УДК 517.977

А.О. ЧИКРІЙ
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *g.chikrii@gmail.com*.

Й.С. РАППОПОРТ
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *jeffrappoport@gmail.com*.

СТРАТЕГІЇ КЕРУВАННЯ У ПРОБЛЕМІ ЗБЛИЖЕННЯ КОНФЛІКТНО-КЕРОВАНИХ ОБ'ЄКТІВ

Анотація. Запропоновано новий підхід до формування стратегій керування в проблемі зближення конфліктно-керованих об'єктів. Розроблено модифікації першого прямого методу для стробоскопічної стратегії в класі контркерувань, коли не виконується класична умова Понтрягіна. Розглянуто нижню розв'язувальну функцію, що відіграє ключову роль у формулюванні результатів і в загальному випадку може бути визначена з урахуванням функціонала Мінковського деякого багатозначного відображення. Введено верхню розв'язувальну функцію і запропоновано модифіковану схему методу розв'язувальних функцій, що забезпечує завершення конфліктно-керованого процесу в класі квазістратегій і контркерувань, коли умова Понтрягіна не виконується. Надано порівняння гарантованих часів для різних схем розглянутих методів. Теоретичні результати проілюстровано на модельному прикладі другого порядку зі спеціальною неопуклою областю керування переслідувача.

Ключові слова: стратегія керування, розв'язувальна функція, ігрова задача динаміки, проблема зближення керованих об'єктів.

ВСТУП

У роботі розглянуто проблеми зближення керованих об'єктів та стратегії перехоплення цілей в ігрових задачах динаміки на основі першого методу Понтрягіна [1], а також методу розв'язувальних функцій [2], його сучасної версії [3]. Актуальність цієї проблеми зумовлена необхідністю теоретичного обґрунтування відомих проєктувальникам ракетної та космічної техніки методів кривої погоні Ейлера, методу переслідування за променем і, зокрема, паралельного зближення. Умова Понтрягіна [1] є ключовою умовою в першому методі Понтрягіна та методу розв'язувальних функцій, і у разі її нездійсненності ці методи не працюють. У цій роботі описано випадок, коли умова Понтрягіна не виконується. Розглянуті спеціальні багатозначні відображення, які породжують верхні і нижні розв'язувальні функції, вперше введені в статті [4]. Робота продовжує дослідження [1–5], дотична до публікацій [6–12] і поширює клас ігрових задач зближення керованих об'єктів та перехоплення цілей, які мають розв'язок.

Теорія диференціальних ігор виникла у середині XX століття. На цей час в межах антагоністичних диференціальних ігор, коли рух обчислюють звичайними диференціальними рівняннями, «традиційними» можна вважати такі задачі: питання існування функції ціни та дослідження її властивостей, чисельні конструкції ціни та оптимальних стратегій, розв'язання модельних прикладних задач. У роботі [13] наведено приклади постановки задач антагоністичної теорії диференціальних ігор та відповідні методи їхнього дослідження. У роботі [14] досліджено прикладні задачі, для розв'язання яких використовано методи диференціальних ігор переслідування–втікання. Але досі складними та нерозв'язними залишаються проблеми зближення керованих об'єктів та стратегій перехоплення цілей в ігрових задачах динаміки з багатьма учасниками.

Серед останніх публікацій зарубіжних авторів, тематика яких пов'язана з питаннями керування, реально наявними прототипами безпілотних апаратів варто зазначити праці [15–19]. У цих роботах розв'язано задачі групової взаємодії за умов зближення керованих об'єктів та стратегій перехоплення цілей з багатьма учасниками. З аналізу наведених робіт випливає, що евристичні методи зближення конфліктно-керованих об'єктів поширюються і мають прикладний, інженерний характер. Отримані у цих роботах результати підкріплені експериментами з використанням комп'ютерного моделювання, а також польовими випробуваннями за допомогою наявних прототипів безпілотних літальних апаратів та інших об'єктів керування. Для теоретичного обгрунтування результатів таких робіт запропоновано новий підхід до формування стратегій керування, що дає змогу розробити ефективний математичний апарат, придатний для застосування в реальних умовах для вирішення проблеми зближення керованих об'єктів та стратегій перехоплення цілей в ігрових задачах динаміки з багатьма учасниками.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. СТРАТЕГІЇ КЕРУВАННЯ

У кінцевовимірному евклідовому просторі R^n, $n \ge 2$, розглянемо конфліктно-керований процес, еволюцію якого опишемо рівністю

$$z(t) = g(t) + \int_0^t \Omega(t,\tau)\varphi(u(\tau), v(\tau))\,d\tau, \quad t \ge 0. \tag{1}$$

Тут $z(t) \in R^n$, функція $g(t)$, $g\colon R_+ \to R^n$, $R_+ = \{t \colon t \ge 0\}$, вимірна за Лебегом [9, 11] і обмежена для $t > 0$, матрична функція $\Omega(t,\tau)$, $t \ge \tau \ge 0$, вимірна за t, а також є сумовною за τ для кожного $t \in R_+$. Блок керування задано функцією $\varphi(u,v)$, $\varphi\colon U \times V \to R^n$, яка вважається неперервною за сукупністю змінних на прямому добутку непорожніх компактів U і V.

Керування гравців $u(\tau)$, $u\colon R_+ \to U$, і $v(\tau)$, $v\colon R_+ \to V$, є вимірними функціями часу. Крім процесу (1) задано термінальну множину M^*, що має циліндричний вигляд

$$M^* = M_0 + M, \tag{2}$$

де M_0 — лінійний підпростір з R^n, а M — компакт з ортогонального доповнення L до підпростору M_0 у R^n.

Цілі першого (u) і другого (v) гравців протилежні. Перший гравець (переслідувач) намагається вивести траєкторію процесу (1) на термінальну множину (2) за найкоротший час, а другий гравець (втікач) — максимально відтягнути момент попадання траєкторії на множину M^* або взагалі уникнути зустрічі.

Нехай гра (1), (2) триває на інтервалі $[0, T]$. Вважатимемо, що задана стратегія зближення, якщо визначено відображення $U(g(T), v_t(\cdot))$, яке за інформацією про $g(T)$ і $v_t(\cdot)$ формує вимірну функцію

$$u(t) = u(g(T), v_t(\cdot)), \quad t \in [0,T], \quad u(t) \in U. \tag{3}$$

Тут $v_t(\cdot) = \{v(s) \colon s \in [0, t]\}$ — передісторія керування другого гравця до моменту t. Якщо замість відображення $U(g(T), v_t(\cdot))$ матимемо відображення $U(g(T), v(t))$, то вважатимемо, що задана стробоскопічна стратегія зближення, яка визначає контркерування у вигляді вимірної функції

$$u(t) = u(g(T), v(t)), \quad t \in [0,T], \quad u(t) \in U. \tag{4}$$

Керування $u(t) = u(z_0, v_t(\cdot))$ реалізує квазістратегію, а контркерування [7] $u(t) = u(z_0, v(t))$ призначається стробоскопічною стратегією Хаєка [8]. При цьому має бути виконана умова «фізичної здійсненності»: якщо $v^1(t) = v^2(t)$ майже всюди для $t \geq 0$, то $u(z_0, v_t^1(\cdot)) = u(z_0, v_t^2(\cdot))$ майже всюди для $t \geq 0$, $v^i(t) \in V$ — вимірна функція, $i = 1, 2$.

