УДК 519.21

Х. ЦАЙ
Інститут статистичних наук, Academia Sinica, Тайбей, Тайвань,
e-mail: *htsai@stat.sinica.edu.tw.*

А.В. НІКІТІН
Національний університет «Острозька академія», Острог, Україна;
Університет Яна Кохановського, Кельце, Польща,
e-mail: *anatolii.nikitin@oa.edu.ua*; *anatolii.nikitin@ujk.edu.pl*.

ПОРОГОВІ МОДЕЛІ ДЛЯ ПРОЦЕСІВ ЛЕВІ ТА ОЦІНКА НАБЛИЖЕНОЇ МАКСИМАЛЬНОЇ ПРАВДОПОДІБНОСТІ[1]

Анотація. За допомогою процесу Леві (розв'язок стохастичного диференціального рівняння Іто–Скорохода) запропоновано конструкцію моделі порогового процесу та наближений метод максимальної правдоподібності, який ґрунтується на апроксимації логарифмічної функції правдоподібності спостережень. Знайдено оцінки параметрів дворежимного порогового стрибкового процесу з дискретно відібраними даними. Показано, що, перевіряючи співвідношення правдоподібності, можна визначити наявність порогових ефектів.

Ключові слова: пороговий стрибковий процес, наближений метод максимальної правдоподібності, стохастичне диференціальне рівняння.

ВСТУП

Як випадковий процес з незалежними приростами процес Леві утворює один з основних класів стохастичних процесів, до якого входять такі фундаментальні об'єкти теорії ймовірностей, як процеси Вінера і Пуассона [1]. Крім того, процес Леві є стандартним інструментом для моделювання невизначеності ризикових активів на фінансових ринках і його широко використовують для ціноутворення, в торгівельній галузі та для хеджування ризикованих активів.

Процес Леві має два важливі компоненти: звичайні випадкові події (може включати стрибки цін) і тенденції (відображає загальний рух ціни). За допомогою цих компонентів можна побудувати дворежимний пороговий процес.

Моделі з пороговим ефектом для випадкових процесів гауссівського типу, які враховують зсув і дифузію, добре вивчені (див., наприклад, [2–6]). Моделі з пороговим ефектом у вигляді процесів Леві, окрім заданого зсуву та дифузії, враховують стрибки, що важливо для застосування [7–9]. Наприклад, набір, за яким вибирається інтеграл для вимірювання стрибків, може визначити діапазон можливих розмірів стрибків ціни, які впливають на ціни активів.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Уведемо відповідні визначення, рівняння і позначення.

Означення 1. Процес $\{X_t, t \geq 0\}$ будемо називати процесом Леві, якщо

- траєкторії X_t є неперервними справа майже скрізь і мають лівобічні границі;
- $P(X_0 = 0) = 1$;
- для $s < t$ розподіли $X_t - X_s$ збігаються з розподілом X_{t-s};
- якщо $0 \leq s \leq t$, то розподіл $X_t - X_s$ не залежить від $\{X_u, u \leq s\}$.

---

[1] Дослідження Henghsiu Tsai підтримано Academia Sinica, Міністерством науки і технологій Тайваню, грант № MOST 110-2118-M-001-004-MY2, а також Національною науково-технічною радою Тайваню, грант № NSTC 112-2118-M-001-003-MY2.

Досліджуватимемо випадковий процес Леві, який є розв'язком стохастичного диференціального рівняння Іто–Скорохода:

$$dX_t = \mu(X_t, t)\,dt + \sigma(X_t, t)\,dW_t + \\ + \int_U \gamma(X_t, t)\tilde{\nu}(dt, du), X_0 = 0, \qquad (1)$$

де $\{W_t, t \ge 0\}$ є стандартним процесом Вінера, функція позначає коефіцієнт зсуву, σ — дифузійний член. Третій доданок, який моделює стрибки, опишемо детальніше.

