УДК 517.9: 519.6

В.М. БУЛАВАЦЬКИЙ
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *v_bulav@ukr.net.*

ДЕЯКІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДРОБОВО-ДИФЕРЕНЦІЙНОЇ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ ДИНАМІКИ ЩОДО БІПАРАБОЛІЧНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ

Анотація. Одержано замкнені розв'язки деяких одновимірних крайових задач моделювання аномальної фільтраційної динаміки в шаруватому геопористому середовищі в межах дробово-диференційного узагальнення біпараболічного еволюційного рівняння з частинними похідними 4-го порядку. Зокрема, наведено постановки та розв'язання прямої і оберненої модельних крайових задач геофільтраційної динаміки на основі математичної моделі з умовами спряження та визначено умови існування регулярних розв'язків цих задач.

Ключові слова: математичне моделювання, дробово-диференційна динаміка геофільтраційних процесів, некласичні моделі, біпараболічне еволюційне рівняння, дробово-диференційний аналог біпараболічного еволюційного рівняння, нестаціонарні крайові задачі на скінченному проміжку, пряма то обернена задачі, умови спряження, замкнені розв'язки.

ВСТУП. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Математичне та ком'ютерне моделювання динаміки фільтраційних процесів у геопористих середовищах є актуальним напрямком розвитку для деяких сучасних наук, зокрема геогідродинаміки, гідрології, механіки грунтів, геоматематики та геоінформатики [1–5]. При цьому сучасний етап розвитку методів теоретичного вивчення динаміки процесів переносу в водонасичених геосередовищах є етапом дослідження цих процесів за складних умов їхнього перебігу, зокрема за умов суттєвого впливу на динаміку процесів ефектів пам'яті, просторової нелокальності та ін. [6, 7]. Врахування цих явищ в межах класичних математичних моделей і класичних законів переносу Фур'є та Фіка є вельми ускладненим. Внаслідок цього останнім часом набув значного поширення підхід до моделювання некласичної динаміки процесів переносу, що грунтується на використанні апарату інтегро-диференціювання дробового порядку. Наразі цей підхід інтенсивно поширюється і довів свою ефективність у некласичних (зокрема, нелокальних) математичних моделях процесів переносу, наприклад в задачах некласичної теорії теплопровідності та термопружності [8, 9], теорії аномальної дифузії [10–13], теорії фільтрації в геопористих середовищах і фільтраційної консолідації грунтових основ [7]. У межах зазначеного підходу розглянуто низку нових задач математичного моделювання дробово-диференційної фільтраційної та фільтраційно-консолідаційної динаміки грунтових середовищ з урахуванням явища повзучості грунтового скелета та просторової нелокальності фільтраційного процесу. Зокрема, одержано розв'язки задач дробово-диференційної динаміки ущільнення водонасичених грунтових масивів скінченної потужності щодо моделей з несингулярним ядром [14]. Також запропоновно нову (дробово-диференційну) математичну модель фільтрації в тріщинувато-пористому середовищі за умов врахування як ефектів пам'яті, так і одночасно ефектів просторової нелокальності, в межах якої розв'язано деякі фільтраційні задачі в прямій та оберненій постановках [15].

Окремий перспективний напрямок розвитку методів моделювання процесів переносу (з урахуванням скінченної швидкості розповсюдження збурень) грунтується на опису цих процесів щодо біпараболічної математичної моделі, запропонованої в роботах [16, 17]. У цьому випадку модельне рівняння має вигляд [16]

$$L^* u \equiv \alpha_1 L_1^* u + \alpha_2 L_2^* u = f, \quad L_2^* = L_1^* L_1^*, \tag{1}$$

де L_1^* – оператор теплопровідності: $L_1^* = \dfrac{\partial}{\partial t} - \kappa \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$; $u(x, t)$ — функція поля (температур, концентрацій, тисків і т.п.); f — функція джерел; α_1, α_2 — дійсні параметри, $\kappa = \text{const} > 0$.

Біпараболічне рівняння (1) неодноразово використовувалось з метою моделювання різноманітних еволюційних процесів у природознавстві, зокрема для опису особливостей динаміки деформованих водонасичених грунтових середовищ в процесі їхньої фільтраційної консолідації під впливом прикладених зовнішніх навантажень [18]. У роботах [19, 20] запропоновано дробово-диференційний аналог біпараболічного еволюційного рівняння (1) та розв'язано деякі модельні крайові задачі з урахуванням явища часової нелокальності, зокрема для процесу геофільтрації в тріщинувато-пористому середовищі [21].

У цій роботі розв'язано деякі прямі та обернені задачі моделювання аномальної фільтраційної динаміки в шаруватому геопористому середовищі як задачі для дробово-диференційного аналогу біпараболічного еволюційного рівняння. Окремо розглянуто постановку та розв'язання прямої і оберненої модельних задач геофільтраційної динаміки на основі спеціальної комбінованої математичної моделі фільтрації з умовами спряження.

ДЕЯКІ НЕЛОКАЛЬНІ МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ АНОМАЛЬНОЇ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ ДИНАМІКИ В ШАРУВАТИХ ГЕОПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Розглянемо одновимірну за геометричною змінною задачу математичного моделювання дробово-диференційної динаміки напорів за геофільтрації в тришаровому геопористому середовищі. Припустимо наявність фільтраційної схеми, згідно з якою середовище складається з трьох шарів, два з яких (верхній і нижній) з потужностями m_1, m_2 є достатньо проникними з коефіцієнтами фільтрації k_1, k_2 відповідно. Вказані шари геопористого середовища розділені слабко (або сильно) проникним прошарком потужності m_0 з коефіцієнтом фільтрації k_0. У межах класичної математичної фільтраційної моделі задача аналізу динаміки напорів $h_i(x, t)\,(i = 1, 2)$ у верхньому та нижньому шарах геомасиву зводиться до розв'язання відповідної крайової задачі для такої системи рівнянь [1, 4]:

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} - a_1 \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} = -b_1 (h_1 - h_2), \tag{2}$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} - a_2 \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} = b_2 (h_1 - h_2), \tag{3}$$

де $a_i = \dfrac{k_i m_i}{\mu_i}$ $(i = 1, 2)$ — коефіцієнти п'єзопровідності для кожного шару середовища; $b_i = \dfrac{k_0}{m_0 \mu_i}$ $(i = 1, 2)$ — параметри перетоку; $k_i, \mu_i, m_i\,(i = 1, 2)$ — коефіцієнти фільтрації, водовіддачі та потужності верхнього і нижнього шарів.