Сформулюємо необхідні факти з опуклого аналізу [10, 11] у вигляді леми.

Лема 1. Нехай $X \in R^n$ — опуклий компакт, $\omega(\tau)$ — невід'ємна обмежена вимірна числова функція. Тоді $\int_0^T \omega(\tau) X d\tau = \int_0^T \omega(\tau) d\tau X$, $T > 0$. До того ж якщо $0 \in X$, $f(\tau) \in \omega(\tau) X$ і $\int_0^T \omega(\tau) d\tau \leq 1$, то $\int_0^T f(\tau) d\tau \in X$, $f(\tau)$ — вимірна функція, $\tau \in [0, T]$.

СТРАТЕГІЇ КЕРУВАННЯ В ПРЯМИХ МЕТОДАХ ЗБЛИЖЕННЯ КОНФЛІКТНО-КЕРОВАНИХ ОБ'ЄКТІВ

Позначимо π оператор ортогонального проєктування з R^n у L. Покладемо $\varphi(U, v) = \{\varphi(u, v) : u \in U\}$ і розглянемо багатозначні відображення

$$W(t, \tau, v) = \pi \Omega(t, \tau) \varphi(U, v), \quad W(t, \tau) = \bigcap_{v \in V} W(t, \tau, v)$$

на множинах $\Delta_\Theta \times V$ і Δ_Θ відповідно, де $\Delta_\Theta = \{(t, \tau) : 0 \leq \tau \leq t \leq \Theta < \infty\}$, Θ — деяке додатне число. Допустимо, що багатозначне відображення $W(t, \tau, v)$ має замкнені значення на множині $\Delta_\Theta \times V$.

Умова Понтрягіна. Багатозначне відображення $W(t, \tau)$ набуває непорожніх значень на множині Δ_Θ, Θ — деяке додатне число.

З урахуванням припущень про матричну функцію $\Omega(t, \tau)$ можна дійти висновку, що для будь-якого фіксованого $t > 0$ вектор-функція $\pi \Omega(t, \tau) \varphi(u, v)$ буде $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірною за $(\tau, v) \in [0, t] \times V$ і неперервною за $u \in U$. Тому на підставі теореми про прямий образ [9] за будь-якого фіксованого $t > 0$ багатозначне відображення $W(t, \tau, v)$ є $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірним за $(\tau, v) \in [0, t] \times V$. Якщо умова Понтрягіна виконана, то на множині Δ існує принаймні один селектор $\gamma_0(t, \tau)$ відображення $W(t, \tau)$, $\gamma_0(t, \tau) \in W(t, \tau)$. Такий селектор називають селектором Понтрягіна. Сформулюємо умову Понтрягіна в еквівалентному вигляді.

Умова 1. На множині Δ_Θ, де Θ — деяке додатне число, існує селектор Понтрягіна $\gamma_0(t, \tau)$, для якого справедливе включення

$$0 \in \bigcap_{v \in V} [W(t, \tau, v) - \gamma_0(t, \tau)].$$

Нехай $\gamma(t, \tau)$, $\gamma : \Delta_\Theta \to L$, — деяка (майже всюди) обмежена вимірна за t і сумовна за τ, $\tau \in [0, t]$, для кожного $t > 0$ функція, яку називатимемо функцією зсуву, $\Delta_\Theta = \{(t, \tau) : 0 \leq \tau \leq t \leq \Theta < \infty\}$, Θ — деяке додатне число.

Позначимо $\xi(t) = \xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot)) = \pi g(t) + \int_0^t \gamma(t, \tau) d\tau$ і розглянемо для $\tau \in [0, t]$, $t > 0$, $v \in V$ багатозначне відображення

$$\mathfrak{A}(t, \tau, v) = \{\alpha \geq 0 : [W(t, \tau, v) - \gamma(t, \tau)] \cap \alpha [M - \xi(t)] \neq \varnothing\}.$$

Лема 2 [3]. Для конфліктно-керованого процесу (1), (2) виконується умова 1 тоді і тільки тоді, коли існує функція зсуву $\gamma(t, \tau)$ така, що $0 \in \mathfrak{A}(t, \tau, v)$ на множині $\Delta_\Theta \times V$.

Якщо на множині $\Delta_{\Theta} \times V$ виконано умову $\mathfrak{A}(t, \tau, v) \neq \varnothing$, то розглянемо для $\tau \in [0, t]$, $t > 0$, $v \in V$ нижню скалярну розв'язувальну функцію

$$\alpha_*(t, \tau, v) = \inf\{\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}(t, \tau, v)\}.$$

Відповідно до [12] багатозначне відображення $\mathfrak{A}(t, \tau, v)$ є замкненозначним, $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірним за сукупністю (τ, v), $\tau \in [0, t]$, $v \in V$, а нижня розв'язувальна функція є $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірною за сукупністю (τ, v), $\tau \in [0, t]$, $v \in V$, і тому вона суперпозиційовно вимірна [12]. Інакше кажучі, $\alpha_*(t, \tau, v(\tau))$ є вимірною за τ, $\tau \in [0, t]$, для будь-якої вимірної функції $v(\cdot) \in V(\cdot)$, де $V(\cdot)$ — сукупність вимірних функцій $v(\tau)$, $\tau \in [0, +\infty]$, зі значеннями щодо V. Зазначимо також, що нижня розв'язувальна функція напівнеперервна знизу за змінної v і функція $\sup\limits_{v \in V} \alpha_*(t, \tau, v)$ вимірна за τ, $\tau \in [0, t]$.

Умова 2. Для деякого додатного числа Θ і визначеної функції зсуву $\gamma(\cdot, \cdot)$ на множині $\Delta_{\Theta} \times V$ справедлива умова $\mathfrak{A}(t, \tau, v) \neq \varnothing$.

Розглянемо множину

$$T(g(t), \gamma(\cdot, \cdot)) = \left\{ t \in [0, \Theta] : \int_0^t \sup_{v \in V} \alpha_*(t, \tau, v)\, d\tau \leq 1 \right\}. \tag{5}$$

Якщо нерівність в фігурних дужках співвідношення (5) не виконується для жодних $t \in [0, \Theta]$, то покладемо $T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) = \varnothing$.

Теорема 1. Нехай для конфліктно-керованого процесу (1), (2), деякого додатного числа Θ і визначеної функції зсуву $\gamma(\cdot, \cdot)$ виконано умову 2, множина M є опуклою, множина $T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$ не є порожньою, $T \in T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$ і $\xi(T) \in M$. Тоді гра може бути закінченою в момент T з використанням керування вигляду (4).

Доведення. Нехай $v(\tau)$ — довільний вимірний селектор компакта V, $\tau \in [0, T]$. Виокремимо стробоскопічну стратегію зближення для нижньої розв'язувальної функції $\alpha_*(T, \tau, v)$.

