

Б.Є. ПАНЧЕНКО

Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова, Одеса, Україна,
e-mail: *pr-bob@ukr.net*.

Ю.Д. КОВАЛЬОВ

Державний університет інтелектуальних технологій та зв'язку, Одеса, Україна,
e-mail: *kovalev@ukr.net*.

Т.О. КАЛІНІНА

Державний університет інтелектуальних технологій та зв'язку, Одеса, Україна,
e-mail: *kalininat384@gmail.com*.

І.М. САЙКО

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *igor.sayko1988@gmail.com*.

Л.М. БУКАТА

Державний університет інтелектуальних технологій та зв'язку, Одеса, Україна,
e-mail: *ygrikhuda@gmail.com*.

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В СТАТИЧНИХ
ТРИВИМІРНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧАХ — КОСОСИМЕТРИЧНА
ЗАДАЧА ДЛЯ ШАРУ, ПОСЛАБЛЕНОГО НАСКРІЗНИМ ОТВОРОМ
І КОВЗНИМ ЗАЩЕМЛЕННЯМ ТОРЦІВ**

Анотація. Наведено огляд розв'язання просторових статичних крайових задач математичної фізики для шару. Задачу з некруговим циліндричним наскрізним отвором розв'язано методом сингулярних інтегральних рівнянь (СІР). Побудовано нову математичну модель, а саме розроблено та випробувано новий метод, оснований на системі трьох СІР. Унаслідок високоточного чисельного дослідження виявлено, що зі збільшенням товщини шару відносно окружне напруження зростає. У випадку кругового отвору спостерігається зміщення максимуму відносного окружного напруження від торців у глибину шару.

Ключові слова: тривимірні крайові задачі, сингулярні інтегральні рівняння, чисельний експеримент, статичний згин, наскрізний отвір.

ВСТУП

Розвиток математичних моделей є окремим напрямом не залежно від того, для якої конкретної прикладної задачі вони побудовані. Методи розв'язання крайових задач математичної фізики — це потужний полігон для удосконалення нових моделей. Актуальним напрямом є розроблення математичного апарату для дослідження проблем адекватності, технології чисельної реалізації, точності і ресурсомісткості обчислень та використання удосконалених математичних моделей для розв'язування прикладних задач з віддалено суміжних галузей. Значний розвиток технологій штучного інтелекту дає змогу прогнозувати можливість використання, наприклад, математичних моделей розв'язання крайових задач математичної фізики в мікробіології, хімії або навіть суспільних науках. На думку авторів, суспільні науки — досі нерозвинена галузь досліджень через невизначеність. Отже, актуальним є накопичення та систематизація математичних моделей, що довели свою ефективність.

Натепер розроблено чимало методів розв'язування статичних тривимірних задач математичної фізики. І на їхній основі отримано окремі розв'язки, що мають як теоретичну, так і прикладну цінність. Це методи однорідних розв'язків, суперпозиції, власних векторних функцій, інтегральних рівнянь, інтегральних перетворень, граничних та скінченних елементів тощо. Розглянемо їхнє використання.

Метод однорідних розв'язків. Цей метод розв'язування статичних задач для шару був розвинений А.І. Лур'є в [1]. Тут рівняння Ламе за однорідних гра-

ничних умов для напружень на торцях шару проінтегровано операторним способом. У результаті було показано, що загальний розв'язок задачі є сумою трьох розв'язків: бігармонічного, вихрового та потенційного. Згодом дослідження цього напрямку було продовжено в [2–6].

У [7, 8] було запропоновано напівобернений метод, за яким задають структуру переміщень для всіх трьох типів розв'язків, а функції, що входять до них, визначають з розв'язків відповідних спектральних задач, що впливають з рівнянь Ламе та умов для напруження на торцях шару.

Метод однорідних розв'язків за трактуванням А.І. Лур'є та в інтерпретації І.Й. Воровича було всебічно розвинено та узагальнено в [9] у задачі розтягування та вигину багатозв'язних плит із ізотропних та трансверсально-ізотропних матеріалів.

Методом однорідних розв'язків у [10–12] розв'язано задачу про пружну рівновагу товстих пластин у випадку граничних умов змішаного типу на їхніх торцях. Розв'язування статичних тривимірних задач для трансропних пластин наведено в [12]. Тут представлено загальні співвідношення пружності для трансропного композита, однорідні розв'язки для шару, жорстко защемленого на торцях зі змішаними граничними умовами. Також отримано розв'язки задач про вигин кільцевої плити та осесиметричної задачі для шару з порожниною.

Концентрацію напружень у порожнистих коротких циліндрах із трансропних матеріалів з використанням напівоберненого методу І.Й. Воровича вивчено в [13].

У роботах [14–16] побудовано однорідні розв'язки рівняння теплопровідності для анізотропного шару, а також однорідні та фундаментальні розв'язки для п'єзокерамічного шару. Їх було використано для розв'язування граничних задач для шару з порожниною [15].

Методом Лур'є в [17] отримано однорідні розв'язки для п'єзокерамічної плити, торці якої вільні від сил та заземлені. В [17] показано, що однорідні розв'язки електропружності, як і у пружному випадку, є сумою трьох розв'язків: бігармонічного, потенційного та вихрового. Було проведено асимптотичний аналіз цих розв'язків. За допомогою методу Лур'є в [18] було виведено вдосконалену теорію для трансверсально-ізотропних п'єзоелектричних плит.

Метод суперпозиції [19–22]. Цей метод оснований на ідеї Ламе [21], згідно з якою загальний розв'язок граничної задачі для скінченного тіла також представляється у вигляді суми розв'язків, кожний з яких задовольняє граничні умови на поверхнях тіла, що збігаються з відповідними поверхнями прийнятої координатної системи. Таке подання розв'язків має необхідну довільність для задоволення граничних умов на повній границі тіла. Ідеї Ламе розвинено в [22].

Метод власних векторних функцій [23–25]. Він базується на векторній теоремі Фур'є–Ганкеля [23] та на класичному інтегральному представленні Фур'є–Ганкеля [25].

