p, Z_{r2}^{(s^*)}) = F(p, Z_{r2}^{(5)}) = 134.687$.

Продовжуючи цей процес для $\Delta_3 = 1.1$, $\Delta_4 = 0.5$, $\Delta_5 = 0.3$, $\Delta_6 = 0.1$, дійшли висновку, що обчислювальний комп'ютерний експеримент можна зупинити, а цілком прийнятним з практичної точки зору розв'язком вважати $Z_r^{(\text{opt})} \approx 20$ і $F(p, Z_r^{(\text{opt})}) \approx 134.395$.

ПРИНЦИП РЕГЕНЕРАЦІЇ В МОДЕЛЯХ КЕРУВАННЯ ЗАПАСАМИ

У наведених прикладах узагальнення детермінованих моделей з введенням до них елементів невизначеності стосувалося лише деяких чинників, що впливають на функціонування логістичних систем. Розглянемо приклад логістичної моделі, яка функціонує в реальних умовах і фактори невизначеності впливають на всі без винятку елементи відповідної задачі керування запасами. Її схожість з розглянутими логістичними системами полягає лише в тому, що внаслідок цілеспрямованих дій вона час від часу повертається в певний виокремлений стан (своєрідний принцип регенерації) [5, 6]. Більше нічого схожого немає, оскільки математичний інструментарій, необхідний для її дослідження, кардинально відрізняється від того, що використовувався.

Припустимо, що фактичну величину запасу Z у момент часу t визначає випадковий процес $\tilde{\xi}(t)$, $t \geq 0$. Згаданий принцип регенерації формально реалізується у такий спосіб. Стохастичну структуру динамічної моделі керування запасами $(\{Z(t), X(t), Y(t)\}, t \geq 0)$ обумовлює заданий випадковий процес $\tilde{\xi}(t)$, $t \geq 0$, з фазовим простором (Z, B_Z). Не виключаємо при цьому, що для початкового стану $\xi(0)$ відома лише його ймовірність $P\{\xi(0) \in A\} = \mu_A$, де μ_A, $A \in B_Z$, — деяка задана міра на (Z, B_Z). Функціонування системи, а отже, і її реальний стан $\tilde{\xi}(t)$, $t \geq 0$, визначає послідовність дійсних чисел $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \ldots$, що генерується точковим випадковим процесом θ_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ При цьому незалежно від траєкторії $\{\tilde{\xi}(t), 0 \leq t < \theta_k\}$, $P\{\tilde{\xi}(\theta_n) \in A\} = \mu_A$, для довільного k. Стратегія керування величиною запасу буде спрямована на те, щоб утримувати оптимальний баланс між вартістю зберігання запасів та втратами, що спричинені їхньою відсутністю. Наведемо конкретній приклад реалізації подібної схеми.

Припустимо, що величина запасу $Z(t) \in Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$ у момент t є випадковою та вимірюється дискретними одиницями. Від'ємне значення $Z(t)$ свідчить про наявність дефіциту в системі. Поповнення запасу на чергову одиницю відбувається у випадкові моменти часу $0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \ldots$, тобто вхідний потік $X(t)$, $t \geq 0$, — це точковий випадковий процес, що може набувати довільних додатних дійсних значень $X(t) \in [0, \infty)$, а кількість $N(t)$ виробів, що надійшли в інтервалі $[0, t)$, визначається рівністю $N(t) = \max\{k: \tau_k < t\}$.

Аналогічно визначається вихідний потік $Y(t)$, $t \geq 0$, що не залежить від процесу $X(t)$, $t \geq 0$. Випадкові моменти $0 \leq s_1 < s_2 < s_3 < \ldots$ означають надходження вимог, а попит в інтервалі $[0, t)$ становить $m(t) = \max\{k: s_k < t\}$. Якщо в момент надходження вимоги сховище порожнє, то ця вимога стає в чергу та очікує поповнення запасу. Собівартість запасання та перебування вимоги в черзі відповідно $l > 0$ та $h > 0$. Початковий розмір запасу $Z(0) = z_0$, а його регулювання визначається точковим процесом $\Theta(t)$, $t \geq 0$. Це регулювання полягає в тому, що у випадкові моменти часу $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \ldots$ процес $Z(t)$ повертається в стан z_0. Вартість такої операції є сталою $K > 0$. Для будь-якого фіксованого часового проміжку $[0, T)$ кількість операцій регулювання величини запасу є випадковою та визначається рівністю $\nu(T) = \max\{k\colon \theta_k < T\}$. Метою керування буде мінімізація загальних коштів на функціонування системи. Припустимо, що розподіли випадкових процесів $X(t)$, $t \geq 0$, та $Y(t)$, $t \geq 0$, відомі і фіксовані, а розподіли випадкових процесів $\Theta(t) = \Theta(t, \gamma)$, $\nu(T) = \nu(T, \gamma)$ та $Z(t) = Z(t, \gamma)$ залежать від деякого параметра $\gamma \in \Gamma$, що впливає на інтенсивність проведення операцій регулювання величини запасу. Функція ризику моделі має вигляд