Уведемо такі позначення:

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial t} - a_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad L_2 = \frac{\partial}{\partial t} - a_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

і перепишемо систему (2), (3) у вигляді

$$L_1 h_1 (x, t) = -b_1 (h_1 - h_2), \tag{4}$$

$$L_2 h_2 (x, t) = b_2 (h_1 - h_2) \tag{5}$$

або, вилучаючи з співвідношень (4), (5) будь-яку з функцій h_i $(i = 1, 2)$, одержуємо рівняння

$$b_1 L_2 h(x, t) + b_2 L_1 h(x, t) + L_1 L_2 h(x, t) = 0, \tag{6}$$

де $h(x, t)$ — напірна функція. Напірне рівняння (6) узагальнює загальноприйняте біпараболічне рівняння (1) і називається узагальненим біпараболічним рівнянням (див. [6], де наведено розв'язки деяких фільтраційних крайових задач стосовно цього рівняння). Зауважимо, що у разі наявності малих параметрів перетоку $(b_1 << 1,\ b_2 << 1)$ маємо рівняння

$$L_1 L_2 h(x, t) = 0. \tag{7}$$

В окремому випадку $L_1 = L_2$ з (7) одержуємо таке біпараболічне рівняння (див. [16, 17]):

$$L^2 u := \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\kappa \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + \kappa^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \tag{8}$$

де $u = u(x, t)$ — шукана функція, $\kappa > 0$ — сталий коефіцієнт.

Як зазначено в роботах [16, 17], рівняння (8) є інваріантним стосовно групи Галілея $G(1, 3)$ і може використовуватися для опису теплових і дифузійних процесів, не залежних від того, в яких інерційних системах вони спостерігаються. Зазначимо також, що рівняння (8) є ефективним щодо задач дослідження особливостей початкових стадій розвитку аномальних дифузійних процесів.

З метою математичного моделювання аномальних процесів переносу з урахуванням ефектів пам'яті переходимо до відповідних дробово-диференційних операторів, наприклад операторів з похідними Капуто–Герасимова (інші дробово-диференційні оператори застосовано в [7, 14, 21]):

$$\widetilde{L}_1 = {}^C D_{0t}^{\alpha} - \kappa_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \widetilde{L}_2 = {}^C D_{0t}^{\alpha} - \kappa_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \tag{9}$$

де ${}^C D_{0t}^{\alpha}$ — оператор дробової похідної Капуто–Герасимова [12, 13]; α — порядок похідної $(\alpha \in (0, 1])$; $\kappa_1, \kappa_2 > 0$. З урахуванням (9) узагальненому біпараболічному фільтраційному рівнянню (6) відповідатиме такий дробово-диференційний аналог [19]

$$\gamma_1 \widetilde{L}_2 u + \gamma_2 \widetilde{L}_1 u + \widetilde{L}_1 \widetilde{L}_2 u = 0, \tag{10}$$

де $\widetilde{L}_1, \widetilde{L}_2$ визначаються згідно (9); u — напірна функція; γ_1, γ_2 — дійсні параметри. У разі, якщо $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, зі співвідношення (10) одержуємо дробово-диференційний аналог рівняння (7), а у разі $\widetilde{L}_1 = \widetilde{L}_2$ матимемо такий дробово-диференційний аналог рівняння (8):

$${}^C D_{0t}^{\alpha}\, {}^C D_{0t}^{\alpha} u(x, t) - 2\kappa\, {}^C D_{0t}^{\alpha} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \kappa^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0. \tag{11}$$

Звісно, що за певних умов у разі $\alpha \to 1$ дробово-диференційне рівняння (11) перетворюється в класичне біпараболічне диференційне рівняння (8). Зазначимо також, що моделювання дробово-диференційної еволюційної динаміки досліджуваних процесів на основі модельного рівняння (11) ймовірно сприятиме уточненню характеристик процесу, зокрема на початкових стадіях його розвитку.

Запишемо систему фільтраційних рівнянь (4), (5) на основі співвідношень (9) у вигляді

$$\widetilde{L}_1 h_1 + b_1 (h_1 - h_2) = 0, \tag{12}$$

$$\widetilde{L}_2 h_2 - b_2 (h_1 - h_2) = 0 \tag{13}$$

та спростимо її у випадку наявності сильнопроникного прошарку між нижнім і верхнім шарами геопористого середовища. Тоді, використовуючи загальноприйняті апроксимації теорії фільтрації в тріщинувато-пористих середовищах [4], одержуємо з (12), (13) систему рівнянь

$$b_1 (h_1 - h_2) = \kappa_1 \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2}, \tag{14}$$

$${}^C D_{0t}^{\alpha} h_2 - b_2 (h_1 - h_2) = 0. \tag{15}$$

Вилучаючи з системи (14), (15) будь-яку з напірних функцій h_1, h_2, одержуємо некласичне рівняння фільтрації в розглядуваному шаруватому середовищі з урахуванням ефектів пам'яті

$${}^C D_{0t}^{\alpha} h = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} (h + \tau_r \, {}^C D_{0t}^{\alpha} h), \tag{16}$$

де $\kappa = \kappa_1 b_2 / b_1$, $\tau_r = 1/b_2$, $h(x,t)$ — напірна функція. Зауважимо, що рівняння (16) аналогічне одержаному в [21] модельному рівнянню аномальної фільтраційної динаміки в тріщинувато-пористому середовищі з урахуванням ефектів пам'яті.

ПРЯМА І ОБЕРНЕНА КРАЙОВІ ЗАДАЧІ АНОМАЛЬНОЇ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ ДИНАМІКИ НА ОСНОВІ БІПАРАБОЛІЧНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ

Якщо грані тришарового геопористого масиву одиничної потужності зі слабкопроникним прошарком є достатньо проникними, то задача моделювання аномальної (дробово-диференційної) динаміки напірної функції на основі математичної моделі, що грунтується на рівнянні (11), зводиться до знаходження в області $\Omega_T = \{(x,t)\colon 0 < x < 1,\ 0 < t < T < \infty\}$ розв'язку цього рівняння за таких крайових умов:

$$u(0,t) = u_{xx}(0,t) = 0, \qquad u(1,t) = u_{xx}(1,t) = 0 \qquad (t \ge 0), \tag{17}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad {}^C D_{0t}^{\alpha} u(x,0) = 0 \qquad (0 \le x \le 1), \tag{18}$$

де $\varphi(x)$ — задана функція початкового розподілу напорів; $u(x,t)$ — шукана напірна функція.