Подання вектора переміщення має таку властивість, що ядра, які входять до нього, є власними функціями скалярних задач для шару в кругових циліндричних координатах. Оборнення представлення Фур'є–Ганкеля дає змогу подати невідомі функції через подвійний інтеграл на необмеженій плоскій області з комплексно зв'язаними ядрами. Після підстановки отриманих інтегральних представлень в рівняння рівноваги одержимо систему звичайних диференціальних рівнянь щодо цих функцій. Розв'язки системи визначаються у вигляді лінійних комбінацій відомих функцій за координатою товщини, причому коефіцієнтами в цих лінійних комбінаціях є три довільні функції параметра

інтегрального представлення Фур'є–Ганкеля. Ці довільні функції визначаються з граничних умов на поверхні тіла.

Метод власних векторних функцій добре пристосований до розв'язання граничних задач для канонічних тіл (шар, скінченний циліндр чи круговий конус).

Загальні розв'язки та їхнє застосування. Ідею використання загального розв'язку для розв'язування крайових задач з рівняннями еліптичного типу розвинуто в [26]. Для побудови загальних розв'язків рівнянь теорії пружності різні автори прагнули представити переміщення і напруження через функції, властивості яких добре вивчені — гармонічні чи бігармонічні функції. Так, у [27] застосовано ці загальні представлення до розв'язування різних класів задач про згин вільно опертих товстих плит різної конфігурації, про напружений стан товстої круглої плити та плити у вигляді кругового сектора [28] та порожнистих кругових циліндрів [29].

У [30, 31] було розв'язано задачу повноти загальних розв'язків. Зокрема розглянуто можливість подання загального розв'язку за допомогою трьох гармонічних функцій або суми бігармонічної та гармонічної функцій.

Методи інтегральних перетворень. Ці методи ефективно використовують, розв'язуючи граничні контактні задачі та граничні задачі для напівпростору та шару. Задачі про рівновагу півпростору, коли на його плоских границях задано переміщення, розглянуто в [32] з використанням інтегрального перетворення Фур'є в поєднанні з представленням Трефтца [33]. Інтегральні перетворення Фур'є застосовують у задачах для нескінченного циліндра, навантаженого по бічній поверхні. Так, в [34] розглянуто задачу про рівновагу циліндра, завантаженого по бічній поверхні дотичними навантаженнями. Такі та інші осесиметричні розв'язки для нескінченного циліндра ґрунтуються на можливості представлення переміщень та напружень через одну бігармонічну функцію.

Інтегральне представлення бігармонічної функції, через яку виражається розв'язок, дає змогу отримати точні розв'язки задач для пружного шару та напівпростору. Загальний випадок навантаження шару розглянуто в [35]. У [36] інтегральне перетворення Ганкеля застосовують до граничних задач (першої, другої та змішаної) для шару. Будується функція Гріна для шару із защемленими торцями. Для задачі про кручення пружного шару, коли на границі шару є кругова лінія поділу граничних умов, застосовується інтегральне перетворення Ганкеля, що дає змогу зводити задачі до парних інтегральних рівнянь [37]. А ці рівняння зводяться до одновимірних інтегральних рівнянь Фредгольма, які розв'язують методом механічних квадратур.

Методи аналітичних функцій. Потужний апарат теорії аналітичних функцій комплексної змінної ефективно використовують для вивчення двовимірних задач. Значні результати, отримані завдяки цьому методу, ініціювали використання аналітичних функцій у тривимірних задачах. Одними з перших досліджень з цього напрямку є [38, 39], в яких для розв'язування поставлених осесиметричних задач використано одну гармонічну функцію. В [40] для розв'язування задач для напівпростору використано плоскі гармонічні функції, які виражали через аналітичні функції комплексної змінної та їхню суму.

Метод інтегральних рівнянь. Для розв'язування статичних задач теорії пружності, електропружності та термопружності ефективно застосовують методи теорії потенціалу та регулярних і сингулярних інтегральних рівнянь, а також різноманітних дискретизацій, як от методи скінченних чи граничних елементів тощо. Теорію таких рівнянь викладено в [41–46].

У [47], розв'язуючи задачі для тіл з плоскими тріщинами, застосовували методи теорії потенціалу. Розглянуті граничні задачі зводяться до двовимірних інтегральних рівнянь. Для тіла, що містить тріщину, в [48] отримано граничні інтегральні рівняння, де різниці дотичних напружень на включенні та дислокацій на тріщині розглядають як невідомі функції. Інтегральні рівняння основних граничних задач, що базуються на інтегральних тотожностях, побудовано в [49]. Методи сингулярних та граничних інтегральних рівнянь викладено в [50, 51] та ін.

У [52] тривимірні задачі теорії теплопровідності, пружності та електропружності зведено до систем одновимірних сингулярних інтегральних рівнянь і розглянуто задачу про розтягнення шару (з вільними від сил торцями), послабленого тунельними розрізами.

Тривимірні та двовимірні задачі можна зводити до рівносильних інтегральних рівнянь з ядрами, що мають особливості високого порядку, якщо розуміти інтеграли, що фігурують у них, у сенсі скінченної частини за Адамаром. Вперше такі інтеграли було розглянуто в [53]. Гіперсингулярні інтегральні рівняння зводяться до систем лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою спеціальних квадратурних формул [54, 55].

Метод Ф-розв'язків. Для розв'язування граничних задач про рівновагу і гармонічні коливання тіла, що є скінченим багатозв'язним циліндром, на плоских гранях якого мають місце змішані граничні умови, є ефективним методом Ф-розв'язків [56, 57]. Для змішаних однорідних граничних умов на торцях шару переміщення представляються рядами Фур'є за координатою товщини x_3 за повною ортогональною системою власних функцій вихрового стану. Це дає змогу в рівняннях Ламе вилучити координату товщини, а розв'язання задачі звести до послідовності двовимірних систем щодо коефіцієнтів Фур'є для амплітуд переміщень, а потім з коефіцієнтами Фур'є будувати сингулярні розв'язки цих рівнянь, що відповідають гармонічній в часі дії навантаження, розподіленого в шарі вздовж шнура $|x_3| \leq h$. Якщо мати на увазі розривні уздовж деякої циліндричної поверхні поля переміщень, однорідні рівняння руху щодо амплітуд переміщень представляються в узагальнених похідних. Тоді в правих частинах цих рівнянь фігурують «прості» та «подвійні» ядра (в цьому контексті недоцільно використовувати термін теорії потенціалу «ядра від простого та подвійного шарів», адже це може спричинити плутанину термінів) з невідомими функціями у вигляді різниць відповідних кінематичних величин на поверхні розриву. Використовуючи операцію згортки матриці Ф-розв'язків зі стовпцем правих елементів, можна отримати інтегральні представлення коефіцієнтів Фур'є для переміщень. Такі інтегральні представлення мають повноту щодо розглянутих двовимірних крайових задач щодо коефіцієнтів Фур'є. З їхньою допомогою задачі теорії пружності, електро- та термопружності зводяться до систем одновимірних сингулярних інтегральних рівнянь простої структури.