$$L(\mathrm{T} / \gamma) = l \cdot \int_0^T \max\{Z(t,\gamma);\, 0\}\, dt + h \cdot \int_0^T \max\{-Z(t, \gamma);\, 0\}\, dt + K \cdot \nu(T, \gamma),$$

$$t \geq 0,\ \gamma \in \Gamma.$$

На відміну від детермінованої моделі, в якій, використовуючи цільову функцію, можна було чітко визначити поняття оптимальної стратегії керування та запропонувати конкретну математичну процедуру для її знаходження, в ймовірнісній моделі допускається нескінченна кількість її конкретних втілень. Функція ризику $L(T / \gamma)$ є випадковою величиною, а її розподіл суттєво залежить від властивостей випадкових процесів $\{Z(t, \gamma), X(t), Y(t)\}$. У кожній конкретній ситуації необхідно вибрати відповідні методи дослідження, формалізувати, яке саме рішення слід вважати оптимальним та як будувати отримані стратегії керування.

Наведемо декілька прикладів, у яких $\{Z(t, \gamma), X(t), Y(t)\}$ — це ергодичні марковські процеси. Тоді для знаходження оптимальної стратегії $\gamma_0 \in \Gamma$ можна використати середнє значення $\widetilde{L}(\gamma)$ функції ризику $L(T / \gamma)$ на нескінченному проміжку часу:

$$\widetilde{L}(\gamma) = \lim_{T \to \infty} \frac{L(T / \gamma)}{T}.$$

Цей показник моделі визначає середні витрати за одиницю часу. Існування стаціонарного режиму для моделі та спосіб знаходження значення $\widetilde{L}(\gamma)$ випливає з посиленого закону великих чисел для марковських процесів [7]. За такого підходу цілком обґрунтовано оптимальним рішенням можна вважати значення параметра $\gamma_0 \in \Gamma$, що задовольняє умову $\widetilde{L}(\gamma_0) = \min_{\gamma \in \Gamma} \widetilde{L}(\gamma)$.

Приклад 6. Згідно з припущеннями для моделі моменти регенерації $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \ldots$ для процесу $Z(t,\gamma)$, $t \geq 0$, визначаються точковим процесом $\Theta(t,\gamma)$, $t \geq 0$, і при цьому справедлива рівність $Z(t, \gamma) \approx Z(t - \theta_{\nu(t,\gamma)}, \gamma)$, де символ $\approx$ означає стохастичну еквівалентність випадкових процесів. Припустимо, що відбувається часткове самозабезпечення та протягом умовної одиниці часу $n = 0, 1, 2, \ldots$ до сховища надходить чергова одиниця ресурсу. При цьому існує ймовірність $0 < \beta < 1$ того, що в будь-який момент часу n незалежно від попереднього перебігу процесу поповнення запасу та збільшення його кількості $Z(n,\gamma)$ у сховищі може трапитись аварійна ситуація і увесь наявний запас буде використано. Інакше кажучи, нехай $\xi(n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, — однорідний ланцюг Маркова з дискретним часом, з множиною станів $E = \{0, 1, 2, \ldots\}$, перехідні ймовірності

$$P = \| p_{ij} \|,\ i, j \in E,\ \ p_{ij} = P\left\{ \xi(n+1) = j \middle/ \xi(n) = i \right\},\ i, j \in E,$$