Припустимо, що існує скінченне синус-перетворення Фур'є функції $u(x,t)$ за змінною x вигляду [22]

$$u_n(t) = \int_0^1 u(x,t) \sin(\lambda_n x)\, dx \qquad (\lambda_n = n\pi,\ n \in N). \tag{19}$$

Тоді в образах перетворення Фур'є (19) розглядувана задача (11), (17), (18) зводиться до розв'язання таких задач Коші:

$$ {}^{C}D^{\alpha}_{0t}\,{}^{C}D^{\alpha}_{0t}\,u_n(t)+2\nu_n\,{}^{C}D^{\alpha}_{0t}\,u_n(t)+\nu_n^2 u_n(t)=0 \qquad (n\in N), \tag{20} $$

$$ u_n(0)=\varphi_n, \qquad {}^{C}D^{\alpha}_{0t}u_n(0)=0 \qquad (n\in N), \tag{21} $$

де

$$ \varphi_n=(\varphi(x),\theta_n(x))_{L^2(0,1)}, \quad \theta_n(x)=\sin(\lambda_n x), \quad \lambda_n=n\pi, \quad \nu_n=\kappa\lambda_n^2 \quad (n\in N). \tag{22} $$

Застосовуючи до (20), (21) інтегральне перетворення Лапласа за змінною t, одержуємо в образах перетворення Лапласа таке співвідношення:

$$ \overline{u}_n(s)=\varphi_n\,\frac{s^{2\alpha-1}+2\nu_n s^{\alpha-1}}{(s^{\alpha}+\nu_n)^2} \qquad (n\in N), \tag{23} $$

де $\overline{u}_n(s)=\mathcal{L}(u_n(t)),\mathcal{L}$ — оператор перетворення Лапласа, φ_n,ν_n $(n\in N)$ визначаються згідно з (22).

Оскільки для перетворення Лапласа функції $t^{\beta-1}E^{\rho}_{\eta,\beta}(\lambda t^{\eta})$ має місце співвідношення [23]

$$ \mathcal{L}(t^{\beta-1}E^{\rho}_{\eta,\beta}(\lambda t^{\eta}))=\frac{s^{\eta\rho-\beta}}{(s^{\eta}-\lambda)^{\rho}} $$

$$ (|\lambda s^{-\eta}|<1,\ \operatorname{Re}\eta>0,\ \operatorname{Re}\beta>0,\ \operatorname{Re}\rho>0), $$

то на основі цієї рівності маємо

$$ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^{\alpha-1}}{(s^{\alpha}+\nu_n)^2}\right)=t^{\alpha}E^{2}_{\alpha,\alpha+1}(-\nu_n t^{\alpha}), \tag{24} $$

$$ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^{2\alpha-1}}{(s^{\alpha}+\nu_n)^2}\right)=E^{2}_{\alpha,1}(-\nu_n t^{\alpha}), \tag{25} $$

де $\mathcal{L}^{-1}$ — оператор оберненого перетворення Лапласа, $E^{\rho}_{\eta,\beta}(\cdot)$ — трипараметрична функція Міттаг-Леффлера [12, 13, 23].

Отже, з урахуванням (24), (25) одержуємо з (23) розв'язок задач (20), (21) у вигляді

$$ u_n(t)=\varphi_n(E^{2}_{\alpha}(-\nu_n t^{\alpha})+2\nu_n\,t^{\alpha}\,E^{2}_{\alpha,\alpha+1}(-\nu_n t^{\alpha})) \qquad (n\in N) \tag{26} $$

або, переходячи в (26) до функцій Міттаг-Леффлера меншого числа параметрів, з урахуванням [23] остаточно маємо

$$ u_n(t)=\varphi_n\left(E_{\alpha}(-\nu_n t^{\alpha})+\frac{\nu_n\,t^{\alpha}}{\alpha}E_{\alpha,\alpha}(-\nu_n t^{\alpha})\right) \qquad (n\in N), \tag{27} $$

де $E_{\alpha}(\cdot),E_{\alpha,\beta}(\cdot)$ — відповідно одно- та двопараметрична функції Міттаг-Леффлера [13, 23], φ_n,ν_n $(n\in N)$ визначаються згідно з співвідношеннями (22).

Отже, формальний розв'язок задачі (11), (17), (18) описано співвідношенням

$$ u(x,t)=2\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\,\theta_n(x), \tag{28} $$

де $u_n(t)$ $(n\in N)$ визначаються згідно з (27), $\theta_n(x)$ $(n\in N)$ — згідно з (22). Вказаний формальний розв'язок розглядуваної задачі насправді є її регулярним розв'язком. Для доведення цього твердження покажемо спочатку збіжність ряду (28). Попередньо накладемо на функцію $\varphi(x)$ обмеження вигляду

$$\varphi(x) \in C^6[0,1], \quad \varphi^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(1) = 0 \quad (i = \overline{0,5}).$$

Тоді з урахуванням відомої властивості двопараметричної функції Міттаг-Леффлера [13, 23]

$$\lambda t^{\eta} |E_{\eta,\beta}(-\lambda t^{\eta})| \le M \quad (t \ge 0, \ \lambda > 0)$$

$$(0 < \eta < 2, \ \beta \in R, \ \lambda \ge 0, \ t \ge 0, \ M = \text{const} > 0)$$

та оцінки, знайденої кратним інтегруванням частинами [24–26] в першому співвідношенні з (22):

$$\varphi_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda_n^6}\right) \quad (n \to \infty), \tag{29}$$

одержуємо з (27) таку нерівність:

$$|u_n(t)| \le \frac{M_1}{\lambda_n^6} \quad (M_1 = \text{const} > 0, \ t > 0, \ n \in N). \tag{30}$$

Звідси на основі мажорувальної ознаки Веєрштраса [27] доходимо висновку, що ряд (28) є абсолютно і рівномірно збіжним в області $\overline{\Omega}_T$, а функція $u(x,t)$ є неперервною в цій області. Аналогічно можна встановити збіжність рядів, утворених з відповідних похідних частинних розв'язків. Наприклад, для ряду похідних 4-го порядку за геометричною змінною x вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^4 u_n(t) \theta_n(x) \tag{31}$$

з урахуванням (29), (30) маємо

$$\lambda_n^4 |u_n(t)| \le \frac{M_2}{\lambda_n^2} \quad (M_2 = \text{const} > 0, \ t \ge 0, \ n \in N).$$

Звідси випливає, що мажорувальним для ряду (31) є збіжний узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Отже, на основі мажорувальної ознаки Веєрштраса [27] ряд (31) є рівномірно збіжним в області $\overline{\Omega}_T$ і його сума є неперервною функцією в цій області. Отже, розв'язок у вигляді ряду Фур'є (28), (27) є регулярним.