Зазначимо також клас просторових задач теорії пружності для тіл у формі паралелепіпеда. Інформація про такі дослідження міститься в [58].

Метод граничних елементів (МГЕ). Цей метод «перебуває» на стику чисельного аналізу та аналітичних досліджень. Він пов'язаний з методом інтегральних рівнянь і його застосовують, коли дуже громіздким є обчислення точного переміщення або напруження, особливо для розв'язування задач скінченних багатозв'язних середовищ. Удосконалювати МГЕ з використанням чисельної реалізації задач почали в [59, 60], де розв'язувалися граничні задачі для двовимірного рівняння Лапласа. Також вперше було використано підхід,

який згодом названо прямим МГЕ. За такого підходу фундаментальний розв'язок (функція Гріна) підставляють у тотожність Гріна, що дає змогу отримати граничне інтегральне рівняння. В [61] метод МГЕ було поширено на задачу теорії пружності. Згодом у [62] було застосовано спеціальну версію МГЕ щодо пружних властивостей паль. У [63] цей підхід був розвинений для методу скінченних елементів у теорії оболонок. Саме К. Бреббіа вважають автором терміна «граничний елемент» [63].

У багатьох публікаціях наведено різні формулювання граничних інтегралів, що застосовують до різних класів граничних задач. Головна відмінність між ними — фундаментальний розв'язок, який залежить від геометрії досліджуваного об'єкта. Фундаментальний розв'язок Кельвіна–Сомільяно від зосередженого навантаження широко використовують для двовимірних та тривимірних статичних задач теорії пружності [61]. Сучасний стан розвитку цього методу розглянуто в [64, 65].

Метод скінченних елементів (МСЕ). Перевагами цього методу є гнучкість та різноманітність сіток, стандартні прийоми побудови дискретних задач для довільних областей, простота врахування природних крайових умов та ефективність розв'язування задач оцінювання похибок наближених розв'язків, які зазвичай отримують за менш жорстких обмежень ніж у методі скінченних різниць. Розглядуваний МСЕ дає змогу значно розширити та узагальнити перелік середовищ, компонентів та форм границь у крайових задачах [66–68]. Проте часто виникають додаткові проблеми обумовленості та точності отриманих результатів [68].

Чисельне розв'язання задачі теорії пружності для скінченних циліндрів з використанням МСЕ наведено в [69].

З огляду на викладене впливає, що:

— наразі розроблено різні методи розв'язування статичних тривимірних задач теорії пружності, розв'язано низку окремих задач з проведенням чисельних досліджень та встановленням механічних закономірностей;

— здебільшого у зазначених роботах розглянуто тіла канонічної форми (шар, напівшар, круговий циліндр, шар з круговою циліндричною порожниною, клин, куля, еліпсоїд тощо);

— задачі для скінченних циліндрів довільного поперечного перерізу, багатозв'язних циліндричних тіл методами сингулярних інтегральних рівнянь практично не розв'язувалися, попри те, що багато фундаментальних питань теорії були розроблені;

— не існує методів обчислення спектральних характеристик скінченних циліндричних тіл із поперечними перерізами довільної форми.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо пружний шар $-h \leq x_3 \leq h$, $-\infty < x_1, x_2 < \infty$, послаблений наскрізним отвором. Нехай на поверхні отвору діє поверхневе навантаження (N, T, Z) . Припустимо, що компоненти заданого навантаження можна розвинути у ряд Фур'є за координатою x_3 на відріжку $[-h, h]$. Нехай на торцях шару мають місце такі умови:

$$u_3(x_1, x_2, \pm h) = 0, \quad \sigma_{13}(x_1, x_2, \pm h) = \sigma_{23}(x_1, x_2, \pm h) = 0. \quad (1)$$

Запишемо компоненти вектора переміщення у вигляді

$$\begin{aligned} u_i &= \sum_{k=0}^{\infty} u_{ik}(x_1, x_2) \sin \gamma_k x_3, \\ u_3 &= \sum_{k=0}^{\infty} u_{3k}(x_1, x_2) \cos \gamma_k x_3, \end{aligned} \quad (2)$$

де $i=1, 2$ та $\gamma_k = \frac{2k+1}{2h} \pi$.

Подання компонентів вектора переміщення (2) автоматично задовольняють умови (1) на торцях шару. Після відокремлення змінних у рівняннях Ламе отримуємо систему:

$$\begin{aligned} \kappa_k u_{ik} + \sigma \partial_i \theta_k &= 0, \\ \kappa_k u_{3k} + \sigma \gamma_k \theta_k &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

де $\kappa_k = \Delta - \gamma_k^2$, $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2$, $\theta_k = \partial_1 u_{1k} + \partial_2 u_{2k} - \gamma_k u_{3k}$, $\partial_i = \partial / \partial x_i$ ($i=1, 2$), $\sigma = (1-2\nu)^{-1}$, яку можна інтегрувати у такий спосіб. Врахувавши, що в (3) θ_k — метагармонічна функція, введемо довільний розв'язок рівняння $\kappa_k^2 \psi_k = 0$ та вважатимемо, що $\theta_k = \kappa_k \psi_k$. Це надає змогу отримати:

$$\begin{aligned} u_{1k} &= -\sigma \partial_1 \psi_k + \sigma \partial_2 \varphi_k, \\ u_{2k} &= -\sigma \partial_2 \psi_k - \sigma \partial_1 \varphi_k, \\ u_{3k} &= -\gamma_k \sigma \psi_k + \Phi_k, \end{aligned} \quad (4)$$

де φ_k, Φ_k — довільні метагармонійні функції.