Розглянемо для $v \in V$, $\tau \in [0, T]$ компактнозначне багатозначне відображення

$$U_*(\tau, v) = \{u \in U : \pi\,\Omega(T, \tau)\,\varphi(u, v) - \gamma(T, \tau) \in \alpha_*(T, \tau, v)\,[M - \xi(T)]\}.$$

З урахуванням властивостей параметрів процесу (1) і нижньої розв'язувальної функції $\alpha_*(T, \tau, v)$ компактнозначне відображення $U_*(\tau, v)$ є $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірним [12] для $v \in V$, $\tau \in [0, T]$. Тому за умов теореми про вимірний вибір селектора [9] багатозначне відображення $U^*(\tau, v)$ містить $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірний селектор $u_*(\tau, v)$, який є суперпозиційно вимірною функцією [12].

Покладемо керування першого гравця $u_*(\tau) = u_*(\tau, v(\tau))$, $\tau \in [0, T]$. З урахуванням формули (1) отримаємо

$$\pi z(T) = \xi(T) + \int_0^{P_*} (\pi\,\Omega(T, \tau)\,\varphi(u_*(\tau), v(\tau)) - \gamma(T, \tau))\, d\tau. \tag{6}$$

За вибором керування і за визначенням моменту T маємо

$$0 \in M - \xi(T), \quad \int_0^T \alpha_*(T, \tau, v(\tau))\, d\tau \leq \int_0^T \sup_{v \in V} \alpha_*(T, \tau, v)\, d\tau \leq 1,$$

$$\pi\,\Omega(T, \tau)\,\varphi(u_*(\tau), v(\tau)) - \gamma(T, \tau) \in \alpha_*(T, \tau, v(\tau))\,[M - \xi(T)].$$

Тоді з урахуванням леми 1 справедливе включення

$$\int_0^T [\pi\,\Omega(T, \tau)\,\varphi(u_*(\tau), v(\tau)) - \gamma(T, \tau)]\, d\tau \in M - \xi(T).$$

Таким чином, співвідношення (6) визначає

$$\pi z(T) \in \xi(T) + M - \xi(T) = M.$$

Отже, $z(T) \in M^*$, що завершує доведення теореми.

Наслідок 1. Нехай для конфліктно-керованого процесу (1), (2), деякого додатного числа Θ і визначеної функції зсуву $\gamma(\cdot,\cdot)$ виконано умову 2, множина M є опуклою, множина $T(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot))$ не є порожньою, $T \in T(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot))$ і $\xi(T) \in M$. Тоді має місце нерівність

$$\mu_{M-\xi(T)}\left(\int_0^T [\pi\,\Omega(T,\tau)\varphi(u_*(\tau), v(\tau)) - \gamma(T,\tau)]\,d\tau\right) \le \int_0^T \alpha_*(T,\tau,v(\tau))\,d\tau,$$

де $\mu_X(f(t)) = \inf\{\mu \ge 0 : f(t) \in \mu X\}$ — функціонал Мінковського, $X \in R^n$ — опуклий компакт, $0 \in X$, $f(t)$ — вимірна функція.

Доведення. За вибором керування в доведенні теореми 1 має місце включення

$$\pi\Omega(T,\tau)\varphi(u_*(\tau), v(\tau)) - \gamma(T,\tau) \in \alpha_*(T,\tau,v(\tau))[M - \xi(T)].$$

Тоді з урахуванням леми 1 справедливе включення

$$\int_0^T [\pi\Omega(T,\tau)\varphi(u_*(\tau), v(\tau)) - \gamma(T,\tau)]\,d\tau \in \int_0^T \alpha_*(T,\tau,v(\tau))\,d\tau[M - \xi(T)].$$

З визначенням функціоналу Мінковського маємо необхідний результат.

Наслідок 2. Нехай для конфліктно-керованого процесу (1), (2), деякого додатного числа Θ, визначеної функції зсуву $\gamma(\cdot,\cdot)$ і для деякого моменту T, що задовольняє умова 1, $\xi(T) \in M$ і M є опуклою множиною. Тоді гра може бути закінченою в момент T з використанням керування вигляду (4).

Доведення. Якщо для деякого моменту T, що задовольняє умова 1, $\xi(T) \in M$, то аналогічно до леми 2 виконана умова 2 і $\int_0^T \sup_{v \in V} \alpha_*(T,\tau,v)\,d\tau = 0$. Отже, $T \in T(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot))$ і виконано всі умови теореми 1. При цьому стробоскопічна стратегія зближення для нижньої розв'язувальної функції $\alpha_*(T,\tau,v)$ трансформується у стратегію Понтрягіна [7].

Теорема 1 є узагальненням першого прямого методу Понтрягіна, якщо умова Понтрягіна не виконується [5]. Умову 2 вважатимемо модифікованою умовою Понтрягіна першого типу. Сформулюємо модифіковану умову Понтрягіна другого типу.

Умова 3. Для деякого додатного числа Θ і визначеної функції зсуву $\gamma(\cdot,\cdot)$ на множині $\Delta_\Theta \times V$ справедлива умова 2 і для $(t,\tau) \in \Delta_\Theta$ має місце включення

$$0 \in \bigcap_{v \in V} \{[W(t,\tau,v) - \gamma(t,\tau)] - \sup_{v \in V} \alpha_*(t,\tau,v)[M - \xi(t)]\}.$$

Теорема 2. Нехай для конфліктно-керованого процесу (1), (2), деякого додатного числа Θ і визначеної функції зсуву $\gamma(\cdot,\cdot)$ виконана умова 3, множина M є опуклою, множина $T(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot))$ не є порожньою, $T \in T(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot))$, $\xi(T) \notin M$ і $\int_0^T \sup_{v \in V} \alpha_*(T,\tau,v)\,d\tau = 1$. Тоді гра може бути закінченою в момент T з використанням керування вигляду (4).

Доведення. Нехай $v(\tau)$ — довільний вимірний селектор компакта V, $\tau \in [0,T]$. Виокремимо стробоскопічну стратегію зближення для нижньої розв'язувальної функції вигляду $\sup\limits_{v \in V} \alpha_* (T, \tau, v)$. Для цього розглянемо компактнозначне відображення

$$\underline{U}_* (\tau, v) = \{ u \in U : \pi \Omega (T, \tau) \varphi (u, v) - \gamma (T, \tau) \in$$
$$\in \sup_{v \in V} \alpha_* (T, \tau, v) [M - \xi (T)] \}, \ \tau \in [0, T]. \tag{7}$$

Багатозначне відображення $\underline{U}_* (\tau, v)$ має непорожні образи. З урахуванням властивостей параметрів процесу (1) і функції $\sup\limits_{v \in V} \alpha_* (T, \tau, v)$ компактнозначне відображення $\underline{U}_* (\tau, v)$, $\tau \in [0, T]$, для $v \in V$ є $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірним [12]. Тому за умов теореми про вимірний вибір селектора [9] воно містить хоча б один $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірний селектор $\underline{u}_* (\tau, v)$, який є суперпозиційно вимірною функцією [12]. Покладемо керування першого гравця $\underline{u}_* (\tau) = \underline{u}_* (\tau, v (\tau))$, $\tau \in [0, T]$.