Обернена фільтраційна задача в межах біпараболічної математичної моделі, що визначена рівнянням (11), зводиться до знаходження пари функцій $\{u(x,t), f(x)\}$, які задовольняють в області Ω_T рівняння

$${}^C D_{0t}^{\alpha} \, {}^C D_{0t}^{\alpha} \, u(x,t) - 2\kappa \, {}^C D_{0t}^{\alpha} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \kappa^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = f(x), \tag{32}$$

за виконання крайових умов

$$u(0,t) = u_{xx}(0,t) = 0, \quad u(1,t) = u_{xx}(1,t) = 0 \quad (t \ge 0), \tag{33}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad {}^C D_{0t}^{\alpha} \, u(x,0) = 0, \quad u(x,T) = h(x) \quad (0 \le x \le 1), \tag{34}$$

де $\varphi(x)$, $h(x)$ — задані функції відповідно початкової та кінцевої (для $t = T$) умов, u — напірна функція, f — функція джерела.

За розв'язок оберненої задачі (32)–(34) береться пара функцій $\{u, f\}$, де $u(x,t) \in C_{x,t}^{4,2\alpha}(\overline{\Omega}_T)$, $f(x) \in C[0,1]$, які задовольняють рівняння (32) та крайові умови (33), (34).

Нехай існує скінченне інтегральне синус-перетворення Фур'є функції $u(x,t)$ за змінною x, що визначається згідно з рівністю (19). Тоді в образах перетворення Фур'є (19) розглядувана крайова задача (32)–(34) зводиться до розв'язання таких задач:

$$ {}^C D_{0t}^{\alpha}\, {}^C D_{0t}^{\alpha}\, u_n(t) + 2\nu_n\, {}^C D_{0t}^{\alpha}\, u_n(t) + \nu_n^2 u_n(t) = f_n \qquad (n \in N), \tag{35} $$

$$ u_n(0) = \varphi_n, \qquad {}^C D_{0t}^{\alpha} u_n(0) = 0, \quad u_n(T) = h_n \qquad (n \in N), \tag{36} $$

де

$$ h_n = (h(x), \theta_n(x))_{L^2(0,1)}, \quad f_n = (f(x), \theta_n(x))_{L^2(0,1)}, \quad \theta_n(x) = \sin(n\pi x) \quad (n \in N). \tag{37} $$

Застосовуючи до цих задач інтегральне перетворення Лапласа за змінною t і беручи до уваги наведені вище міркування, знаходимо розв'язок (35) (згідно з початковими умовами щодо співвідношень (36)) у вигляді

$$ u_n(t) = \left(\varphi_n - \frac{f_n}{\nu_n^2} \right) \left(E_\alpha(-\nu_n t^\alpha) + \frac{\nu_n\, t^\alpha}{\alpha} E_{\alpha,\alpha}(-\nu_n t^\alpha) \right) + \frac{f_n}{\nu_n^2} \qquad (n \in N). \tag{38} $$

На основі (38) з урахуванням кінцевої умови $u_n(T) = h_n$ одержуємо

$$ f_n = \nu_n \frac{h_n - \delta_n \varphi_n}{\rho_n} \qquad (n \in N), \tag{39} $$

де

$$ \delta_n = E_\alpha(-\nu_n T^\alpha) + \frac{\nu_n\, T^\alpha}{\alpha} E_{\alpha,\alpha}(-\nu_n T^\alpha), $$

$$ \rho_n = T^a \left(E_{\alpha,\alpha+1}(-\nu_n T^\alpha) - \frac{1}{\alpha} E_{\alpha,\alpha}(-\nu_n T^\alpha) \right), $$

а величини $h_n (n \in N)$ визначаються згідно з (37).

Отже, формальний розв'язок оберненої задачі (32)–(34) визначається співвідношеннями (28), (38), (39) та рівністю

$$ f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin(n\pi x). \tag{40} $$

Далі необхідно показати, що формальний розв'язок цієї задачі дійсно є її регулярним розв'язком. Для цього доведемо збіжність рядів (28), (38), (40), (39) та рядів, утворених з відповідних похідних частинних розв'язків за змінними x, t.

Накладаючи на функції $\varphi(x)$ та $h(x)$ додаткові обмеження вигляду

$$ \varphi(x) \in C^6[0,1], \qquad \varphi^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(1) = 0 \qquad (i = \overline{0,5}), $$

$$ h(x) \in C^6[0,1], \qquad h^{(i)}(0) = h^{(i)}(1) = 0 \qquad (i = \overline{0,5}), $$

згідно з [28, 29] матимемо відомі оцінки:

$$ \varphi_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda_n^6} \right) \quad (n \to \infty), \quad h_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda_n^6} \right) \quad (n \to \infty). $$

Далі на основі співвідношень (38), (39) одержуємо

$$|u_n(t)| \le \frac{N_1}{\lambda_n^6}, \qquad |f_n| \le \frac{N_3}{\lambda_n^4} \qquad (N_1, N_2, N_3 = \text{const} > 0,\ \ t > 0,\ \ n \in N).$$

Грунтуючись на цих оцінках та використовуючи як мажорувальний збіжний узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ $(\alpha \ge 2)$, маємо на основі ознаки Веєрштраса [27], що ряди (28), (40) є абсолютно і рівномірно збіжними і функції $u(x,t)$ та $f(x)$ є неперервними в областях $\overline{\Omega}_T$ та $[0,1]$ відповідно. Зазначимо, що аналогічно викладеному вище з розв'язанням прямої задачі легко встановити і рівномірну збіжність рядів, утворених з відповідних похідних частинних розв'язків за змінними *x*, *t* (зокрема, і збіжність ряду з похідних 4-го порядку за змінною *x*).

Отже, функції $u(x,t)$, $f(x)$, визначені співвідношеннями (28), (38), (40), (39), дійсно є класичним розв'язком оберненої задачі.