За умови, що вирази (4) задовольняють рівність $\theta_k = \kappa_k \psi_k$, отримаємо

$$\begin{aligned} u_{1k} - i u_{2k} &= 2\sigma \frac{\partial}{\partial z} (i\varphi_k - \psi_k), \\ u_{3k} &= -\left(\frac{1+\sigma}{\gamma_k} \kappa_k + \sigma \gamma_k \right) \psi_k, \end{aligned} \quad (5)$$

де $\kappa_k \varphi_k = 0$ та $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2)$.

Формули (2), (5) дають вирази пружних переміщень у шарі через функції φ_k, ψ_k , причому φ_k (вихровий розв'язок) описує поворот елемента відносно осі $0x_3$, тобто $\partial_2 u_{1k} - \partial_1 u_{2k} = \sigma \nabla^2 \varphi_k$.

Інтегральні представлення функцій θ_k, φ_k і ψ_k такі:

$$\begin{aligned} \theta_k(z) &= \int_L p_k(\zeta) K_0(\gamma_k r) ds + \frac{2}{\gamma_k} \operatorname{Re} \int_L q_k(\zeta) \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} K_0(\gamma_k r) d\bar{\zeta}, \\ i\varphi_k(z) - \psi_k(z) &= \frac{2i}{\gamma_k} \int_L \bar{q}_k^*(\zeta) \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} K_0(\gamma_k r) d\bar{\zeta} + \\ &+ \frac{1}{2\gamma_k} \int_L p_k(\zeta) r K_1(\gamma_k r) ds + \frac{1}{\gamma_k^2} \operatorname{Re} \int_L q_k(\zeta) \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} (r K_1(\gamma_k r)) d\bar{\zeta}, \\ r &= |\zeta - z|, \quad \zeta = \xi + i\eta \in L, \quad z = x_1 + ix_2, \end{aligned} \quad (6)$$

де $K_n(\gamma_k r)$ — функції Макдональда порядку n , а ds — елемент дуги контуру L . Функції $p_k(\zeta)$, $q_k(\zeta)$, $q_k^*(\zeta)$ невідомі, їх потрібно визначити.

Граничні умови на L запишемо в комплексній формі:

$$\begin{aligned} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) - e^{2i\psi} (\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12}) &= 2(N - iT), \\ \operatorname{Re} [e^{-i\psi} (\sigma_{13} + i\sigma_{23})] &= Z, \end{aligned} \quad (7)$$

де ψ — кут між зовнішньою нормаллю до контуру порожнини-отвору та віссю Ox_1 .

Згідно з законом Гука та формулою (5) представимо умови (7) у вигляді

$$\begin{aligned} 2\sigma e^{2i\psi} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} (i\varphi_k - \psi_k) \right\} - \frac{1}{2}\theta_k - \frac{1}{2}\sigma\gamma_k^2\psi_k &= \frac{1}{2\mu} (N_k - iT_k), \\ -\operatorname{Re} \left\{ e^{i\psi} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma\gamma_k\psi_k + \frac{1+\sigma}{\gamma_k}\theta_k \right) - \sigma\gamma_k \frac{\partial}{\partial z} (i\varphi_k - \psi_k) \right] \right\} &= \frac{1}{2\mu} Z_k. \end{aligned} \quad (8)$$

СИСТЕМА ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Гранична задача (8) з урахуванням (6) за допомогою відомої традиційної процедури зводиться до системи з трьох сингулярних інтегральних рівнянь 2-го роду (для кожного фіксованого k):

$$\begin{aligned} \omega_{2k}a_k + \omega_{3k}b_k + \sum_{i=1}^3 \int_L \omega_{ik} G_{ik} ds &= \frac{1}{2\mu} (N_k - iT_k), \\ \omega_{1k}c_k + \sum_{i=1}^3 \int_L \omega_{ik} G_{ik}^* ds &= \frac{1}{2\mu} Z_k, \end{aligned} \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{\pi i(1+\sigma)}{2\gamma_k}, \quad b_k = \frac{\pi(1+\sigma)}{2\gamma_k}, \quad c_k = -b_k, \\ G_{1k}(\zeta, \xi_0) &= \frac{\sigma\gamma_k}{4} rK_1(\gamma_k r) (e^{2i(\psi_0 - \alpha_0)} + 1) - \frac{1}{2} K_0(\gamma_k r), \\ G_{2k}(\zeta, \xi_0) &= \frac{\sigma\gamma_k}{4} rK_0(\gamma_k r) \left[\sin(\psi - \alpha_0) - \frac{ie^{2i\psi_0}}{2} h_1(\psi, \alpha_0) \right] + \\ &+ K_1(\gamma_k r) \left\{ \frac{\sigma}{2} \sin(\psi - \alpha_0) + \frac{ie^{2i\psi_0}}{2} \left[(1+\sigma)e^{-i(\psi + \alpha_0)} - \frac{\sigma}{2} h_2(\psi, \alpha_0) \right] \right\}, \\ G_{3k}(\zeta, \xi_0) &= \frac{\sigma\gamma_k}{4} rK_0(\gamma_k r) \left[\cos(\psi - \alpha_0) + \frac{e^{2i\psi_0}}{2} h_2(\psi, \alpha_0) \right] + \\ &+ K_1(\gamma_k r) \left\{ \frac{\sigma}{2} \cos(\psi - \alpha_0) + \frac{e^{2i\psi_0}}{2} \left[(1+\sigma)e^{-i(\psi + \alpha_0)} + \frac{\sigma}{2} h_1(\psi, \alpha_0) \right] \right\}, \\ h_1(\psi, \alpha_0) &= e^{i(\psi - 3\alpha_0)} - e^{-i(\psi + \alpha_0)}, \quad h_2(\psi, \alpha_0) = e^{i(\psi - 3\alpha_0)} + e^{-i(\psi + \alpha_0)}, \\ G_{1k}^*(\zeta, \xi_0) &= \frac{1}{2} [\sigma\gamma_k rK_0(\gamma_k r) - (1+\sigma)K_1(\gamma_k r)] \cos(\psi_0 - \alpha_0), \end{aligned}$$

$$G_{2k}^*(\xi, \xi_0) = \frac{\sigma \gamma_k}{4} r K_1(\gamma_k r) [\sin(\psi_0 + \psi - 2\alpha_0) - \sin(\psi_0 - \psi)] - \\ - \frac{1}{2} K_0(\gamma_k r) \sin(\psi_0 - \psi),$$

$$G_{3k}^*(\xi, \xi_0) = \frac{\sigma \gamma_k}{4} r K_1(\gamma_k r) [\cos(\psi_0 + \psi - 2\alpha_0) + \cos(\psi_0 - \psi)] + \\ + \frac{1}{2} K_0(\gamma_k r) \cos(\psi_0 - \psi),$$

$$q_k^* = \frac{i(1+\sigma)}{\sigma \gamma_k^2} q_k, \quad \omega_{1k} = p_k, \quad \omega_{2k} = \operatorname{Re} q_k, \quad \omega_{3k} = \operatorname{Im} q_k,$$

$$\xi - \xi_0 = r e^{i\alpha_0}, \quad \xi_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in L.$$

Тут ω_{ik} — невідомі функції, які потрібно визначити.