Згідно з формулою (1) для вибраного керуваня отримаємо

$$\pi z(T) = \xi (T) + \int_0^T (\pi \Omega (T, \tau) \varphi (u_* (\tau), v (\tau)) - \gamma (T, \tau)) d\tau. \tag{8}$$

Співвідношення (7), (8) з урахуванням леми 1 визначають

$$\pi z(T) \in \xi(T) + \int_0^T \sup_{v \in V} \alpha_* (T, \tau, v) [M - \xi (T)] \, d\tau =$$
$$= \xi(T) + \int_0^T \sup_{v \in V} \alpha_* (T, \tau, v) \, d\tau [M - \xi (T)] =$$
$$= \xi(T) \left[1 - \int_0^T \sup_{v \in V} \alpha_* (T, \tau, v) \, d\tau \right] + \left[\int_0^T \sup_{v \in V} \alpha_* (T, \tau, v) \, d\tau \right] M = M.$$

Теорема 2 виокремлює друге узагальнення першого прямого методу Понтрягіна, що гарантує успішне завершення конфліктно-керованого процесу в класі контркерувань, коли умова Понтрягіна не виконується.

МОДИФІКОВАНА СХЕМА МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗУВАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Якщо на множині $\Delta_\Theta \times V$ виконано умову $\mathfrak{A} (t, \tau, v) \neq \varnothing$ і $\xi(T) \notin M$, то розглянемо верхню скалярну розв'язувальну функцію

$$\alpha^* (t, \tau, v) = \sup \{ \alpha : \alpha \in \mathfrak{A} (t, \tau, v) \}, \ (t, \tau) \in \Delta_\Theta, \ v \in V.$$

Відповідно до [12] верхня розв'язувальна функція є $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірною за сукупністю (τ, v), $(t, \tau) \in \Delta_\Theta$, $v \in V$, і тому вона суперпозиційно вимірна [12], тобто $\alpha^* (t, \tau, v(\tau))$ вимірна за τ, $(t, \tau) \in \Delta_\Theta$, для будь-якої вимірної функції $v (\cdot) \in V (\cdot)$. Зазначимо також, що верхня розв'язувальна функція напівнеперервна зверху за змінною v та функція $\inf\limits_{v \in V} \alpha^* (t, \tau, v)$ вимірна за τ, $(t, \tau) \in \Delta_\Theta$. Зауважимо, що верхню розв'язувальну функцію в загальному випадку можна визначити з використанням оберненого функціонала Мінковського деяких багатозначних відображень [2].

Теорема 3. Нехай для конфліктно-керованого процесу (1), (2), деякого додатного числа Θ і визначеної функції зсуву $\gamma (\cdot, \cdot)$ виконано умову 3, множина M є опуклою, множина $T (g (\cdot), \gamma (\cdot, \cdot))$ не є порожньою, $T \in T (g (\cdot), \gamma (\cdot, \cdot))$, $\xi(T) \notin M$, $\int_0^T \sup\limits_{v \in V} \alpha_* (T, \tau, v) \, d\tau < 1$ і $\int_0^T \inf\limits_{v \in V} \alpha^* (T, \tau, v) \, d\tau \geq 1$. Тоді гра може бути закінченою в момент T з використанням керування вигляду (3).

Доведення. Нехай $v(\tau)$ — довільний вимірний селектор компакта V, $\tau \in [0, T]$.

Зазначимо стратегію зближення для розв'язувальних функцій $\alpha^*(T, \tau, v(\tau))$ і $\sup\limits_{v \in V} \alpha_*(T, \tau, v)$.

Запровадимо контрольну функцію

$$h(t) = 1 - \int_0^t \alpha^*(T, \tau, v(\tau))\, d\tau - \int_t^T \sup_{v \in V} \alpha_*(T, \tau, v)\, d\tau, \; t \in [0, T].$$

За визначенням T маємо

$$h(0) = 1 - \int_0^T \sup_{v \in V} \alpha_*(T, \tau, v)\, d\tau > 0,$$

$$h(T) = 1 - \int_0^T \alpha^*(T, \tau, v(\tau))\, d\tau \le 1 - \int_0^T \inf_{v \in V} \alpha^*(T, \tau, v)\, d\tau \le 0.$$

Внаслідок неперервності функції $h(t)$ існує такий момент часу t_*, $t_* \in (0, T]$, що $h(t_*) = 0$. Проміжки часу $[0, t_*)$, $[t_*, T]$ називатимемо активним і пасивним відповідно. Задамо стратегію зближення на кожному проміжку. Зазначимо, що момент перемикання t_* залежить від передісторії керування другого гравця $v_{t_*}(\cdot) = \{v(s): s \in [0, t_*]\}$. Тому стратегія зближення буде квазістратегією.

Розглянемо компактнозначні відображення

$$\overline{U}^*(\tau, v) = \{u \in U: (\pi \Omega(T, \tau) \varphi(u, v) - \gamma(T, \tau)) \in \in \alpha^*(T, \tau, v)[M - \xi(T)]\}, \; \tau \in [0, t_*), \tag{9}$$

$$\overline{U}_*(\tau, v) = \{u \in U: (\pi \Omega(T, \tau) \varphi(u, v) - \gamma(T, \tau)) \in \in \sup_{v \in V} \alpha_*(T, \tau, v)[M - \xi(T)]\}, \; \tau \in [t_*, T]. \tag{10}$$

Багатозначні відображення $\overline{U}^*(\tau, v)$ і $\overline{U}_*(\tau, v)$ мають непорожні образи. З урахуванням властивостей параметрів процесу (1), функцій $\alpha^*(T, \tau, v)$ і $\sup\limits_{v \in V} \alpha_*(T, \tau, v)$ компактнозначні відображення $\overline{U}^*(\tau, v)$, $\tau \in [0, t_*)$, і $\overline{U}_*(\tau, v)$, $\tau \in [t_*, T]$, для $v \in V$ є $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірними [12]. Тому за умов теореми про вимірний вибір селектора [9] кожне з них має хоча б по одному $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірному селектору $\overline{u}^*(\tau, v)$ і $\overline{u}_*(\tau, v)$, які є суперпозиційно вимірними функціями [12]. Покладемо керування першого гравця на активному проміжку $\overline{u}^*(\tau) = \overline{u}^*(\tau, v(\tau))$, $\tau \in [0, t_*)$, а на пасивному проміжку покладемо $\overline{u}_*(\tau) = \overline{u}_*(\tau, v(\tau))$, $\tau \in [t_*, T]$.