якого за один крок мають вигляд

$p_{i0}=\beta,\ i\in E=\{0,1,2,\dots\};\ p_{ii+1}=1-\beta=\alpha,\ i\in E=\{0,1,2,\dots\};\ p_{ik}=0,\ k\neq 0,$

$$k\neq i+1.$$

Вектор $\overline{q}=\{q_i,\ i=0,1,2,\dots\}$ визначає початковий розподіл ланцюга $\xi(n)$:

$$q_i=P\{\xi(0)=i\},\ i\in E=\{0,1,2,\dots\}.$$

Уведемо незалежну від ланцюга $\xi(n)$ множину випадкових величин $\{\tau_l,\ l=1,2,\dots\}$, що не залежать одна від одної та мають однаковий геометричний розподіл $P\{\tau_l=k\}=\gamma\cdot(1-\gamma)^{k-1},\ k=1,2,\dots,\ l=1,2,\dots$ Точковий процес $\Theta(n,\gamma),\ n=0,1,2,\dots,\gamma\in\Gamma=(0,1)$, визначається так: $\theta_0=0,\ \theta_1=\tau_1,\ \theta_2=\tau_1+\tau_2,\ \theta_3=\tau_1+\tau_2+\tau_3,\dots$, а $\nu(t,\gamma)=\max\{n\geq 0\colon \theta_n<t\},\ t=0,1,2,\dots$, — процес відновлення, побудований на основі випадкових величин $\{\tau_l,\ l=1,2,\dots\}$. Метою керування є бажання в будь-який момент часу n не допустити зменшення величини запасу $Z(n,\gamma)\in Z=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots\}$ нижче рівня M. Для цього у випадкові моменти часу $0\leq\theta_1<\theta_2<\theta_3<\dots$ величина запасу незалежно від її актуального значення та попередніх подібних регулювань установлюється на рівні N, $(M>N\geq 0)$, тобто з ймовірністю 1 $Z(0,\gamma)=Z(\theta_1,\gamma)=Z(\theta_2,\gamma)=\dots=N$. Визначимо випадковий процес $\tilde{\xi}(t)$ з дискретним часом $t=0,1,2,\dots$ співвідношенням $\tilde{\xi}(t)\approx\xi(t-\theta_{\nu(t,\gamma)})$. Тоді величина запасу $Z(n,\gamma)$ в момент часу n буде описуватись випадковим процесом $\tilde{\xi}(t)$ за умови, що початковий розподіл $\overline{q}$ ланцюга $\xi(n)$ зосереджений в точці N:

$$q_N=P\{\xi(0)=N\}=1,\ q_i=P\{\xi(0)=i\}=0,$$
$$i\in\{0,1,2,\dots,N-1,\ N+1,\ N+2,\dots\}.$$

Значення параметра $\gamma\in\Gamma=(0,1)$ потрібно вибрати таким, щоб ймовірність

$$\phi_M(\gamma)=\lim_{n\to\infty}P\{Z(n,\gamma)\geq M\}=\lim_{n\to\infty}P\{\tilde{\xi}(n)\geq M\}$$

була якомога більшою.

Теорема 1. Якщо виконуються припущення, прийняті для моделі, то границя $\lim\limits_{n\to\infty}P\{\tilde{\xi}(n)\geq M\}$ існує і визначається рівністю

$$\lim_{n\to\infty}P\{\tilde{\xi}(n)\geq M\}=\frac{(1-\beta)^{M-N}}{\beta}\cdot\gamma\cdot(1-\gamma)^{N-1}+\beta\cdot(1-\beta)^M\cdot\frac{(1-\gamma)^{M+1}}{1-(1-\beta)\cdot(1-\gamma)}.$$

Оптимальним розв’язком буде значення $\gamma_0\in\Gamma=(0,1)$, що задовольняє умову

$$\phi_M(\gamma_0)=\max_{\gamma\in\Gamma}\phi_M(\gamma).$$

Доведення. Уведемо випадковий процес $\gamma_{\mathrm{t}}^{+}=\theta_{\nu(t,\gamma)+1}-t,\ t=0,1,2,\dots$ Очевидно, що $\gamma_t^{+}\geq 1,\ \gamma_t^{+}\in\{1,2,3,\dots\}$. У [6] доведено такий результат.