Далі коротко зупинимось на окремому випадку задачі, що відповідає модельному рівнянню з показником дробової похідної $\alpha = 1$. Тоді вказане модельне рівняння набуває вигляду (8) і розв'язок прямої задачі (відповідної розглянутій вище фільтраційній задачі з урахуванням ефектів пам'яті) отримуємо з розв'язку (28), (27) за умови $\alpha \to 1$. Остаточно з урахуванням відомих співвідношень для функції Міттаг-Леффлера [23]

$$E_{\alpha}(z) = E_{\alpha,1}(z), \quad E_{1,1}(z) = e^{z}$$

матимемо

$$u(x,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n (1 + \nu_n\, t)\, e^{-\nu_n t} \sin(\lambda_n x) \quad (\lambda_n = n\pi,\ \nu_n = \kappa\, \lambda_n^2,\ \ n \in N), \tag{41}$$

де $\varphi_n (n \in N)$ визначаються згідно з співвідношеннями (22).

Отже, розв'язок прямої фільтраційної задачі для моделі, не ураховуючи нелокальності за часовою змінною, визначається співвідношеннями (41). Аналогічно розв'язок відповідної (32)–(34) оберненої крайової задачі в межах класичного підходу можна отримати з наведеного вище розв'язку цієї задачі в межах дробово-диференційного підходу за умови $\alpha \to 1$. У результаті зі співвідношень (28), (38), (40), (39) знаходимо

$$u(x,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\varphi_n - \frac{f_n}{\nu_n^2} \right)(1 + \nu_n\, t)\, e^{-\nu_n t} + \frac{f_n}{\nu_n^2}) \right) \sin(\lambda_n x),$$

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin(\lambda_n x),$$

$$f_n = \nu_n \frac{h_n - \overline{\delta}_n \varphi_n}{\overline{\rho}_n}, \qquad \overline{\delta}_n = (1 + \nu_n T)\, e^{-\nu_n T},$$

$$\overline{\rho}_n = \frac{1}{\nu_n} (1 - (1 - \nu_n T)\, e^{-\nu_n T}) \quad (n \in N).$$

Наведені розв'язки (за умов виконання зазначених вище обмежень для функцій $\varphi(x), h(x)$) дійсно є класичними.

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ ДИНАМІКИ СТОСОВНО КОМБІНОВАНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ

Розглянемо задачі моделювання геофільтраційної динаміки на основі математичної моделі, яка базується на припущенні, що початкова стадія фільтаційного процесу з достатнім ступенем адекватності описана моделлю фільтрації в тріщинувато-пористому середовищі (рівняння вигляду (16)). Але далі (наприклад, внаслідок різкої зміни умов перебігу фільтраційного процесу) адекватний опис його динаміки потребує використання біпараболічної фільтраційної моделі (модельне рівняння вигляду (8)).

У межах цієї комбінованої математичної моделі (яка грунтується на ідеї опису фільтраційної динаміки з використанням рівнянь змішаного типу) розглянемо типову модельну фільтраційну крайову задачу в прямій та оберненій постановках.

Спочатку викладемо постановку та методику розв'язання прямої крайової задачі.

Уведемо позначення

$$\Omega^- = \Omega \bigcap (0 < t < t_0), \quad \Omega^+ = \Omega \bigcap (t_0 < t < T), \quad \Omega = \{(x,t) : 0 < x < 1,\ 0 < t < T\}.$$

Нехай в області Ω маємо пару модельних рівнянь фільтрації:

$$ {}^C D_{0t}^{\alpha}\, u(x,t) = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(u(x,t) + \tau_r\, {}^C D_{0t}^{\alpha}\, u(x,t) \right) + f_1 \quad (0 < t < t_0), \tag{42}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - 2\kappa \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial t \partial x^2} + \kappa^2 \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} = f_2 \qquad (t_0 < t < T), \tag{43}$$

де τ_r, κ — дійсні додатні параметри; $u(x,t)$ — функція тиску; $\alpha \in (0,1]$ — порядок дробової похідної; f_1, f_2 — задані функції джерел (надалі з метою спрощення відповідних викладок розглядатимемо випадок $f_1 = f(x), f_2 = -\kappa f''(x),\ \ f(0) = f(1) = 0$).

Пряма задача фільтрації полягає у знаходженні такої функції $u(x,t)$, яка:

1) є функцією класу $C_{x,t}^{2,\alpha}(\overline{\Omega}^- \bigcup \{t = 0\}) \bigcap C_{x,t}^{4,2}(\overline{\Omega}^+ \bigcup \{t = T\})$;

2) задовольняє рівняння (42), (43) в $\Omega^- \bigcup \Omega^+$;

3) задовольняє крайові умови

$$u(0,t) = u_{xx}(0,t) = 0, \qquad u(1,t) = u_{xx}(1,t) = 0 \qquad (0 \le t \le T), \tag{44}$$

$$u(x,0) = 0 \qquad (0 \le x \le 1); \tag{45}$$

4) задовольняє умови спряження для $t = t_0$:

$$u(x, t_0 - 0) = u(x, t_0 + 0), \quad {}^C D_{0t}^{\alpha} u(x, t_0 - 0) = \frac{\partial u(x, t_0 + 0)}{\partial t} \quad (0 \le x \le 1). \tag{46}$$

Уведемо позначення

$$u(x,t) = \begin{cases} u^-(x,t), & (x,t) \in \Omega^-, \\ u^+(x,t), & (x,t) \in \Omega^+, \end{cases} \tag{47}$$

та припустимо, що існує скінченне інтегральне синус-перетворення Фур'є функцій $u^-(x,t)$, $u^+(x,t)$ за змінною x вигляду [22]

$$u_n^{\pm}(t) = \int_0^1 u^{\pm}(x,t) \sin(\lambda_n x)\, dx \qquad (\lambda_n = n\pi,\ n \in N). \tag{48}$$

Застосовуючи перетворення (48) до задачі (42), (44), (45), отримаємо задачу Коші

$$ {}^{C}D_{0t}^{\alpha}u_n^{-}(t)+\omega_n u_n^{-}(t)=\frac{f_n}{1+\tau_r\nu_n}, \quad u_n^{-}(0)=0 \quad (n\in N), \tag{49} $$

де
$$ \omega_n=\frac{\nu_n}{1+\tau_r\nu_n}, \quad \nu_n=\kappa\lambda_n^2, \quad f_n=\int_0^1 f(x)\sin(\lambda_n x)\,dx \quad (n\in N). \tag{50} $$

Відповідно до [12, 13] розв'язок задачі (49) запишемо у вигляді
$$ u_n^{-}(t)=\frac{f_n}{\nu_n}(1-E_\alpha(-\omega_n t^\alpha)) \quad (n\in N), \tag{51} $$
де f_n $(n\in N)$ визначаються згідно з (50), $E_\alpha(\cdot)$ — функція Міттаг-Лефлера [23].