Означення 2. Мірою Пуассона на $\mathrm{R}^+ \times U$ є цілочислова міра $\nu(t, A)$ така, що

• за фіксованих A процес $\nu(t, A)$ є процесом Пуассона, тобто

$$P(\nu(t, A) - \nu(s, A) = k) = \frac{\gamma^k (t-s)^k}{k!} \exp\{-(\gamma(t-s))\}, \quad 0 \le s \le t;$$

• для довільного n та множин $A_i \in U, i = 1, 2, \ldots, n$, процеси $\nu(\cdot, A_1)$, $\nu(\cdot, A_2), \ldots, \nu(\cdot, A_n)$ є незалежними.

Для міри $\{\tilde{\nu}(dt, du), t \ge t_0, u \in U \subset [0, T] \times \mathbf{R}^1\}$ зробимо припущення, що $\tilde{\nu}(dt, du) = \nu(dt, du) - E\nu(dt, du)$, тобто $\tilde{\nu}$ є центрованою мірою Пуассона з параметром

$$\lambda(t) = \int_U \frac{du dt}{u^2}. \qquad (2)$$

Міру $\tilde{\nu}$ можна побудувати в такий спосіб [1]: нехай X_t — однорідний процес з незалежними приростами зі значеннями $\mathbf{R}^1$, для якого правильною буде рівність

$$\mathbb{E}\{\exp(i(z, X_t))\} = \\ = \exp\left\{ t \left[\int_{|u| \le 1} \left(\exp(i(z, u)) - 1 - i(z, u) \frac{du}{u^2} \right) + \int_{|u| \ge 1} \left(\exp(i(z, u)) - 1 \frac{du}{u^2} \right) \right] \right\}.$$

Такий процес X_t з імовірністю одиниця не має розривів другого роду.

Якщо $A = [0, T] \times \mathbf{R}^1$ та $\nu(A)$ — число розривів процесу X_t, для яких точка $(t, X_{t+0} - X_{t-0})$ належить A, то ν буде мати розподіл Пуассона з параметром (2) і для неперетинних множин A_k значення $\nu(A_k)$ будуть незалежними.

Інтеграл за мірою Пуассона для східчастих функцій [1] визначається так: якщо $0 < t_1 < t_2 < \ldots < T_n$ та $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\} \subset \mathbf{R}^1$, $\bigcup_{j=1} B_j = \mathrm{R} \times \bigcup_i B_i$ такі, що $\gamma(t, u)$ є сталою на множинах $[t_k, t_{k+1}) \times B_j$, то, враховуючи $u_j \in B_j$, маємо

$$\int_0^T \int_{\mathrm{R}} \gamma(t, u) \tilde{\nu}(dt, du) = \sum_{\substack{0 \le k \le n-1 \\ 1 \le j \le n}} \gamma(t_k, u_j) \tilde{\nu}([t_k, t_{k+1}) \times B_j).$$

Важливо також розуміти, за яких умов рівняння (1) матиме розв'язок. Сформулюємо умови існування та єдиності розв'язку рівняння (1).

Теорема 1. Нехай коефіцієнти рівняння (1) задовольняють такі умови:
• $\mu(s, 0), \sigma(s, 0)$, $\int_U \gamma(s, 0, \theta) \Pi(d\theta)$ локально обмежені за s;

• існує зростальна функція $l(s)$ така, що

$$|\mu(s,x)-\mu(s,y)|^2+|\sigma(s,x)-\sigma(s,y)|^2+$$

$$+\int|\gamma(s,x,\theta)-\gamma(s,y,\theta)|^2\,\Pi(d\theta)\le l(s)|x-y|^2.$$

Позначимо $\widetilde{\Im}(t)$ σ-алгебру, породжену величинами $\xi(0)$, $\nu(d\theta\times ds)$, $w(s)$ для $s\le t$. Якщо $\xi(0)$ не залежить у сукупності від величин $w(s)$, $\nu(d\theta\times ds)$ та $\mathbb{E}|\xi(0)|^2<\infty$, то рівняння має $\widetilde{\Im}(t)$-вимірний розв'язок і $\mathbb{E}|\xi(s)|^2<\infty$.