Нехай $\xi(n),\ n=0,1,2,\dots$, означає однорідний ланцюг Маркова з дискретним часом та зліченою множиною станів $E=\{x_i,i=1,2,\dots\}$; $P=||p_{ij}||,\ i,j=1,2,\dots$, — матриця перехідних ймовірностей ланцюга $\xi(n)$ за один крок $p_{ij}=P\left\{\xi(n+1)=x_j\big/\xi(n)=x_i\right\}$; вектор $\overline{q}=\{q_i,\ i=1,2,\dots\}$ визначає початковий розподіл ланцюга $\xi(n)$: $q_i=P\{\xi(0)=x_i\},\ i\in\{1,2,\dots\}$; $\{\tau_l,\ l=1,2,\dots\}$ — множина незалежних від ланцюга $\xi(n)$ випадкових величин, які можуть набувати додатних цілих значень, при цьому τ_l не залежать одна від одної для різних l та мають однаковий розподіл; $\nu(t)$, $t=0,1,2,\ldots$, — процес відновлення, побудований на основі сукупності випадкових величин $\{\tau_l,\ l=1,2,\ldots\}$: $\nu(t)=\max\{n\geq 0{:}\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_n\leq t\}$. Тоді випадковий процес $\widetilde{\xi}(t)$, що визначається співвідношенням $\widetilde{\xi}(t)=\xi(t-\theta_{\nu(t)})$, буде неоднорідним ланцюгом Маркова з множиною станів E та початковим розподілом $\bar{q}$. Матриця $\widetilde{P}^{(t)}=||\,\widetilde{p}_{ij}\,||$, $i,j=1,2,\ldots$, його перехідних ймовірностей за один крок в момент часу t: $\widetilde{p}_{ij}=P\{\widetilde{\xi}(t+1)=x_j\ /\ \widetilde{\xi}(t)=x_i\}$, $i,j=1,2,\ldots$, визначається так: $\widetilde{P}^{(t)}=P\times$ $\times P\{\gamma_t^+>1\}+Q\cdot P\{\gamma_t^+=1\}$, де Q — матриця, що складається із однакових рядків $\bar{q}$ та має таку саму розмірність, як і P. Якщо, крім цього, випадкові величин $\{\tau_l,\ l=1,2,\ldots\}$ мають геометричний розподіл з параметром γ, то випадковий процес $\widetilde{\xi}(t)$, $t=0,1,2,\ldots$, буде однорідним ланцюгом Маркова. У випадку, коли $\xi(n)$, $n=0,1,2,\ldots$, є незвідним ланцюгом Маркова, будуть існувати границі $\lim\limits_{n\to\infty} P\{\widetilde{\xi}(n)=x_k\ /\ \widetilde{\xi}(0)=x_i\}=\widetilde{\pi}_k$, $k=1,2,\ldots$ При цьому вектор стаціонарного розподілу $\widetilde{\pi}=\{\widetilde{\pi}_k, k=1,2,\ldots\}$ задовольняє рівняння $\widetilde{\pi}\cdot(I-(1-\gamma)\cdot P)=\gamma\cdot\bar{q}$, де I — одинична матриця.

Уведемо перехідні ймовірності $P(n)=||\,p_{ij}(n)\,||$, $i,j=1,2,\ldots$, ланцюга $\xi(t)$, $t=0,1,2,\ldots$, за n кроків: $p_{ij}(n)=P\{\xi(n)=x_j\ /\ \xi(0)=x_i\}$, та визначимо множину генератрис $F_{ij}(s)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} s^n\cdot p_{ij}(n)$, $i,j=1,2,\ldots$ Матриця P є стохастичною, а згідно з умовою $0<\gamma<1$. Тож, матриця $I-(1-\gamma)\cdot P$ неособлива і для оберненої матриці $(I-(1-\gamma)\cdot P)^{-1}$ справедливе зображення

$$(I-(1-\gamma)\cdot P)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(1-\gamma)^n\cdot P^n.$$

Оскільки $P^n=P(n)=||\,p_{ij}(n)\,||$, то $(I-(1-\gamma)\cdot P)^{-1}=F(1-\gamma)$, де $F(s)=||\,F_{ij}(s)\,||$. Таким чином, $\widetilde{\pi}=\gamma\cdot\bar{q}\cdot(I-(1-\gamma)\cdot P)^{-1}=\gamma\cdot\bar{q}\cdot F(1-\gamma)$.

У моделі, що досліджується, множина станів E та перехідні ймовірності $P=||\,p_{ij}\,||$ за один крок ланцюга $\xi(n)$, $n=0,1,2,\ldots$, мають вигляд

$$E=\{0,1,2,\ldots\},\ p_{i0}=\beta,\ i\in E=\{0,1,2,\ldots\};\ p_{ii+1}=1-\beta=\alpha,\ i\in E=\{0,1,2,\ldots\};$$