Згідно з формулою (1) для вибраних керувань отримаємо

$$\pi z(T) = \xi(T) + \int_0^{t_*} (\pi \Omega(T, \tau) \varphi(\overline{u}^*(\tau), v(\tau)) - \gamma(T, \tau))\, d\tau + + \int_0^T (\pi \Omega(T, \tau) \varphi(\overline{u}_*(\tau), v(\tau)) - \gamma(T, \tau))\, d\tau. \tag{11}$$

Співвідношення (9)–(11) визначають

$$\pi z(T) \in \xi(T) + \int_0^{t_*} \alpha^*(T,\tau,v(\tau))[M - \xi(T)]\,d\tau + \int_{t_*}^{T} \sup_{v \in V} \alpha_*(T,\tau,v)[M - \xi(T)]\,d\tau =$$

$$= \xi(T) + \int_0^{t_*} \alpha^*(T,\tau,v(\tau))\,d\tau\,[M - \xi(T)] + \int_{t_*}^{T} \sup_{v \in V} \alpha_*(T,\tau,v)\,d\tau\,[M - \xi(T)] =$$

$$= \xi(T)\left[1 - \int_0^{t_*} \alpha^*(T,\tau,v(\tau))\,d\tau - \int_{t_*}^{T} \sup_{v \in V} \alpha_*(T,\tau,v)\,d\tau\right] +$$

$$+ \left[\int_0^{t_*} \alpha^*(T,\tau,v(\tau))\,d\tau + \int_{t_*}^{T} \sup_{v \in V} \alpha_*(T,\tau,v)\,d\tau\right] M = M.$$

Тут враховано лему 1 і рівність $h(t_*) = 0$.

Наслідок 3. Нехай для конфліктно-керованого процесу (1), (2), деякого додатного числа Θ, визначеної функції зсуву $\gamma(\cdot,\cdot)$ і для деякого моменту T, що задовольняє умова 1, $\xi(T) \notin M$, $\int_0^T \inf_{v \in V} \alpha^*(T,\tau,v)\,d\tau \geq 1$ і множина M є опуклою. Тоді гра може бути закінченою в момент T з використанням керування вигляду (3).

Доведення. Якщо для деякого моменту T, що задовольняє умова 1, $\xi(T) \notin M$ і $\int_0^T \inf_{v \in V} \alpha^*(T,\tau,v)\,d\tau \geq 1$, то за аналогією з лемою 2 виконана умова 3 і $\int_0^T \sup_{v \in V} \alpha_*(T,\tau,v)\,d\tau = 0$. Отже, $T \in T(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot))$ і виконано всі умови теореми 3. При цьому стробоскопічна стратегія зближення для нижньої розв'язувальної функції $\sup_{v \in V} \alpha_*(T,\tau,v)$ трансформується у стратегію Понтрягіна [7].

Теорема 3 є модифікованою схемою методу розв'язувальних функцій [3] у разі використання квазістратегій переслідувачем, коли умова Понтрягіна не виконується.

Умова 4. Для деякого додатного числа Θ на множині $\Delta_\Theta \times V$ справедлива умова 3 і для $(t,\tau) \in \Delta_\Theta$ має місце включення

$$0 \in \bigcap_{v \in V} \{[W(t,\tau,v) - \gamma(t,\tau)] - \inf_{v \in V} \alpha^*(t,\tau,v)[M - \xi(t)]\}.$$

Теорема 4. Нехай для конфліктно-керованого процесу (1), (2), деякого додатного числа Θ і визначеної функції зсуву $\gamma(\cdot,\cdot)$ виконана умова 4, множина M є опуклою, множина $T(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot))$ не є порожньою, $T \in T(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot))$, $\xi(T) \notin M$, $\int_0^T \sup_{v \in V} \alpha_*(T,\tau,v)\,d\tau < 1$ і $\int_0^T \inf_{v \in V} \alpha^*(T,\tau,v)\,d\tau \geq 1$. Тоді гра може бути закінченою в момент T з використанням керування вигляду (4).

Доведення. Нехай $v(\tau)$ — довільний вимірний селектор компакта V, $\tau \in [0, T]$.

Визначимо стратегію зближення для розв'язувальних функцій $\inf_{v \in V} \alpha^*(T,\tau,v)$, $\sup_{v \in V} \alpha_*(T,\tau,v)$.

Запровадимо контрольну функцію

$$h(t)=1-\int_0^t \inf_{v\in V}\alpha^*(T,\tau,v)\,d\tau-\int_t^T \sup_{v\in V}\alpha_*(T,\tau,v)\,d\tau,\quad t\in[0,T].$$

З означення T маємо

$$h(0)=1-\int_0^T \sup_{v\in V}\alpha_*(T,\tau,v)\,d\tau>0,\ \ h(T)=1-\int_0^T \inf_{v\in V}\alpha^*(T,\tau,v)\,d\tau\le 0.$$

Внаслідок неперервності функції $h(t)$ існує такий момент часу t_*, $t_*\in(0,T]$, що $h(t_*)=0$. Проміжки часу $[0,t_*)$, $[t_*,T]$ називатимемо активним і пасивним відповідно. Задамо стратегію зближення на кожному проміжку. Зазначимо, що момент перемикання t_* не залежить від передісторії керування другого гравця $v_{t_*}(\cdot)=\{v(s): s\in[0,t_*]\}$. Тому стратегія зближення буде стробоскопічною стратегією.

Розглянемо компактнозначні відображення

$$\widetilde{U}^*(\tau,v)=\{u\in U:\pi\,\Omega(T,\tau)\varphi(u,v)-\gamma(T,\tau)\in$$
$$\in\inf_{v\in V}\alpha^*(T,\tau,v)[M-\xi(T)]\},\ \tau\in[0,t_*],\tag{12}$$

$$\widetilde{U}_*(\tau,v)=\{u\in U:\pi\,\Omega(T,\tau)\varphi(u,v)-\gamma(T,\tau)\in$$
$$\in\sup_{v\in V}\alpha_*(T,\tau,v)[M-\xi(T)]\},\ \tau\in[t_*,T].\tag{13}$$

Багатозначні відображення $\widetilde{U}^*(\tau,v)$ і $\widetilde{U}_*(\tau,v)$ мають непорожні образи. З урахуванням властивостей параметрів процесу (1), функцій $\inf_{v\in V}\alpha^*(T,\tau,v)$ і $\sup_{v\in V}\alpha_*(T,\tau,v)$ компактнозначні відображення $\widetilde{U}^*(\tau,v)$, $\tau\in[0,t_*)$, і $\widetilde{U}_*(\tau,v)$, $\tau\in[t_*,T]$, для $v\in V$ є $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-вимірними [12]. Тому за умов теореми про вимірний вибір селектора [9] кожне з них має хоча б по одному $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-вимірному селектору $\widetilde{u}^*(\tau,v)$ і $\widetilde{u}_*(\tau,v)$, які є суперпозиційно вимірними функціями [12]. Покладемо керування першого гравця на активному проміжку $\widetilde{u}^*(\tau)=\widetilde{u}^*(\tau,v(\tau))$, $\tau\in[0,t_*)$, а на пасивному проміжку покладемо $\widetilde{u}_*(\tau)=\widetilde{u}_*(\tau,v(\tau))$, $\tau\in[t_*,T]$.