СХЕМА ЧИСЕЛЬНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Для чисельного дослідження розглянемо шар, послаблений отвором еліптичного поперечного перерізу

$$\xi_1 = R_1 \cos \varphi, \quad \xi_2 = R_2 \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Для характеристики напруженого стану поверхні отвору обчислювалися компоненти

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{11} \sin^2 \theta + \sigma_{22} \cos^2 \theta - 2\sigma_{12} \cos \theta \sin \theta, \\ \sigma_{\theta z} = -\sigma_{13} \sin \theta + \sigma_{23} \cos \theta, \\ \sigma_{zz} = \sigma_{33},$$

де $\theta = \psi - \pi$.

Чисельно реалізуючи алгоритм, систему інтегральних рівнянь методом механічних квадратур [70, 71] зводили до системи лінійних алгебраїчних рівнянь. На поверхні отвору діє навантаження $N = -P x_3$, $T = Z = 0$, $P = \text{const}$.

Високоточна паралельно-конвеєрна схема обчислень, аналогічно до [72], складається з чотирьох етапів, число процесів яких обернено пропорційне тривалості інтервалів часу обчислень:

- 1) синтез масивів вихідних даних;
- 2) синтез матриці СЛАР;
- 3) розв'язання СЛАР (наприклад, методом Гауса);
- 4) синтез масивів підсумкових розв'язків.

Для етапів 1, 2 та 4 макроконвеєра не потрібні пересилання даних, що означає незалежність обчислень: чим більша матриця, тим більше число процесів потрібне для мінімізації загального часу обчислень. На етапі 3 для розв'язування СЛАР завжди існує оптимальне число процесів, що визначається специфікою самої матриці, наприклад, числом її обумовленості [73–75]. Це означає, що для розв'язування СЛАР потрібне оптимальне число процесів набагато менше ніж для незалежних обчислень, тобто «пропорційній» мінімізації підсумкового часу (замовлення все більшого і більшого числа процесів) «заважають» пересилання даних. Такий несиметричний алгоритм підтримує, наприклад, операційна система MPI-2 за допомогою процедури `spawn` («ікрометання»). Але в цих дослідженнях таке забезпечення не використовували. Тому підсумкове оптимальне

число процесів чисельної реалізації СІР (9) визначали експериментально.

На рис. 1 наведено графік залежності загального часу кластерних обчислень масиву напруження (10) на отворі еліптичного контуру від числа процесів для одного варіанта навантаження. З графіка (див. рис. 1) випливає, що весь алгоритм добре масштабується і має оптимальне число процесів.

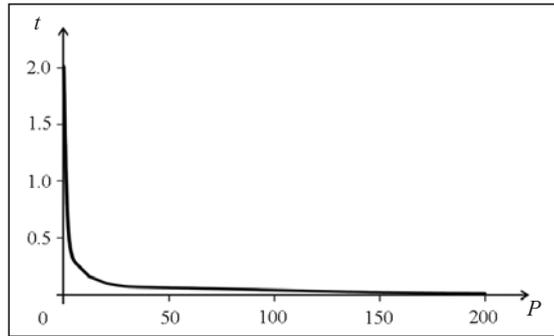


Рис. 1

Також, як і в [72], для алгоритму обчислення параметрів (10) оптимальне число процесів становить 150–200. При цьому отримували точність 10^{-6} для числа точок колокації контуру кожного отвору $N = 700$ та числа наближень ряду Фур'є (2) $k = 5$ (подаліше зростання точності результату не досліджувалося).

Зазначимо, що отримано очікуваний результат, який можна прогнозовано спостерігати на СІР як для більш спрощених задач математичної фізики (дифракція гармонічних хвиль плоскої деформації [74]), так і для тривимірних статичних задач. Адже структура процесу обчислень в моделях, заснованих на СІР, здебільшого незмінна та побудована на добре обумовлених процедурах. Причому алгоритм трьох етапів із чотирьох дає змогу отримувати оптимальне число процесів теоретично, не використовуючи кластера. А обсяг пересилань етапу СІАР також можна теоретично оцінити для того чи іншого СІР [75], унаслідок чого мати прогнозоване підсумкове оптимальне число процесів. Як зазначалося, основна ідея побудови моделі цього дослідження — представити розв'язок тривимірної задачі як нескінченний ряд розв'язків плоских задач. І оскільки для точності 10^{-6} достатньо 5–7 членів ряду, це не впливає на підсумкове оптимальне число процесів.

Оскільки для наведеної методики розв'язання крайової задачі основною операцією для обчислення кожного елемента матриці є визначення різницевого аргументу циліндричних функцій Макдональда, заданого на множині значень параметричних координат отворів, а також обчислення цих функцій і коефіцієнтів при них, то на наступному кроці на кожному клоні хоста запускаються цикли процедур визначення зазначених коефіцієнтів. При цьому синхронізація процесів на етапі 4 не потрібна, оскільки підсумкова матриця формується за фактом завершення останнього.

Послідовність обчислення напружень (10) така: спочатку чисельно знаходиться наближений розв'язок системи (9), після чого визначаються коефіцієнти Фур'є тензора напружень $\sigma_{ij}^{(k)}$. Потім згідно з (10) обчислюються шукані напруження на поверхні порожнини.

РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЕЛЬНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

На рис. 2, а наведено епюри розподілу відносного окружного напруження $\sigma_1 = \sigma_{\theta\theta} / P$ вздовж координати в точці $\varphi = 0$ за товщиною. Криві 1, 2, 3 побудовано для кругового отвору ($R_1 = R_2 = 1$) для $h / R_1 = 1, 2, 4$ відповідно. Точками позначено розв'язки косиметричної задачі, отримані методом рядів. Збіг розв'язків, отриманих двома методами, показує достовірність запропонованого методу.