$$p_{ik}=0,\ k\neq 0,\ k\neq i+1.$$

Отже, $\xi(t)$, $t=0,1,2,\ldots$, — незвідний ланцюг Маркова, а згідно з припущеннями моделі випадкові величини $\{\tau_l,\ l=1,2,\ldots\}$ мають геометричний розподіл. Тому можна скористатися результатом із [6]. Оскільки вектор $\gamma\cdot\bar{q}$ має вигляд $\{0,0,\ldots,0,\gamma,0,\ldots\}$, то для знаходження вектора стаціонарного розподілу $\widetilde{\pi}=\{\widetilde{\pi}_k, k=1,2,\ldots\}$ випадкового процесу $\widetilde{\xi}(t)$, $t=0,1,2,\ldots$, у матриці генератрис $F(s)=||\,F_{ij}(s)\,||$ необхідно знайти тільки рядок

$$F^{(N)}(s)=\{F_{Nk}(s),\ k=0,1,2,\ldots\}=\{f_k(s),\ k=0,1,2,\ldots\},$$

де $f_k(s)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} s^n\cdot p_{Nk}(n)$, $k=0,1,2,\ldots$ При цьому

$$\widetilde{\pi}=\{\widetilde{\pi}_k, k=1,2,\ldots\}=\gamma\cdot F^{(N)}(1-\gamma)=\{\gamma\cdot f_k(1-\gamma),\ k=0,1,2,\ldots\}.$$

Враховуючи специфіку ланцюга $\xi(t)$, $t=0,1,2,\ldots$, для визначення перехідних ймовірностей $p_{Nk}(n)=P\{\xi(n)=k\ /\ \xi(0)=N\}$ розглянемо окремо декілька випадків.

Випадок, коли $k<N$. Якщо $0\le n\le k$, то $p_{Nk}(n)=0$. Якщо $n>k$, то

$$p_{Nk}(n)=P\{\xi(n)=k\ /\ \xi(0)=N\}=P\{\xi(n-k)=0\ /\ \xi(0)=N\}\cdot(1-\beta)^k=$$

$$=p_{N0}(n-k)\cdot(1-\beta)^k=\beta\cdot(1-\beta)^k.$$

Відповідно генератриси $f_k(s)$ для рівнів $k=0,1,2,\ldots,N-1$ мають вигляд

$$f_k(s)=\sum_{n=0}^{\infty}s^n\cdot p_{Nk}(n)=\sum_{n=k+1}^{\infty}s^n\cdot\beta\cdot\alpha^k=\beta\cdot(1-\beta)^k\cdot\frac{s^{k+1}}{1-s},\ k=0,1,2,\ldots,\ N-1,$$

а значення координат $\{\tilde{\pi}_k,\ k=0,1,2,\ldots,N-1\}$ стаціонарного розподілу:

$$\tilde{\pi}_k=\gamma\cdot f_k(1-\gamma)=\gamma\cdot\beta\cdot(1-\beta)^k\cdot\frac{(1-\gamma)^{k+1}}{1-(1-\gamma)}=\beta\cdot(1-\beta)^k\cdot(1-\gamma)^{k+1},$$

$$k=0,1,2,\ldots,N-1.$$

Значення координати $\tilde{\pi}_N$ стаціонарного розподілу:

$$\tilde{\pi}_N=\gamma+\beta\cdot(1-\beta)^N\times(1-\gamma)^{N+1}\quad.$$

Розмірковуючи аналогічно для інших значень параметрів k та n, отримуємо такі умови.

Випадок, коли $k=N$. Перехідні ймовірності $p_{Nk}(n)$ в цьому випадку визначаються рівностями $p_{NN}(0)=1$. Якщо $0\le n\le N$, то $p_{NN}(n)=0$. Якщо $n>N$, то $p_{NN}(n)=\beta\cdot(1-\beta)^N$.

Відповідна генератриса $f_N(s)$ для рівня $k=N$ має вигляд

$$f_N(s)=\sum_{n=0}^{\infty}s^n\cdot p_{NN}(n)=s^0\cdot p_{NN}(0)+\sum_{n=k+1}^{\infty}s^n\cdot\beta\cdot\alpha^N=1+\beta\cdot(1-\beta)^N\cdot\frac{s^{N+1}}{1-s}.$$

Випадок, коли $k>N$. Для перехідних ймовірностей та відповідних генератрис отримаємо:

— якщо $0\le n<k-N$, то $p_{Nk}(n)=0$;

— якщо $n=k-N$, то $p_{Nk}(n)=p_{Nk}(k-N)=(1-\beta)^{k-N}$;

— якщо $k-N<n\le k$, то $p_{Nk}(n)=0$;

— якщо $n>k$, то $p_{Nk}(n)=(1-\beta)^k$.