Згідно з формулою (1) для вибраних керувань отримаємо

$$\pi\,z(T)=\xi(T)+\int_0^{t_*}(\pi\,\Omega(T,\tau)\varphi(\widetilde{u}^*(\tau),v(\tau))-\gamma(T,\tau))\,d\tau+$$
$$+\int_{t_*}^T(\pi\,\Omega(T,\tau)\varphi(\widetilde{u}_*(\tau),v(\tau))-\gamma(T,\tau))\,d\tau.\tag{14}$$

Співвідношення (12)–(14) визначають

$$\pi\,z(T)\in\xi(T)+\int_0^{t_*}\inf_{v\in V}\alpha^*(T,\tau,v)[M-\xi(T)]\,d\tau+\int_{t_*}^T\sup_{v\in V}\alpha_*(T,\tau,v)[M-\xi(T)]\,d\tau=$$

$$=\xi(T)+\int_0^{t_*}\inf_{v\in V}\alpha^*(T,\tau,v)\,d\tau\,[M-\xi(T)]+\int_{t_*}^T\sup_{v\in V}\alpha_*(T,\tau,v)\,d\tau\,[M-\xi(T)]=$$

$$= \xi(T)\left[1-\int_0^{t_*}\inf_{v\in V}\alpha^*(T,\tau,v)\,d\tau-\int_{t_*}^{T}\sup_{v\in V}\alpha_*(T,\tau,v)\,d\tau\right]+$$

$$+\left[\int_0^{t_*}\inf_{v\in V}\alpha^*(T,\tau,v)\,d\tau+\int_{t_*}^{T}\sup_{v\in V}\alpha_*(T,\tau,v)\,d\tau\right]M=M.$$

Тут враховано лему 1 і рівність $h(t_*)=0.$

Наслідок 4. Нехай для конфліктно-керованого процесу (1), (2), деякого додатного числа Θ, визначеної функції зсуву $\gamma(\cdot,\cdot)$ і для деякого моменту T, що задовольняє умова 1, $\xi(T)\notin M$, $\int_0^T \inf_{v\in V}\alpha^*(T,\tau,v)\,d\tau\geq 1$ має місце включення

$$0\in\bigcap_{v\in V}\{[W(T,\tau,v)-\gamma(T,\tau)]-\inf_{v\in V}\alpha^*(T,\tau,v)[M-\xi(T)]\}$$

і множина M є опуклою. Тоді гра може бути закінченою в момент T з використанням керування вигляду (4).

Доведення. Якщо для деякого моменту T, що задовольняє умова 1, $\xi(T)\notin M,$ $\int_0^T \inf_{v\in V}\alpha^*(T,\tau,v)\,d\tau\geq 1$ і має місце включення

$$0\in\bigcap_{v\in V}\{[W(T,\tau,v)-\gamma(T,\tau)]-\inf_{v\in V}\alpha^*(T,\tau,v)[M-\xi(T)]\},$$

то за аналогією з лемою 2 виконана умова 3 і $\int_0^T \sup_{v\in V}\alpha_*(T,\tau,v)\,d\tau=0.$ Отже, $T\in T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$ і виконано всі умови теореми 4. При цьому стробоскопічна стратегія зближення для нижньої розв'язувальної функції $\sup_{v\in V}\alpha_*(T,\tau,v)$ перетворюється у стратегію Понтрягіна [7].

Теорема 4 є модифікованою схемою методу розв'язувальних функцій [3] у випадку використання переслідувачем стробоскопічної стратегії Хаєка, коли умова Понтрягіна не виконується.

Позначимо T_i мінімальний момент, що задовольняє умови теореми з номером i, $i=1,2,3,4$. Позначимо P мінімальний момент, що задовольняє умови наслідку 2, R_Q позначимо мінімальний момент, що задовольняє умови наслідку 3, і відповідно R_S позначимо мінімальний момент, що задовольняє умови наслідку 4.

Теорема 5. Нехай для конфліктно-керованого процесу (1), (2) виконуються умови відповідних теорем. Тоді для гарантованих часів зближення керованих об'єктів мають місце співвідношення $T_2\geq T_4\geq T_3$, $P\geq T_1$, $R_Q\geq T_3$, $R_S\geq T_4$.

Доведення випливає з визначень та результатів попередніх розділів роботи.

МОДЕЛЬНИЙ ПРИКЛАД

Нехай у просторі R^{2n}, $n\geq 2$, динаміку об'єктів задано рівняннями

$$\dot z_1 = z_2,$$
$$\dot z_2 = u-v. \tag{15}$$

Тут $z=\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\end{pmatrix}\in R^{2n}$, $U=\left\{\begin{pmatrix}0\\u\end{pmatrix}: u\in S_r^{\rho}\right\}\subset R^{2n}$, $V=\left\{\begin{pmatrix}0\\v\end{pmatrix}: v\in S_0^{1}\right\}\subset R^{2n}$,

$S_r^\rho \subset R^n$ — кільце з центром в нулі, зовнішнім радіусом ρ і внутрішнім радіусом r, $\rho > 1 \geq r \geq 0$. Термінальна множина $M^* = \{z : ||z_1|| \leq \varepsilon\}$, причому $M_0 = \{z : z_1 = 0\}$, $M = \{z : ||z_1|| \leq \varepsilon, \ z_2 = 0\}$. Тоді $L = \{z : z_2 = 0\} = \{R^n, 0\}$. Оператор ортогонального проєктування $\pi : R^{2n} \to L$ задано матрицею $\pi : \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, де 0 — нульова матриця порядку n. Оператор π виділяє із вектора z його першу компоненту, $\pi z = z_1$. Матриця A і фундаментальна матриця e^{At} однорідної системи (15) мають вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0 & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e^{At} = \begin{pmatrix} E & tE \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $u \in S_r^\rho$ і $v \in S_0^1$, матимемо $\pi e^{At} U = t S_r^\rho$, $\pi e^{At} V = t S_0^1$ і $W(t) = \pi e^{At} U \overset{*}{-} \pi e^{At} V = t[S_r^\rho \overset{*}{-} S_0^1]$, де символ $\overset{*}{-}$ визначає геометричну різницю Мінковського [1]. Якщо $r > 0$, то умова Понтрягіна не виконується, оскільки $S_r^\rho \overset{*}{-} S_0^1 = \varnothing$.

Визначимо функцію зсуву $\gamma(t, \tau) \equiv 0$ і покладемо $\xi(t) = z_1 + t z_2$. Багатозначне відображення $\mathfrak{A}(t, \tau, v)$ має вигляд:

$$\mathfrak{A}(t, \tau, v) = \{\alpha \geq 0 : \alpha[\varepsilon S_0^1 - \xi(t)] \cap (t - \tau)[S_r^\rho - v] \neq \varnothing\}, \ v \in S_0^1.$$

Вочевидь, що

$$\mathfrak{A}(t, \tau, v) \neq \varnothing. \tag{16}$$

Для $v \in S_0^1$ нижня розв'язувальна функція визначається зі співвідношення

$$\alpha_*(t, \tau, v) = \inf\{\alpha \geq 0 : \alpha[\varepsilon S_0^1 - \xi(t)] \cap (t - \tau)[S_r^\rho - v] \neq \varnothing\}.$$

Однак для $v \in S_0^r$ маємо

$$\alpha_*(t, \tau, v) = \alpha_*^r(t, \tau, v) = \sup\{\alpha > 0 : \alpha[\varepsilon S_0^1 - \xi(t)] \subset (t - \tau)[S_0^r - v]\} =$$

$$= \sup\{\alpha > 0 : ||(t - \tau)v - \alpha\xi(t)]|| = (t - \tau)r - \alpha\varepsilon\}.$$