Теорема 2. Припустимо, що коефіцієнти рівняння (1) задовольняють такі умови: для кожного $c>0$ існує константа l_c, для якої

$$|\mu(s,x)-\mu(s,y)|^2+|\sigma(s,x)-\sigma(s,y)|^2+$$

$$+\int|\gamma(s,x,\theta)-\gamma(s,y,\theta)|^2\,\Pi(d\theta)\le l_c|x-y|^2$$

для $|x|\le r$, $|y|\le r, s\le r$. Тоді розв'язок рівняння (1) за заданого $\xi(0)$ є єдиним.

Теореми 1 і 2 є окремим випадком теорем для існування та єдиності розв'язків стохастичних рівнянь більш загального типу [8, 10].

ПОРОГОВІ ПРОЦЕСИ ЛЕВІ ТА НАБЛИЖЕНА ОЦІНКА МАКСИМАЛЬНОЇ ПРАВДОПОДІБНОСТІ

Для спрощення подальшого викладення зосередимось на випадку однорідного процесу, тобто $\mu(x,t)\equiv\mu(x), \sigma(x,t)\equiv\sigma(x), \gamma(x,t)\equiv\gamma(x)$. Крім того, розглянемо випадок, коли коефіцієнт зсуву має такий самий вигляд, як і у випадку процесу Орнштейна–Уленбека [11], тобто $\mu(x)=(\beta_0+\beta_1 x)$. Зауважимо, що для стаціонарності процесу потрібно, щоб $\beta_1<0$.

Далі розглянемо дворежимний пороговий процес Леві у вигляді

$$X_t=\{(\beta_{10}+\beta_{11}X_t)I(X_t\le r)+(\beta_{20}+\beta_{21}X_t)I(X_t>r)\}dt+$$

$$+\{\sigma_1 I(X_t\le r)+\sigma_2 I(X_t>r)\}dW_t+\int_U\{\gamma_1 I(X_t\le r)+\gamma_2 I(X_t>r)\}\widetilde{\nu}(dt,du). \quad (3)$$

Нехай $X=\{X_0,X_1,\dots,X_q\}$ — спостережувані дані для $\{t_0,t_1,\dots,t_q\}$, $\beta=(\beta_{10},\beta_{11},\beta_{20},\beta_{21})$, $\sigma^2=(\sigma_1^2,\sigma_2^2)$, $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2)$ та $\theta=(\beta,\sigma^2,\gamma)$.

Оцінимо невідомий параметр $\boldsymbol{\eta}=(r,\theta)$.

Стохастичне диференціальне рівняння (3) апроксимуємо різницевим за допомогою схеми методу Ейлера [7, 12]:

$$X_j-X_{j-1}=\Delta_j\{(\beta_{10}+\beta_{11}X_{j-1})I(X_{j-1}\le r)+(\beta_{20}+\beta_{21}X_{j-1})I(X_{j-1}>r)\}+$$
$$+\{\sigma_1 I(X_{j-1}\le r)+\sigma_2 I(X_{j-1}>r)\}(W_j-W_{j-1})+$$
$$+\{\gamma_1 I(X_{j-1}\le r)+\gamma_2 I(X_{j-1}>r)\}\Delta\nu_j. \quad (4)$$

Зауважимо, що

$$\mathbb{E}\{\gamma_1 I(X_{j-1}\le r)+\gamma_2 I(X_{j-1}>r)\}\Delta\nu_j=0,$$

$$\mathrm{Var}\{\gamma_1 I(X_{j-1}\le r)+\gamma_2 I(X_{j-1}>r)\}\Delta\widetilde{\nu}_j=\{\gamma_1 I(X_{j-1}\le r)+\gamma_2 I(X_{j-1}>r)\}^2\Delta\nu_j.$$

Зауважимо також, що згідно з конструкцією рівняння (4) маємо:

$$\mathbb{E}(X_j|X_{j-1})=X_{j-1}+\{(\beta_{10}+\beta_{11}X_{j-1})I(X_{j-1}\le r)+$$

$$+(\beta_{20}+\beta_{21}X_{j-1})I(X_{j-1}>r)\}\Delta_j,$$

а також

$$\mathrm{Var}(X_j | X_{j-1}) = \{\sigma_1 I(X_{j-1} \le r) + \sigma_2 I(X_{j-1} > r)\}\Delta_j +$$

$$+\{\gamma_1 I(X_{j-1} \le r) + \gamma_2 I(X_{j-1} > r)\}^2 \Delta\nu_j,$$

оскільки відповідні процеси Вінера та міри Пуассона незалежні.