Генераториси $f_k(s)$ та значення координат $\{\tilde{\pi}_k,\ k=N+1,\ N+2,\ N+3,\ldots\}$ стаціонарного розподілу для рівнів $k=N+1,\ N+2,\ N+3,\ldots$ мають вигляд:

$$f_k(s)=\sum_{n=0}^{\infty}s^n\cdot p_{Nk}(n)\quad=s^{k-N}\cdot p_{NN}(k-N)+\sum_{n=k+1}^{\infty}s^n\cdot\beta\cdot\alpha^k=$$

$$=s^{k-N}\cdot(1-\beta)^{k-N}+\beta\cdot(1-\beta)^k\cdot\frac{s^{k+1}}{1-s},\ k=N+1,\ N+2,\ N+3,\ldots;$$

$$\tilde{\pi}_k=\gamma\cdot(1-\beta)^{k-N}\cdot(1-\gamma)^{N-1}+\beta\cdot(1-\beta)^k\cdot(1-\gamma)^{k+1},$$

$$k=N+1,\ N+2,\ N+3,\ldots$$

Згідно з припущеннями моделі її функція ризику $\phi_M(\gamma)$ визначається рівністю

$$\phi_M(\gamma) = \lim_{n\to\infty} P\{\widetilde{\xi}(n) \geq M\} = \sum_{k=M}^{\infty} [\gamma \cdot (1-\beta)^{k-N} \cdot (1-\gamma)^{N-1} +$$

$$+\beta \cdot (1-\beta)^k \cdot (1-\gamma)^{k+1}] = \frac{(1-\beta)^{M-N}}{\beta} \cdot \gamma \cdot (1-\gamma)^{N-1} +$$

$$+\beta \cdot (1-\beta)^M \cdot \frac{(1-\gamma)^{M+1}}{1-(1-\beta)\cdot(1-\gamma)}.$$

Приклад 7. Розглянемо ще один приклад, змінивши припущення щодо вихідного процесу $\xi(n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Нехай $0 < \alpha < 1$ — деяке задане число, перехідні ймовірності $P = || p_{ij} ||$, $i, j \in E$, ланцюга $\xi(n)$ за один крок мають вигляд

$$p_{ik} = 0, \text{ якщо } |i-k| > 1| \text{ або } i = k, \; p_{ii+1} = \alpha, \; p_{ii-1} = 1-\alpha = \beta,$$

а початковий розподіл $\overline{q} = \{q_i, i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$ зосереджений в точці $0 \in Z$:

$$q_0 = P\{\xi(0) = 0\} = 1, \; q_i = P\{\xi(0) = i\} = 0, \; i \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}.$$

Аналогічно до прикладу 6, величину запасу $Z(n, \gamma)$ у момент часу n буде описувати випадковий процес

$$\widetilde{\xi}(t) \approx \xi(t - \theta_{\nu(t,\gamma)}), \; \nu(t,\gamma) = \max\{n \geq 0 : \theta_n < t\}, \; t = 0, 1, 2, \ldots$$

На відміну від прикладу 6, у цій моделі вибір раціональної поведінки в умовах невизначеності буде базуватися на вартісних чинниках. Оптимальність рішення буде визначати баланс між витратами внаслідок відсутності запасів та видатками на їхнє зберігання. Цю «рівновагу» визначають вартість p зберігання ресурсу, штраф h за дефіцит та вартість l однієї операції регулювання. Загальні витрати на часовому відрізку $[0, T)$ оцінює функціонал

$$L(T/\gamma) = p \cdot \sum_{t=0}^{T} \widetilde{\xi}(t) \cdot \chi[\widetilde{\xi}(t) > 0] + h \cdot \sum_{t=0}^{T} \widetilde{\xi}(t) \cdot \chi[\widetilde{\xi}(t) < 0] + l \cdot \nu(T, \gamma),$$

$$t \geq 0, \; 0 < \gamma < 1,$$

де $\chi[A]$ — індикатор випадкової події A. Використати $L(T/\gamma)$ безпосередньо як цільову функцію моделі неможливо, оскільки це випадкова величина. Тому застосуємо для побудови функції ризику та знаходження оптимальних розв'язків метод асимптотичного аналізу. Стратегія керування полягає в оптимальному виборі значення $\gamma_0 \in \Gamma = (0, 1)$ параметра, що впливає на інтенсивність проведення корегувань величини запасів.

Якщо $\widetilde{L}(\gamma) = \lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{L(T/\gamma)}{T}$, то γ_0 знаходимо з умови $\widetilde{L}(\gamma_0) = \min\limits_{0<\gamma<1} \widetilde{L}(\gamma)$.