Отже, для $v \in S_0^r$ функція $\alpha_*(t, \tau, v) = \alpha_*^r(t, \tau, v)$ є більшим додатним коренем квадратного рівняння

$$(||\xi(t)||^2 - \varepsilon^2)\alpha^2 - 2(t - \tau)[(v, \xi(t)) - r\varepsilon]\alpha - (t - \tau)^2(r^2 - ||v||^2) = 0.$$

Отримаємо для $v \in S_0^r$

$$\alpha_*^r(t, \tau, v) = (t - \tau) \times$$

$$\times \frac{[(v, \xi(t)) - r\varepsilon] + \sqrt{[(v, \xi(t)) - r\varepsilon]^2 + (||\xi(t)||^2 - \varepsilon^2)(r^2 - ||v||^2)}}{||\xi(t)||^2 - \varepsilon^2}.$$

Оскільки співвідношення $S_r^\rho \overset{*}{-} S_r^1 = \bigcap\limits_{v \in S_r^1} [S_r^\rho - v] = S_0^{\rho - 1}$ є справедливим, то для $v \in S_r^1$ маємо $\alpha_*(t, \tau, v) = \max\limits_{v \in S_r^1} \alpha_*(t, \tau, v) = 0$. Отже, для $v \in S_0^1$ виконується рівність $\alpha_*(t,\tau,v)=\alpha_*^r(t,\tau,v)$ і водночас отримаємо рівність $\max\limits_{v\in S_0^1}\alpha_*(t,\tau,v)=\max\limits_{v\in S_0^r}\alpha_*^r(t,\tau,v)=\dfrac{2r(t-\tau)}{\varepsilon+||\xi(t)||}$, що досягається на векторі $v=r\dfrac{\xi(t)}{||\xi(t)||}$.

Покладемо $T_2(z)=\min\{t\ge 0:\int\limits_0^t \max\limits_{v\in S_0^1}\alpha_*(t,\tau,v)\,d\tau=1\}$. Отже, час $T_2(z)$ — це найменший позитивний корінь рівняння $\dfrac{\varepsilon+||\xi(t)||}{r}=t^2$. Це рівняння за будь-якого z має скінченний позитивний корінь, оскільки для $t=0$ ліва частина рівняння більша за праву, а для $t\to+\infty$ ліва частина лінійно зростає, а права — зростає квадратично. Зокрема, для $z^0=(z_1^0,0)$ маємо $T_2(z^0)=\sqrt{\dfrac{\varepsilon+||z_1^0||}{r}}$.

Для початкового положення $z^0=(z_1^0,z_2^0)$ визначимо момент

$$T_1(z^0)\in[0,T_2(z^0)]:\varepsilon>||z_1^0+T_1(z^0)z_2^0||. \qquad (17)$$

Отже якщо $r>0$, то умова Понтрягіна не виконується, оскільки $W(t)=\pi e^{At}U \overset{*}{-} \pi e^{At}V=t[S_r^\rho \overset{*}{-} S_0^1]=\varnothing$. Але якщо параметри гри задовольняють співвідношення (17), то з урахуванням співвідношення (16) виконуються умови теореми 1.

Для $v\in S_0^1$ верхня розв'язувальна функція визначається зі співвідношення

$$\alpha^*(t,\tau,v)=\sup\{\alpha\ge 0:\alpha[\varepsilon S_0^1-\xi(t)]\cap(t-\tau)[S_r^\rho-v]\ne\varnothing\}=$$

$$=\sup\{\alpha>0:||(t-\tau)v-\alpha\xi(t)]||=(t-\tau)\rho+\alpha\varepsilon\}.$$

Тому для $v\in S_0^1$ функція $\alpha^*(t,\tau,v)$ є більшим додатним коренем квадратного рівняння

$$(||\xi(t)||^2-\varepsilon^2)\alpha^2-2(t-\tau)[(v,\xi(t))+\rho\varepsilon]\alpha-(t-\tau)^2(\rho^2-||v||^2)=0.$$

Отже, отримаємо для $v\in S_0^1$

$$\alpha^*(t,\tau,v)=(t-\tau)\times$$

$$\times\frac{[(v,\xi(t))+\rho\varepsilon]+\sqrt{[(v,\xi(t))+\rho\varepsilon]^2+(||\xi(t)||^2-\varepsilon^2)(\rho^2-||v||^2)}}{||\xi(t)||^2-\varepsilon^2}.$$

Допустимо, що параметри гри задовольняють нерівність

$$\max_{v\in S_0^1}\alpha_*(t,\tau,v)<\min_{v\in S_0^1}\alpha^*(t,\tau,v). \qquad (18)$$

Якщо, напраклад, $\varepsilon=0$, то нерівність (18) задовольняється для

$$\rho>1+2r. \qquad (19)$$

За побудовою для всіх $v\in S_0^1$ справедливе включення

$$\alpha_*(t,\tau,v)[\varepsilon S_0^1-\xi(t)]\cap(t-\tau)[S_r^\rho-v]\ne\varnothing.$$

Тому з урахуванням нерівності (18) маємо

$$\max_{v \in S_0^1} \alpha_* (t, \tau, v)[\varepsilon S_0^1 - \xi(t)] \bigcap (t-\tau)[S_r^\rho - v] \neq \varnothing .$$

Таким чином, виконується включення

$$0 \in \bigcap_{v \in S_0^1} [(t-\tau)[S_r^\rho - v] - \max_{v \in S_0^1} \alpha_* (t, \tau, v) = [\varepsilon S_0^1 - \xi(t)]] \tag{20}$$

і справедлива умова 3. Отже, якщо параметри гри задовольняють нерівність (18) для моменту $T_2(z)$, справедливи всі умови теореми 2.

Розглянемо $T_3 = \min\{t \geq 0 : \int_0^t \min_{v \in S_0^1} \alpha^* (t, \tau, v)\, d\tau = 1\}$. Отже, якщо, напраклад, $\varepsilon = 0$, то час T_3 — це найменший додатний корінь рівняння

$$||\xi(t)|| = \frac{1}{2} t^2 [\rho - 1]. \tag{21}$$

Якщо $\xi(t) = 0$, то $t \geq T_3$. Дійсно, $\xi(0) = z_1$, $||z_1|| > 0$, а оскільки ліва і права частини рівняння (21) залежать від t неперервно, рівності $\xi(t) = 0$ передуватиме рівність (21). Далі припускатимемо, що $\xi(t) > 0$.

Рівняння (21) за будь-якого z має скінченний додатний корінь, оскільки для $t = 0$ ліва частина рівняння більша за праву, а для $t \to +\infty$ ліва частина зростає лінійно, а права зростає квадратично. Зокрема, для $z^0 = (z_1^0, 0)$ маємо $T_3(z^0) = \sqrt{\dfrac{2||z_1^0||}{\rho - 1}}$.

З урахуванням нерівності (18) справедлива нерівність

$$\int_0^{T_3(z^0)} \max_{v \in S_0^1} \alpha_* (T_3(z^0), \tau, v)\, d\tau < \int_0^{T_3(z^0)} \min_{v \in S_0^1} \alpha^* (T_3(z^0), \tau, v)\, d\tau = 1.$$

Отже, якщо параметри гри задовольняють нерівність (18) з урахуванням включення (20) для моменту $T_3(z)$, справедливі всі умови теореми 3.