З урахуванням (51) обчислюємо значення
$$ u_n^{-}(t_0-0)=\frac{f_n}{\nu_n}(1-E_\alpha(-\omega_n t_0^\alpha))=\frac{f_n}{\nu_n}(1-q_n) \quad (n\in N), \tag{52} $$
$$ {}^{C}D_{0t}^{\alpha}u_n^{-}(t_0-0)=\frac{f_n\omega_n}{\nu_n}E_\alpha(-\omega_n t_0^\alpha)=\frac{f_n}{\nu_n}\omega_n q_n \quad (n\in N), \tag{53} $$
де $q_n=E_\alpha(-\omega_n t_0^\alpha)$ $(n\in N)$.

Застосовуючи скінченне синус-перетворення Фур'є за геометричною змінною вигляду (48) до задачі (43), (44), одержуємо рівняння
$$ \frac{d^2u_n^{+}(t)}{dt^2}+2\kappa\lambda_n^2\frac{du_n^{+}(t)}{dt}+\kappa^2\lambda_n^4u_n^{+}(t)=\kappa\lambda_n^2 f_n \quad (n\in N). \tag{54} $$

З урахуванням лінійності рівняння (54) запишемо його загальний розв'язок у вигляді
$$ u_n^{+}(t)=(d_n+t\,c_n)\,e^{-\nu_n(t-t_0)}+\frac{f_n}{\nu_n} \quad (n\in N), \tag{55} $$
де d_n, c_n $(n\in N)$ — довільні сталі, ν_n $(n\in N)$ визначаються згідно з (50). Тоді згідно з умовами спряження (46), використовуючи (52), (53), маємо

$$ u_n^{+}(t_0)=u_n^{-}(t_0)=\frac{f_n}{\nu_n}(1-q_n), \quad \frac{du_n^{+}(t_0)}{dt}={}^{C}D_{0t}^{\alpha}u_n^{-}(t_0)=\frac{f_n}{\nu_n}\omega_n q_n \quad (n\in N). \tag{56} $$
З урахуванням співвідношень (55), (56) одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих d_n, c_n $(n\in N)$:
$$ d_n+t_0c_n=-\frac{f_n}{\nu_n}q_n \quad (n\in N), \tag{57} $$
$$ \nu_n d_n+(t_0\nu_n-1)c_n=-\frac{f_n}{\nu_n}\omega_n q_n \quad (n\in N). \tag{58} $$

З системи рівнянь (57), (58) маємо (оскільки детермінант системи $\Delta_n^*=-1\neq 0$) єдиний її розв'язок у вигляді
$$ d_n=f_nq_n\left(t_0\tau_r\omega_n-\frac{1}{\nu_n}\right), \quad c_n=-f_nq_n\tau_r\omega_n \quad (n\in N). \tag{59} $$
Підставляючи значення d_n, c_n з (59) у співвідношення (55), знаходимо
$$ u_n^{+}(t)=f_n\left\{\frac{1}{\nu_n}-q_n\left[\frac{1}{\nu_n}+\tau_r\omega_n(t-t_0)\right]e^{-\nu_n(t-t_0)}\right\} \quad (n\in N), \tag{60} $$
де f_n, ω_n, ν_n визначаються згідно з (37), (50), $q_n=E_\alpha(-\omega_n t_0^\alpha)$ $(n\in N)$.

Отже, формальний розв'язок розглядуваної прямої задачі задають співвідношення

$$u^{+}(x,t)=2\sum_{n=1}^{\infty}u_n^{+}(t)\sin(\lambda_n x) \qquad ((x,t)\in\Omega^{+}), \tag{61}$$

$$u^{-}(x,t)=2\sum_{n=1}^{\infty}u_n^{-}(t)\sin(\lambda_n x) \qquad ((x,t)\in\Omega^{-}), \tag{62}$$

де функції $u_n^{-}(t), u_n^{+}(t)$ визначаються згідно з (51), (60).

Далі потрібно встановити, що формальний розв'язок насправді є регулярним розв'язком поставленої задачі. Для цього треба довести збіжність тригонометричних рядів (61), (62) та рядів, утворених з відповідних похідних частинних розв'язків за змінними x, t. Попередньо зауважимо, що з урахуванням відомих властивостей [23] про монотонність та обмеженість однопараметричної функції Міттаг-Леффлера $E_\alpha(-x)$ $(0<\alpha<1)$ за умови $x\in[0,+\infty)$ маємо співвідношення $0<q_n<q_1<1$ $(n=2,3,\ldots)$. Накладаючи на функцію $f(x)$ обмеження вигляду $f(x)\in C^6[0,1], f^{(i)}(0)=f^{(i)}(1)=0$ $(i=\overline{0,5})$ та приймаючи до уваги, що $f_n=\mathrm{O}\left(\dfrac{1}{\lambda_n^6}\right)$ $(n\to\infty)$, одержуємо на основі (51), (60) такі оцінки:

$$|u_n^{+}(t)|\le\frac{M_1}{\lambda_n^6}, \quad |u_n^{-}(t)|\le\frac{M_2}{\lambda_n^8} \quad (M_1, M_2=\mathrm{const}>0,\ t\in[0,T],\ n\in N). \tag{63}$$

Враховуючи (63), згідно з мажорувальною ознакою Веєрштраса [27] маємо, що тригонометричні ряди (61), (62) є абсолютно і рівномірно збіжними відповідно в областях $\overline{\Omega}^{+}, \overline{\Omega}^{-}$, а функція $u(x,t)$ (визначена згідно з (47), (61), (62), (51), (60)) є неперервною в $\overline{\Omega}$. Аналогічно можна встановити збіжність рядів, утворених з відповідних похідних частинних розв'язків, наприклад ряду, утвореного з похідних 4-го порядку за змінною x вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^4 u_n^{+}(t)\sin(\lambda_n x) \qquad ((x,t)\in\Omega^{+}), \tag{64}$$

мажорувальним для якого є збіжний узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$.