Теорема 2. Випадковий процес $\widetilde{\xi}(t)$, $t = 0, 1, 2, \ldots$, — це ергодичний ланцюг Маркова, а середні витрати $\widetilde{L}(\gamma)$ у стаціонарному режимі за одиницю часу визначаються рівністю:

$$\widetilde{L}(\gamma) = l \cdot \gamma + \frac{2p\alpha \cdot (1-\gamma) \cdot (1 + \psi_\alpha(1-\gamma))}{\psi_\alpha(1-\gamma)(1 - 2\alpha \cdot (1-\gamma) + \psi_\alpha(1-\gamma))^2} +$$

$$+\frac{2h\cdot(1-\alpha)\cdot(1-\gamma)\cdot\gamma\cdot(1+\psi_\alpha(1-\gamma))}{\psi_\alpha(1-\gamma)(1-2(1-\alpha)\cdot(1-\gamma)+\psi_\alpha(1-\gamma))^2},$$

де $\psi_\alpha(s)=\sqrt{1-4\alpha\cdot(1-\alpha)\cdot s^2}$.

Доведення. Випадковий процес $\tilde{\xi}(t)=\xi(t-\theta_{\nu(t,\gamma)})$ будується аналогічно до прикладу 6. Але в цьому випадку $\xi(n)$, $n=0,1,2,\ldots$, — однорідне випадкове блукання по цілих точках числової осі з початковим розподілом $\bar{q}$; $\xi(n)$, $n=0,1,2,\ldots$, є незвідним ланцюгом Маркова, а випадкові величин $\{\tau_l,\ l=1,2,\ldots\}$ мають геометричний розподіл з параметром γ. Тому можна скористатися результатом із [6]. Використовуючи закон великих чисел для ланцюгів Маркова і теорему відновлення, можемо стверджувати, що границя $\tilde{L}(\gamma)$ існує і має вигляд:

$$\tilde{L}(\gamma)=\lim_{T\to\infty}\frac{L(T/\gamma)}{T}=p\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\tilde{\pi}_k+h\cdot\sum_{j=-1}^{-\infty}j\cdot\tilde{\pi}_j+l\cdot\frac{1}{E(\tau_1)},$$

де $\tilde{\pi}=\{\tilde{\pi}_k, k\in(0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots)\}$ — вектор стаціонарного розподілу ланцюга $\tilde{\xi}(t)$. Для його знаходження необхідно визначити рядок

$$F^{(0)}(s)=\{F_{0k}(s), k\in(0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots)\}=\{\varphi_k(s),\ k\in(0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots)\}$$

у матриці генератрис $F(s)=\|F_{ij}(s)\|$, що відповідає «нульовому» рівню $\{i_0=0\}$, де

$$\varphi_k(s)=\sum_{n=0}^{\infty}s^n\cdot p_{0k}(n),\ k\in(0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots).$$

Генератриса $\varphi_0(s)$ в цьому рядку має вигляд

$$\varphi_0(s)=\sum_{n=0}^{\infty}s^n\cdot p_{00}(n)=\frac{1}{\sqrt{1-4\alpha(1-\alpha)\cdot s^2}}=(\psi_\alpha(s))^{-1}.$$

З властивостей блукання $\xi(n)$, $n=0,1,2,\ldots$, випливає співвідношення

$$\varphi_k(s)=\alpha\cdot s\cdot\varphi_{k-1}(s)+(1-\alpha)\cdot s\cdot\Phi(s)\cdot\varphi_k(s),$$

де $\Phi(s)=E(s^{\tau(1)})$, а $\tau(1)=\min\{n\geq1: \xi(n)=1/\xi(0)=0\}$ — момент першого попадання блукання $\xi(n)$, яке починається в стані $\{i_0=0\}$, на перший рівень. Своєю чергою, $\Phi(s)=\alpha\cdot s+(1-\alpha)\cdot s\cdot\Phi(s)^2$, тобто

$$\Phi(s)=\frac{1-\sqrt{1-4\alpha(1-\alpha)\cdot s^2}}{2\cdot(1-\alpha)\cdot s}=\frac{1-\psi_\alpha(s)}{2\cdot(1-\alpha)\cdot s}.$$