Перевіримо справедливість умови 4. За побудовою для всіх $v \in S_0^1$ справедливе включення $\alpha^* (t, \tau, v)[\xi(t) - \varepsilon S_0^1] \bigcap (t-\tau)[S_r^\rho - v] \neq \varnothing$. Тому з урахуванням нерівності (18) маємо $\min_{v \in S_0^1} \alpha^* (t, \tau, v)[\xi(t) - \varepsilon S_0^1] \bigcap (t-\tau)[S_r^\rho - v] \neq \varnothing$. Таким чином, виконується включення

$$0 \in \bigcap_{v \in S_0^1} [(t-\tau)[S_r^\rho - v] - \min_{v \in S_0^1} \alpha^* (t, \tau, v)[\xi(t) - \varepsilon S_0^1] \tag{22}$$

і справедлива умова 4. Отже, якщо параметри гри задовольняють нерівність (18) з урахуванням включень (20), (22) для моменту $T_4(z) = T_3(z)$, справедливі всі умови теореми 4.

Отже, якщо $r > 0$, то умова Понтрягіна не виконується, оскільки $W(t) = \pi e^{At} U \underline{*} \pi e^{At} V = t[S_r^\rho \underline{*} S_0^1] = \varnothing$. Але якщо параметри гри задовольняють нерівність (18), то для модельного прикладу виконуються умови теорем 1–4.

ВИСНОВКИ

Для теоретичного обгрунтування евристичних методів зближення конфліктно-керованих об’єктів запропоновано новий підхід до формування

стратегій керування, що дає змогу розробити ефективний математичний апарат, придатний щодо застосування в реальних умовах для вирішення проблеми зближення керованих об'єктів та перехоплення цілей в ігрових задачах динаміки з багатьма учасниками. Розроблено модифікації першого прямого методу для стробоскопічної стратегії в класі контркерувань, коли не виконується класична умова Понтрягіна. Розглянуто нижню розв'язувальну функцію, що відіграє ключову роль у формулюванні результатів. Уведено верхню розв'язувальну функцію і запропоновано модифіковану схему методу розв'язувальних функцій, що забезпечує завершення конфліктно-керованого процесу в класі квазістратегій і контркерувань, коли умова Понтрягіна не виконується. Надано порівняння гарантованих часів для різних схем розглянутих методів. Теоретичні результати проілюстровано на модельному прикладі другого порядку зі спеціальною неопуклою областю керування переслідувача.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. Т. 2. Москва: Наука, 1988. 576 с.
2. Chikrii A.A. Conflict controlled processes. Boston; London; Dordrecht: Springer Science and Business Media, 2013. 424 p.
3. Чикрій А.О., Раппопорт Й.С. Модифікації умови Понтрягіна у проблемі зближення конфліктно-керованих об'єктів. *Кібернетика та системний аналіз*. 2022. Т. 58, № 6. С. 95–105.
4. Chikrii A.A., Chikrii V.K. Image structure of multivalued mappings in game problems of motion control. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2016. Vol. 48, N 3. P. 20–35.
5. Чикрій А.О., Раппопорт Й.С. Прямий метод розв'язання ігрових задач зближення керованих об'єктів. *Кібернетика та системний аналіз*. 2023. Т. 59, № 5. С. 144–153.
6. Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В. Дифференциальные игры. Киев: Наук. думка, 1992. 263 с.
7. Никольский М.С. Первый прямой метод Л.С. Понтрягина в дифференциальных играх. Москва: Изд-во МГУ, 1984. 65 с.
8. Hajek O. Pursuit games. Vol. 12. New York: Acad. Press, 1975. 266 p.
9. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-valued analysis. Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 1990. 461 p.
10. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. Москва: Мир, 1973. 470 с.
11. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. Москва: Наука, 1980. 320 с.
12. Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Метод разрешающих функций в теории конфликтно-управляемых процессов. *Кибернетика и системный анализ*. 2012. Т. 48, № 5. С. 40–64.
13. Patsko V., Quincampoix M. Preface: DGAA special issue on pursuit-evasion games and differential games with incomplete information. *Dyn. Games.* Vol. 12. Appl 9. P. 569–572. https://doi.org/10.1007/s13235-019-00312-4.
14. Patsko V., Kumkov S., Turova V. Pursuit-evasion games. Basar T., Zaccour G. (eds.). *Handbook of Dynamic Game Theory.* Cham: Springer, 2018. https://doi.org/10.1007/978-3-319-44374-4_30.

15. Silveira J., Cabral K., Rabbath C.-A., Givigi S. Deep reinforcement learning solution of reach-avoid games with superior evader in the context of unmanned aerial systems. *International conference on unmanned aircraft systems* (*ICUAS*). Warsaw, Poland, 2023. P. 911–918. https://doi.org/10.1109/ICUAS57906.2023.10156154.
16. Luo Y., Jiang X., Zhong S., Ji Y., Sun G. A multi-satellite swarm pursuit-evasion game based on contract network protocol and optimal lambert method. Yan L., Duan H., Deng Y. (eds.). *Advances in Guidance, Navigation and Control. ICGNC 2022. Lecture Notes in Electrical Engineering.* Singapore: Springer. 2022. Vol. 845. https://doi.org/10.1007/978-981-19-6613-2_222.
17. Lee Y., Bakolas E., Akellab M.R. Feedback strategies for hypersonic pursuit of a ground evader. IEEE Aerospace Conference (AERO). Big Sky, MT, USA, 2022. P. 1–7. https://doi.org/10.1109/AERO53065.2022.9843434.
18. Xiao Liang, Boran Zhou, Linping Jiang, Guanglei Meng, Yiwei Xiu. Collaborative pursuit-evasion game of multi-UAVs based on Apollonius circle in the environment with obstacle. *Connection Science.* 2023. Vol. 35, N 1. https://doi.org/10.1080/09540091.2023.2168253.
19. Tan M., Shen H. The differential game cooperative guidance law for the single target. Yan L., Duan H., Deng Y. (eds.). Advances in Guidance, Navigation and Control. ICGNC. *Lecture Notes in Electrical Engineering*. Singapore: Springer. 2022. Vol. 845. https://doi.org/10.1007/978-981-19-6613-2_188.

A.A Chikrii, I.S. Rappoport

CONTROL STRATEGIES IN THE PROBLEM OF APPROACH OF CONFLICT-CONTROLLED OBJECTS

Abstract. The authors propose a new approach to forming control strategies in the problem of approach of conflict-controlled objects. Modifications of the first direct method is developed for the stroboscopic strategy in the class of counter-controls where the classical Pontryagin's condition is not satisfied. The lower resolving function is considered, which plays a key role in the formulation of the results and in the general case can be determined using the Minkowski functional of a multivalued mapping. An upper resolving function is introduced and a modified scheme of the method of resolving functions is proposed, which guarantees the termination of the conflict-controlled process in the class of quasi-strategies and counter-controls where the classical Pontryagin's condition is not satisfied. The guaranteed times for different schemes of the considered methods are compared. The theoretical results are illustrated on a second-order model example with a special non-convex control region of the pursuer.

Keywords: control strategy, resolving function, dynamic game problem, problem of approach of controlled objects.

Надійшла до редакції 20.10.2023