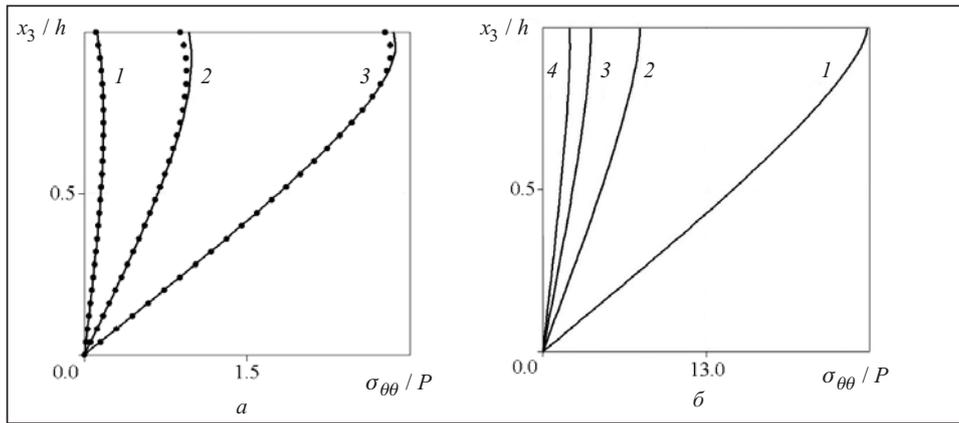


Рис. 2

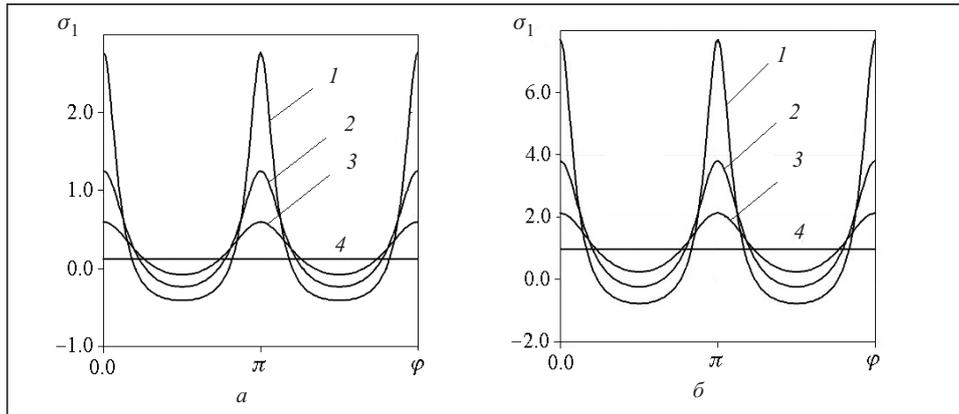


Рис. 3

На рис. 2, б наведено епюри розподілу відносного окружного напруження $\sigma_1 = \sigma_{\theta\theta} / P$ вздовж координати в точці $\varphi = 0$ за товщиною для еліптичного отвору у випадку $h / R_1 = 2$ ($R_1 = 1$). Криві 1, 2, 3, 4 побудовано для $R_2 = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ відповідно.

На рис. 3 наведено епюри розподілу відносного окружного напруження $\sigma_1 = \sigma_{\theta\theta} / P$ по контуру еліптичного отвору $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ у площині $x_3 / h = 1$ для $h / R_1 = 2, 4$ ($R_1 = 1$) на рис. 3, а та 3, б відповідно. Криві 1, 2, 3, 4 також побудовано відповідно для $R_2 = 0.3, 0.5, 0.7, 1$.

Усі чисельні результати отримані зі значенням коефіцієнта Пуассона $\nu = 1/3$.

ВИСНОВКИ

Запропонована математична модель розв'язання тривимірних статичних крайових задач для шару в умовах згину з наскрізним отвором та ковзним защемленням торців, покритих діафрагмою, є адекватною та ефективною. Алгоритм добре масштабується та надає змогу ефективно керувати ресурсами — співвідношення оптимального числа процесів та точності обчислень є ефективним.

Для розглянутої задачі за результатами чисельного дослідження можна зробити такі висновки:

- зі збільшенням товщини шару зростає відносне напруження;
- у разі кругового отвору зменшується максимум відносного окружного напруження від торців у глибину шару;
- зі зменшенням R_2 зростає відносне окружне напруження.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Лурье А.И. К теории толстых плит. *Прикладная математика и механика*. 1942. Т. 6, вып. 2/3. С. 151–168.
2. Прокопов В.К. Обзор работ по однородным решениям теории упругости и их приложениям. *Тр. Ленингр. политехн. ин-та*. 1967. Т. 279. С. 31–46.
3. Прокопов В.К. Применение символического метода к выводу уравнений теории плит. *Прикладная математика и механика*. 1965. Т. 29, вып. 5. С. 902–919.
4. Груздев Ю.А., Прокопов В.К. К задаче изгиба толстой плиты. *Прикладная механика*. 1970. Т. 6, вып. 5. С. 3–9.
5. Груздев Ю.А., Прокопов В.К. Полимоментная теория равновесия толстых плит. *Прикладная математика и механика*. 1968. Т. 32, вып. 2. С. 345–352.
6. Попугаев В.С. Некоторые задачи осесимметричной деформации трансверсально-изотропного цилиндра. *Тр. Ленингр. инж.-строит. ин-та*. Ленинград; Москва: Госстройиздат, 1968. Вып. 52 (8).
7. Аксентян О.К., Ворович И.И. Напряженное состояние толстой плиты. *Прикладная математика и механика*. 1962. Т. 26, вып. 4. С. 687–696.
8. Ворович И.И., Малкина О.С. Напряженное состояние толстой плиты. *Прикладная математика и механика*. 1967. Т. 31, вып. 2. С. 230–241.
9. Космодамианский А.С., Шалдырван В.А. Толстые многосвязные пластины. Киев: Наук. думка, 1978. 240 с.
10. Алтухов Е.В. Напряженное состояние толстых пластин в случае однородных граничных условий смешанного типа на торцах. *Теоретическая и прикладная механика*. 1992. Вып. 23. С. 3–8.
11. Алтухов Е.В. Упругое равновесие слоя с полостью для граничных условий смешанного типа на торцах. *Теоретическая и прикладная механика*. 1993. Вып. 24. С. 3–7.
12. Алтухов Е.В. Смешанная задача для трансропного цилиндра при локальном нагружении поверхностей. *Теоретическая и прикладная механика*. 1997. Вып. 27. С. 3–10.
13. Шалдырван В.А., Сумцов А.А., Сорока В.А. Исследование концентрации напряжений в полых коротких цилиндрах из трансверсально-изотропных материалов. *Прикладная механика*. 1999. Т. 35, № 7. С. 43–48.
14. Фильштинский Л.А. Периодические решения теории упругости и электроупругости для цилиндра в R^3 . *Теоретическая и прикладная механика*. 1990. Вып. 21. С. 13–20.
15. Фильштинский Л.А., Ковалев Ю.Д. Моделирование напряженного состояния пьезокерамического слоя, ослабленного сквозными туннельными отверстиями. *Вестник Херсонского государственного технического университета*. 2000. № 2(8). С. 2163–219.
16. Фильштинский Л.А., Шрамко Л.В. Фундаментальные решения для пьезокерамического слоя в R^3 (кососимметричный случай, смешанные граничные условия). *Теоретическая и прикладная механика*. 2003. Вып. 38. С. 53–57.
17. Жиров В.Е. Электроупругое равновесие пьезокерамической плиты. *Прикладная математика и механика*. 1977. Т. 41, № 6. С. 1114–1121.
18. Xu S.P., Wang W. A refined theory of transversely isotropic piezoelectric plates. *Acta Mechanica*. 2004. Vol. 171, N 1–2. P. 15–27. <https://doi.org/10.1007/s00707-004-0143-9>.
19. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев: Наук. думка, 1978. 264 с.
20. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. Динамическая задача теории упругости для прямоугольной призмы. *Прикладная механика*. 1971. Т. 8, № 9. С. 50–57.

21. Lamé G. Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. Paris: Bechelier, 1852. 335 p.
22. Байда Э.Н. Некоторые пространственные задачи теории упругости. Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1983. 231 с.
23. Улитко А.Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. Киев: Наук. думка, 1979. 261 с.
24. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость. Киев: Наук. думка, 1989. 280 с.
25. Титчмарш Э.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. 1. Москва: Изд-во иностр. лит., 1960. 278 с.
26. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. Москва; Ленинград: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1948. 269 с.
27. Галеркин Б.Г. Определение напряжений и перемещений в упругом изотропном теле при помощи трех функций. *Изв. науч.-исслед. ин-та гидромеханики*. 1931. Т. 1. С. 49–56.
28. Галеркин Б.Г. Общее решение задачи о напряжениях и деформациях в толстой круглой плите и плите в виде кругового сектора. *Изв. науч.-исслед. ин-та гидромеханики*. 1932. Т. 7. С. 1–6.
29. Галеркин Б.Г. Упругое равновесие полого кругового цилиндра и части цилиндра. *Труды Всесоюз. НИИ гидротехники*. Ленинград; Москва: Изд-во Главгидроэнергостроя, 1932. Т. 10. С. 5–9.
30. Слободянский М.Г. Об общих и полных формах решения уравнений упругости. *Прикладная математика и механика*. 1959. Т. 23, вып. 3. С. 468–482.
31. Слободянский М.Г. Пространственные задачи теории упругости для призматических тел. *Ученые записки МГУ. Сер. Механика*. 1940. Т. 39. С. 103–144.
32. Лейбензон Л.С. Курс теории упругости. Москва: Гостехиздат, 1947. 646 с.
33. Треффц Е. Математическая теория упругости. Москва: Гостехиздат, 1934. 172 с.
34. Лифшиц П.З. Напряженное состояние в упругом цилиндре, нагруженном по боковой поверхности касательными усилиями. *Инж. сборник*. 1960. Вып. 30. С. 47.
35. Лурье А.И. Теория упругости. Москва: Наука, 1970. 940 с.
36. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Ленинград: Наука, 1967. 402 с.
37. Уфлянд Я.С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. Ленинград: Наука, 1977. 220 с.
38. Ростовцев Н.А. К задаче о кручении упругого полупространства. *Прикладная математика и механика*. 1955. Т. 19, вып. 1. С. 55–60.
39. Ростовцев Н.А. Комплексные потенциалы в задаче о штампе, круглом в плане. *Прикладная математика и механика*. 1957. Т. 21, вып. 1. С. 77–82.
40. Моссаковский В.И. Основная смешанная задача теории упругости для полупространства с круговой линией раздела граничных условий. *Прикладная математика и механика*. 1954. Т. 18, вып. 2. С. 187–196.
41. Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. Москва: Наука, 1976. 658 с.
42. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. Москва: Физматгиз, 1962. 379 с.
43. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. Москва: Наука, 1970. 379 с.
44. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. Москва: Наука, 1968. 514 с.
45. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. Москва: Наука, 1977. 640 с.
46. Партон В.З., Перлин П.И. Интегральные уравнения теории упругости. Москва: Наука, 1977. 312 с.
47. Кит Г.С., Хай М.В. Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1989. 283 с.