Тому для $k=1$ отримуємо

$$\varphi_1(s)=\frac{\alpha\cdot s}{(1-(1-\alpha)\cdot s\cdot\Phi(s))}\cdot\varphi_0(s)=\frac{\alpha\cdot s\cdot 2}{(2-(1-\psi_\alpha(s))}\cdot\varphi_0(s)=$$

$$=\frac{2\alpha\cdot s}{(1+\psi_\alpha(s))}\cdot\varphi_0(s)=\frac{2\alpha\cdot s}{(1+\psi_\alpha(s))\cdot\psi_\alpha(s)}.$$

Продовжуючи рекурентним чином для будь-якого додатного $k\geq1$, отримуємо:

$$\varphi_k(s)=\frac{\alpha\cdot s}{(1-(1-\alpha)\cdot s\cdot\Phi(s))}\cdot\varphi_{k-1}(s)=\frac{2\alpha\cdot s}{(1+\psi_\alpha(s))}\cdot\varphi_{k-1}(s)=$$

$$=\left(\frac{2\alpha\cdot s}{(1+\psi_\alpha(s))}\right)^k\cdot\varphi_0(s)=\frac{(2\alpha\cdot s)^k}{(1+\psi_\alpha(s))^k\cdot\psi_\alpha(s)},\ k\geq1.$$

За аналогічних міркувань для від'ємних значень $k < 0$ отримаємо

$$\varphi_k(s) = \frac{(1+\psi_\alpha(s))^k}{(2(1-\alpha)\cdot s)^k \cdot \psi_\alpha(s)}, \ k \le -1.$$

Тому на підставі [6] для вектора $\tilde{\pi} = \{\tilde{\pi}_k, k \in (0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)\}$ стаціонарного розподілу ланцюга $\tilde{\xi}(t)$ отримаємо рівність $\tilde{\pi} = \gamma \cdot F^{(0)}(1-\gamma)$. А отже, його координати мають вигляд

$$\tilde{\pi}_0 = \gamma \cdot \varphi_0(1-\gamma) = \gamma \cdot (\psi_\alpha(1-\gamma))^{-1},$$

$$\tilde{\pi}_k = \gamma \cdot \varphi_k(1-\gamma) = \gamma \cdot \frac{(2\alpha \cdot (1-\gamma))^k}{(1+\psi_\alpha(1-\gamma))^k \cdot \psi_\alpha(1-\gamma)}, \quad k \ge 1,$$

$$\tilde{\pi}_j = \gamma \cdot \varphi_j(1-\gamma) = \gamma \cdot \frac{(1+\psi_\alpha(1\text{-}\gamma))^j}{(2(1-\alpha)\cdot(1\text{-}\gamma))^j \cdot \psi_\alpha(1\text{-}\gamma)}, \quad j \le -1.$$

Беручи до уваги вигляд функції $\tilde{L}(\gamma)$, отримуємо доведення теореми 2.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Korczak J. Logistyka. Systemy. Modelowanie. Informatyzacja. Warszawa: BEL Studio, 2010. 316 s.
2. Voina O. Analitikal-computer modeling in inventories control. *Proc. XXXVII International Conference «PDMU-2022».* (November 23–25, 2022). Azerbaijan: Sheki–Lankaran, (Abstracts). 2022. P. 117.
3. Прабху Н. Методы теории массового обслуживания и управления запасами. Москва: Машиностроение, 1969. 356 с.
4. Васильченко І.П., Васильченко З.М. Фінансова математика. Київ: Кондор, 2007. 184 с.
5. Voina O.A., Voyna A.O. Dynamic risk control in multidimensional Markov models. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2018. Vol. 54, Iss. 2. P. 212–220. https://doi.org/10.1007/s10559-018-00222-3.
6. Voina O.A., Voyna A.O. Mathematical models of risk control for regenerating Markov processes. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2019. Vol. 55, Iss. 5. P. 817–827. https://doi.org/10.1007/s10559-019-00192-x.
7. Гихман И. И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. Т. 1. Москва: Наука, 1971. 664 с.; Т. 2, Москва: Наука, 1973. 640 с.

O.A. Voina

SOME MODELS OF INVENTORY LEVEL OPTIMIZATION IN LOGISTICS PROCESSES

Abstract. The problems of optimal inventory control under uncertainty are considered. The approaches to the construction of nearly optimal strategies in models with external support of resources are proposed. The examples of stockpiling processes in logistics systems, which are characterized by the existence of moments of regeneration, illustrate the methodology of analytical computer modeling and algorithms for finding optimal solutions.

Keywords: logistics processes, inventory control, decisions under uncertainty, external supply, optimal strategy, computer modeling.

Надійшла до редакції 26.06.2023