Функція ймовірності матиме такий вигляд:

$$f(X_0, X_1, \ldots, X_q | \eta) = \prod_{j=1}^q f(X_j | X_{j-1}) \prod_{j=1}^q P(X = X_j | X_{j-1}) =$$

$$= \prod_{j=1}^q \frac{1}{\sqrt{2\pi\{\sigma_1 I(X_{j-1} \le r) + \sigma_2 I(X_{j-1} > r)\}\Delta_j}} \times$$

$$\times \prod_{j=1}^q \exp\left[-\frac{[X_j - X_{j-1} - \{(\beta_{10} + \beta_{11} X_{j-1}) I(X_{j-1} \le r) + (\beta_{20} + \beta_{21} X_{j-1}) I(X_{j-1} > r)\}\Delta_j]^2}{2\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \le r) + \sigma_2^2 I(X_{j-1} > r)\}\Delta_j}\right] \times$$

$$\times \prod_{j=1}^q \left(\frac{(\{\gamma_1 I(X_{j-1} \le r) + \gamma_2 I(X_{j-1} > r)\}^2 \Delta t_j)^{X_j} e^{-\{\gamma_1 I(X_{j-1} \le r) + \gamma_2 I(X_{j-1} > r)\}^2 \Delta t_j}}{X_j!}\right).$$

Умови для X_0 та r можна використати для отримання $-2l_X(\theta)$ — подвоєної від'ємної наближеної логарифмічної функції правдоподібності:

$$-2l_X(\theta) = C + \sum_{j=1}^q \log\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \le r) + \sigma_2^2 I(X_{j-1} > r)\} +$$

$$+\sum_{j=1}^q \frac{[X_j - X_{j-1}\{(\beta_{10} + \beta_{11} X_{j-1}) I(X_{j-1} \le r) + (\beta_{20} + \beta_{21} X_{j-1}) I(X_{j-1} > r)\}\Delta_j]^2}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \le r) + \sigma_2^2 I(X_{j-1} > r)\}\Delta_j} -$$

$$-2\sum_{j=1}^q X_j \log(\Delta_j) - 4\sum_{j=1}^q X_j \log\{\gamma_1 I(X_{j-1} \le r) + \gamma_2 I(X_{j-1} > r)\} +$$

$$+2\sum_{j=1}^q \Delta t_j \{\gamma_1 I(X_{j-1} \le r) + \gamma_2 I(X_{j-1} > r)\}^2. \quad (5)$$

Тоді наближеною оцінкою максимальної правдоподібності є мінімум подвоєної від'ємної логарифмічної функції правдоподібності (5). Продиференцюємо (4) за β, σ^2 та γ і отримаємо

$$-2\frac{\partial l_X(\theta)}{\partial \beta_{10}} = -2\sum_{j=1}^q \frac{\{X_j - X_{j-1} - \Delta_j(\beta_{10} + \beta_{11} X_{j-1})\} I(X_{j-1} \le r)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \le r) + \sigma_2^2 I(X_{j-1} > r)\}};$$

$$-2\frac{\partial l_X(\theta)}{\partial \beta_{11}} = -2\sum_{j=1}^q \frac{\{X_j - X_{j-1} - \Delta_j(\beta_{10} + \beta_{11} X_{j-1})\} X_{j-1} I(X_{j-1} \le r)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \le r) + \sigma_2^2 I(X_{j-1} > r)\}};$$

$$-2\frac{\partial l_X(\theta)}{\partial \beta_{20}} = -2\sum_{j=1}^{q}\frac{\{X_j - X_{j-1} - \Delta_j(\beta_{20} + \beta_{21}X_{j-1})\}I(X_{j-1} > r)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \le r) + \sigma_2^2 I(X_{j-1} > r)\}};$$