Тому (відповідно до мажорувальної ознаки Веєрштраса [27]) ряд (64) є рівномірно збіжним в $\overline{\Omega}^{+}$ і його сума є неперервною функцією в цій області. Отже, єдиний розв'язок прямої задачі існує.

Далі наведемо виклад постановки та розв'язання оберненої крайової задачі фільтраційної динаміки для розглядуваної математичної моделі.

Постановка оберненої задачі передбачає знаходження пари функцій $\{u(x,t), f(x)\}$, для яких виконуються такі умови:

1) $u(x,t)$ задовольняє умову 1, визначеній у постановці прямої задачі, а $f(x)$ — умові $f(x)\in C^2[0,1]$;

2) $u(x,t)$ задовольняє рівняння (42), (43) в області $\Omega^{+}\cup\Omega^{-}$;

3) $u(x,t)$ задовольняє граничні умови (44) та початкові і кінцеві умови, за яких

$$u(x,0)=0, \qquad u(x,T)=\varphi(x) \qquad (0\le x\le 1), \tag{65}$$

де $\varphi(x)$ — відома функція;

4) $u(x,t)$ задовольняє умови спряження (46).

Розв'язок оберненої задачі знаходимо у вигляді (61), (62), де $u_n^{\pm}(t)$ визначаються згідно з (51), (60). Невідомі коефіцієнти Фур'є f_n функції $f(x)$ знайдемо з урахуванням другої з умов (65), тобто умови $u_n^+(T)=\varphi_n$, де

$$\varphi_n=\int_0^1\varphi(x)\sin(\lambda_n x)\,dx\quad(n\in N).$$

Звідси на основі співвідношення (55) одержуємо

$$\frac{f_n}{\nu_n}=\varphi_n-(d_n+T\,c_n)\,e^{-\nu_n\theta}\qquad(n\in N),\tag{66}$$

де $\theta=T-t_0$, а сталі d_n, c_n $(n\in N)$ визначаються згідно з (59). Підставляючи значення d_n, c_n зі співвідношень (59) у рівняння (66), отримуємо

$$f_n\Delta_n=-\varphi_n\nu_n\quad(n\in N),\tag{67}$$

де

$$\Delta_n=\mathbb{F}_n(\nu_n)-1,\quad \mathbb{F}_n(\nu_n)=q_n e^{-\nu_n\theta}(1+\tau_r\theta\,\omega_n\nu_n)\qquad(n\in N).\tag{68}$$

Уведемо до розгляду функцію

$$\mathbb{F}_n(x)=q_n e^{-\theta x}\left(1+\tau_r\theta\frac{x^2}{1+\tau_r x}\right)\qquad(n\in N),$$

визначену на додатній півосі $x\ge 0$. З елементарного дослідження маємо, що для $x\ge 0$ і $n\in N$ виконуються нерівності $\mathbb{F}_n'(x)<0$, тобто функція $\mathbb{F}_n(x)$ $(\forall n\in N)$ є монотонно спадною функцією свого аргументу $x\in[0,+\infty)$. Тоді з урахуванням зазначених вище нерівностей вигляду $0<q_n<q_1<1$ $(n=2,3,\ldots)$ отримаємо для $\mathbb{F}_n(\nu_n)$ такі співвідношення:

$$0<\mathbb{F}_n(\nu_n)<\mathbb{F}_n(0)=q_n<q_1<1\quad(n\in N),\tag{69}$$

де

$$q_1=E_\alpha\left(-\frac{\kappa\pi^2 t_0^\alpha}{1+\tau_r\kappa\pi^2}\right).$$

Отже, згідно із співвідношенями (68), (69) для всіх $n\in N$ виконуються такі нерівності:

$$-1<\Delta_n<q_1-1<0\qquad(n\in N).$$

Звідси випливає, що $\Delta_n\ne 0$ $(\forall n\in N)$ і рівняння (67) має єдиний розв'язок

$$f_n=-\varphi_n\frac{\nu_n}{\Delta_n}\qquad(n\in N).\tag{70}$$

Таким чином, формальний розв'язок оберненої задачі надають співвідношення (40), (61), (62), де функції f_n, $u_n^-(t)$, $u_n^+(t)$ визначаються згідно з (70), (51), (60).

Залишається показати, що одержаний формальний розв'язок оберненої задачі насправді є її регулярним розв'язком. Для цього накладемо на функцію $\varphi(x)$ додаткові обмеження вигляду $\varphi(x)\in C^8[0,1]$, $\varphi^{(i)}(0)=\varphi^{(i)}(1)=0$ $(i=\overline{0,7})$. З урахуванням зазначених обмежень має місце (що легко показати за допомогою кратного інтегрування частинами [24–26, 28, 29]) оцінка $\varphi_n=\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda_n^8}\right)$ $(n\to\infty)$, на основі якої із співвідношення (70) одержуємо

$$|f_n|=\frac{|\varphi_n|}{|\Delta_n|}\nu_n\le|\varphi_n|\frac{\nu_n}{1-q_1}\le\frac{N_1}{\lambda_n^6}\qquad(N_1=\mathrm{const}>0,\,n\in N).$$

Звідси згідно з ознакою Веєрштраса [27] доходимо висновку, що тригонометричний ряд (40) (де f_n визначено згідно з (70)) є абсолютно і рівномірно збіжним на відрізку [0,1], а функції $f^{(i)}(x)$ $(i=0,2)$ — неперервні на цьому відрізку. З урахуванням того, що за умови виконання накладених вище обмежень на функцію $\varphi(x)$ для функцій $u_n^{\pm}(t)$ мають місце оцінки вигляду (63), доходимо висновку, що функція $u(x,t)$ є неперервною, $u(x,t) \in C(\overline{\Omega})$.

Насамкінець зазначимо, що єдиність розв'язку розглядуваної оберненої крайової задачі безпосередньо випливає [26] з повноти системи $\{\sin(\lambda_n x), \lambda_n = n\pi, \ n = 1, 2, \ldots\}$ в просторі $L^2(0,1)$.