48. Станкевич В.З., Стасюк Б.М., Хай О.И., Решение динамической задачи о взаимодействии компланарных трещин в полупространстве с защемленной поверхностью посредством граничных интегральных уравнений. *Прикладная механика и техническая физика*. 2005. Т. 46, вып. 1. С. 153–159
49. Ворошко П.П. Эффективное построение интегральных уравнений теории потенциала основных краевых задач теории упругости. Сообщ. 1. *Проблемы прочности*. 1996. № 5. С. 83–90.
50. Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. Киев: Наукова думка, 1984, 344 с.
51. Линьков А.М. Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости. Санкт-Петербург: Наука, 1999. 382 с.
52. Григолюк Э.И., Ковалев Ю.Д., Фильштинский Л.А. Смешанная кососимметричная задача теории упругости для слоя, ослабленного сквозными туннельными разрезами. *Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки*. 2000. № 3. С. 46–47.
53. Адамар Ж. Задача Коши для линейных дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа. Москва: Наука, 1978. 278 с.
54. Kaya A.C., Erdogan F. On the solution of integral equations with strongly singular kernels. *Quart. Appl. Math.* 1981. Vol. 45, N 1. P. 105–122. <https://doi.org/10.1090/qam/885173>.
55. Paget D.F. The numerical evaluations of Hadammard finite-part integrals. *Numer. Math.* 1981. Vol. 36, N 4. P. 447–453. <https://doi.org/10.1007/BF01395957>.
56. Фильштинский Л.А. Фундаментальные решения уравнений электроупругости для пьезокерамического слоя в R^3 . *Механика композитных материалов*. 2001. Т. 37, № 3. С. 377–388.
57. Фильштинский Л.А. Ковалев Ю.Д., Хворост В.А. Исследование влияния граничной поверхности на распределение КИН в окрестности концентраторов напряжений в упругом полуслое. *Прикладные проблемы математического моделирования: Спец. вып. Вестника Херсонского государственного технического университета*. Херсон: ХГТУ, 1999. С. 81–83.
58. Суслова Н.Н. Методы решения пространственной задачи теории упругости для тела в форме параллелепипеда. Итоги науки и техники. Механика деформ. твердого тела. Москва: ВИНТИ, 1980. Т. 13. С.187–236.
59. Knops R.J., Payne L.E. Uniqueness theorems in linear elasticity. Berlin: Springer-Verlag, 1971. 130 p.
60. Wang M.Z., Zhao B.S. The decomposed form of three-dimensional elastic plate. *Acta Mech.* 2003. Vol. 166. P. 207–216. <https://doi.org/10.1007/s00707-003-0029-2>.
61. Sneddon I. N. The use of transform methods in elasticity. Tech. Rept. AFOSR TR 64-1789, North Carolina State College, Nov. 6, 1964. URL: <https://ntrs.nasa.gov/api/citations/19690011434/downloads/19690011434.pdf>.
62. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. Москва: Мир, 1984. 494 с.
63. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. Москва: Мир, 1987. 524 с.
64. Farid A.F., Rashed Y.F. BEM for thick plates on unilateral Winkler springs. *Innov. Infrastruct. Solut.* 2018. Vol. 3, N 1, Article 26. <https://doi.org/10.1007/s41062-018-0128-5>.
65. Katsikadelis J.T., Baboukos N.G. Flutter instability of laminated thick anisotropic plates using BEM. *Acta Mechanica*. 2018. Vol. 229. P. 613–628. <https://doi.org/10.1007/s00707-017-1988-z>.
66. Карпиловский В.С. Метод конечных элементов и задачи теории упругости. Киев: Софія А, 2022. 275 с.
67. W. Jiang, W. Woo, Y. Wan, Y. Luo, X. Xie. Evaluation of through-thickness residual stresses by neutron diffraction and finite-element method in thick weld plates. *J. Pressure Vessel Technol.* 2017. Vol. 139, N 3. <https://doi.org/10.1115/1.4034676>.
68. Мусаев В.К. Оценка точности и достоверности численного моделирования при решении задач об отражении и интерференции нестационарных упругих волн напряжений. *Ученые современные естественнонаучные исследования*. 2015. № 1. С. 1184–1187.

69. Григоренко Я.М., Григоренко А.Я., Рожок Л. С. К решению задачи о напряженном состоянии сплошных цилиндров при различных граничных условиях на торцах. *Прикладная механика*. 2006. Т. 42, № 6. С. 24–31.
70. Александров А.Я., Соловьев Ю.И. Об обобщении метода решения осесимметричных задач теории упругости при помощи аналитических функций на пространственные задачи без осевой симметрии. *Докл. АН СССР*. 1964. Т. 154, № 2. С. 294–297.
71. Александрович А.И. Применение теории функций двух комплексных переменных к решению пространственных задач теории упругости. *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. 1977. № 2. С. 164–168.
72. Панченко Б.Є., Ковальов Ю.Д., Буката Л.М., Жиронкіна О.С. Математичне моделювання симетричної крайової задачі для шару з покритими діафрагмою торцями, послабленого двома наскрізними отворами. *Проблеми керування та інформатики*. 2023. № 2. С. 18–29. <https://doi.org/10.34229/1028-0979-2023-2-2>.
73. Химич А.Н., Поляно В.В. Эффективность двумерных блочно-циклических параллельных алгоритмов. *Проблеми програмування*. 2008. № 3. С. 145–149.
74. Панченко Б.Е. О численном исследовании систем сингулярных интегральных уравнений первого рода и с неопределяемым индексом с учетом числа обусловленности СЛАУ. *Вісник Національного технічного університету «ХПИ». Сер. Математичне моделювання в техніці та технологіях*. 2019. № 8. С. 155–164.
75. Шешко М.А., Шуляев Д.С., Расолько Г.А., Мастяница В.С. К вопросу обусловленности матриц линейной алгебраической системы, возникающей при аппроксимации сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши. *Дифференц. уравнения*. 1999. Т. 35, № 9. С. 1278–1285.

B.E. Panchenko, Yu.D. Kovalev, T.O. Kalinina, I.N. Saiko, L.M. Bukata

MATHEMATICAL MODELING IN STATIC THREE-DIMENSIONAL BOUNDARY-VALUE PROBLEMS: A SKEW-SYMMETRIC PROBLEM FOR A LAYER WEAKENED BY A THROUGH HOLE WITH SLIDING SEALING OF ITS ENDS

Abstract. Spatial static boundary-value problems of mathematical physics for a layer with a non-circular cylindrical through hole have hardly been solved using the method of singular integral equations (SIE) despite the fact that numerous fundamental theoretical issues have been developed. Methods for the calculation of spectral characteristics are also absent. The paper provides an overview of the methods for solving these problems. A new mathematical model has been constructed, and a new method based on a system of three SIEs has been developed and tested numerically. As a result of a high-precision numerical study, it was found that with an increase in the thickness of the layer, an increase in the relative circumferential stress occurs. In the case of a circular hole, a shift of the maximum relative circumferential stress from the ends to the depth of the layer is observed. In the case of an elliptical hole, with a decrease in one of the radii, an increase in the relative circumferential stress is also observed.

Keywords: three-dimensional boundary-value problems, singular integral equations, numerical experiment, static bending, a through hole.

Надійшла до редакції 12.10.2022