ВИСНОВКИ

У роботі одержано замкнені розв'язки деяких нестаціонарних одновимірних прямих і обернених крайових задач моделювання аномальної фільтраційної динаміки в шаруватому геопористому середовищі скінченної потужності, поставлених як задачі для дробово-диференційного узагальнення відомого біпараболічного еволюційного рівняння з частинними похідними 4-го порядку за геометричною змінною. Також наведено постановки та розв'язання прямої і оберненої модельних крайових задач геофільтраційної динаміки на основі спеціальної комбінованої математичної моделі фільтрації з умовами спряження та визначено умови існування регулярних розв'язків розглянутих задач.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Полубаринова-Кочина П.Я., Пряжинская В.Г., Эмих В.Н. Математические методы в вопросах орошения. Москва: Наука, 1969. 414 с.
2. Пряжинская В.Г., Ярошевский Д.М., Левит-Гуревич Л.К. Компьютерное моделирование в управлении водными ресурсами. Москва: Физматгиз, 2002. 496 с.
3. Хасанов М.М., Булгакова Г.Т. Нелинейные и неравновесные эффекты в реологически сложных средах. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 288 с.
4. Баренблатт Г.И., Ентов В.Н., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. Москва: Недра, 1984. 303 с.
5. Baranovsky S.V., Bomba A.Ya., Lyashko S.I. Generalization of the antiviral immune response model for complex consideration of diffusion perturbations, body temperature response, and logistic antigen population dynamics. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2022. Vol. 58, N 4, P. 576–592. https://doi.org/10.1007/s10559-022-00491-w.
6. Булавацький В.М., Кривонос Ю.Г., Скопецький В.В. Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масопереносу. Киев: Наук. думка, 2005. 283 с.
7. Богаєнко В.О., Булавацький В.М., Хіміч О.М. Математичне та комп'ютерне моделювання в задачах гідрогеоміграційної динаміки. Київ: Наук. думка, 2022, 254 с.
8. Povstenko Yu. Linear fractional diffusion-wave equation for scientists and engineers. Switzerland: Springer Int. Publ., 2015. 460 p.
9. Mainardi F. Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. London: Imperial College Press, 2010. 368 p.
10. Sandev T., Tomovsky Z. Fractional equations and models. Theory and applications. Cham, Switzerland: Springer Nature Switzerland AG, 2019. 344 p.
11. Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Изд-во Артишок, 2008. 512 с.
12. Podlubny I. Fractional differential equations. New York: Academic Press, 1999. 341 p.
13. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 p.
14. Bulavatsky V.M., Bohaienko V.O. Numerical simulation of fractional-differential filtration-consolidation dynamics within the framework of models with non-singular kernel. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2018. Vol. 54, N 2. P. 193–204. https://doi.org/10.1007/s10559-018-0020-5.

15. Bulavatsky V.M., Bohaienko V.O. Boundary-value problems for space-time fractional differential filtration dynamics in fractured-porous media. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2022. Vol. 58, N 3. P. 358–371. https://doi.org/10.1007/s10559-022-00468-9.
16. Фущич В.І., Галіцин А.С., Полубинський А.С. Нова математична модель дифузійних процесів зі скінченною швидкістю. *Доп. АН УРСР.* Сер. А. 1998. № 8. С. 21–26.
17. Фущич В.И., Галицын А.С., Полубинский А.С. О новой математической модели процессов теплопроводности. *Укр. мат. журнал*. 1990. Т. 42, № 2. С. 237–245.
18. Bulavatsky V.M. Mathematical modeling of filtrational consolidation of soil under motion of saline solutions on the basis of biparabolic model. *Journal of Automation and Information Science.* 2003. Vol. 35, N 8. P. 13–22.
19. Bulavatsky V.M. Fractional differential analog of biparabolic evolution equation and some its applications. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. Vol. 52, N 5. P. 737–747. https://doi.org/10.1007/ s10559-016-9875-5.
20. Bulavatsky V.M., Bohaienko V.O. Some consolidation dynamics problems within the framework of the biparabolic mathematical model and its fractional differential analog. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2020. Vol. 56, N 5. P. 770–783. https://doi.org/ 10.1007/s10559-020-00298-7.
21. Bulavatsky V.M., Mathematical modeling of fractional differential filtration dynamics based on models with Hilfer–Prabhakar derivative. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2017. Vol. 53, N 2. P. 204–216. https://doi.org/10.1007/s10559-017-9920-z.
22. Sneddon I. The use of integral transform. New York: *Mc. Graw-Hill Book Comp.*, 1973. 536 p.
23. Gorenflo R., Kilbas A.A., Mainardi F., Rogosin S.V. Mittag-Leffler functions, related topics and applications. Berlin: Springer Verlag, 2014. 454 p.
24. Berdyshev A.S., Eshmatov B.E., Kadirkulov B.J. Boundary value problems for fourth-order mixed type equation with fractional derivative. *Electronic Journal of Differential Equations*. 2016. Vol. 36. P. 1–11.
25. Furati K.M., Iyiola O.S., Kirane M. An inverse problem for a generalized fractional diffusion. *Applied Mathematics and Computation*. 2014. Vol. 249. P. 24–31.
26. Salakhitdinov M.S., Karimov E.T. Direct and inverse source problems for two-term time-fractional difusion equation with Hilfer derivative. *Uzbek. Math. J.* 2017. N 4. P. 140–149. //arXiv:1711.00352.
27. Fikhtengol'ts G.M. The fundamentals of mathematical analysis. Vol. 2. Oxford: Pergamon Press, 1965. 520 p.
28. Ali M., Aziz S., Malik S.A. Inverse source problem for a space-time fractional diffusion equation. *Fract. Calc. Appl. Anal*. 2018. Vol. 21. P. 844–863.
29. Yuldashev T.K., Kadirkulov B.J. Inverse boundary value problem for a fractional differential equation of mixed type with integral redefinition conditions. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2021. Vol. 42, N 3. P. 649–662.

V.M. Bulavatsky

SOME BOUNDARY-VALUE PROBLEMS OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL FILTRATION DYNAMICS WITH REGARD TO BIPARABOLIC MATHEMATICAL MODEL

Abstract. Closed-form solutions are obtained to some one-dimensional boundary-value problems for modeling anomalous filtration dynamics in a layered geoporous medium, posed within the framework of the fractional-differential generalization of the biparabolic evolutionary partial differential equation of the fourth order. In particular, the formulation and solution of the direct and inverse model boundary-value problems of geofiltration dynamics based on the mathematical model with conjugation conditions are presented, and the conditions of the existence of regular solutions to these problems are defined.

Keywords: mathematical modeling, fractional-differential dynamics of geofiltration processes, nonclassical models, biparabolic evolutionary equation, fractional-differential analog of the biparabolic evolutionary equation, nonstationary boundary-value problems on a finite interval, direct and inverse problems, conjugation conditions, closed-form solutions.

Надійшла до редакції 29.05.2023