$$-2\frac{\partial l_X(\theta)}{\partial \beta_{21}} = -2\sum_{j=1}^{q}\frac{\{X_j - X_{j-1} - \Delta_j(\beta_{20} + \beta_{21}X_{j-1})\}X_{j-1}I(X_{j-1} \le r)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \le r) + \sigma_2^2 I(X_{j-1} > r)\}};$$

$$-2\frac{\partial l_X(\theta)}{\partial \sigma_1^2} = \sum_{j=1}^{q}\frac{I(X_{j-1} \le r)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \le r) + \sigma_2^2 I(X_{j-1} > r)\}} -$$

$$-\sum_{j=1}^{q}\frac{\{X_j - X_{j-1} - \Delta_j(\beta_{10} + \beta_{11}X_{j-1})\}^2 I(X_{j-1} \le r)}{\{\sigma_1^4 I(X_{j-1} \le r) + \sigma_2^4 I(X_{j-1} > r)\}\Delta_j};$$

$$-2\frac{\partial l_X(\theta)}{\partial \sigma_2^2} = \sum_{j=1}^{q}\frac{I(X_{j-1} > r)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \le r) + \sigma_2^2 I(X_{j-1} > r)\}} -$$

$$-\sum_{j=1}^{q}\frac{\{X_j - X_{j-1} - \Delta_j(\beta_{20} + \beta_{21}X_{j-1})\}^2 I(X_{j-1} > r)}{\{\sigma_1^4 I(X_{j-1} \le r) + \sigma_2^4 I(X_{j-1} > r)\}\Delta_j};$$

$$-2\frac{\partial l_X(\theta)}{\partial \gamma_1} = 4\sum_{i=1}^{q}\Delta\nu_j\{\gamma_1 I(X_{j-1} \le r) + \gamma_2 I(X_{j-1} > r)\}I(X_{j-1} \le r) -$$

$$-4\sum_{i=1}^{q}\frac{X_j I(X_{j-1} \le r)}{\{\gamma_1 I(X_{j-1} \le r) + \gamma_2 I(X_{j-1} > r)\}} = 4\gamma_1\sum_{j=1}^{q}\Delta\nu_j I(X_{j-1} \le r) -$$

$$-4\sum_{j=1}^{q}\frac{X_j I(X_{j-1} \le r)}{\{\gamma_1 I(X_{j-1} \le r) + \gamma_2 I(X_{j-1} > r)\}};$$

$$-2\frac{\partial l_X(\theta)}{\partial \gamma_2} = 4\sum_{j=1}^{q}\Delta\nu_j\{\gamma_1 I(X_{j-1} \le r) + \gamma_2 I(X_{j-1} > r)\}I(X_{j-1} > r) -$$

$$-4\sum_{j=1}^{q}\frac{X_j I(X_{j-1} > r)}{\{\gamma_1 I(X_{j-1} \le r) + \gamma_2 I(X_{j-1} > r)\}} = 4\gamma_2\sum_{j=1}^{q}\Delta\nu_j I(X_{j-1} > r) -$$

$$-4\sum_{j=1}^{q}\frac{X_j I(X_{j-1} > r)}{\{\gamma_1 I(X_{j-1} \le r) + \gamma_2 I(X_{j-1} > r)\}}.$$

Розв’язавши систему рівнянь $\frac{\partial l_X(\theta)}{\partial \theta} = 0$, одержимо

$$\begin{bmatrix}\hat{\beta}_{10}\\ \hat{\beta}_{11}\end{bmatrix} =$$

$$=\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{q}\frac{\Delta_j I(X_{j-1}\le r)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1}\le r)+\sigma_2^2 I(X_{j-1}>r)\}} & \sum_{i=1}^{q}\frac{\Delta_j I(X_{j-1}\le r)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1}\le r)+\sigma_2^2 I(X_{j-1}>r)\}X_{j-1}^{-1}} \\ \sum_{i=1}^{q}\frac{\Delta_j I(X_{j-1}\le r)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1}\le r)+\sigma_2^2 I(X_{j-1}>r)\}X_{j-1}^{-1}} & \sum_{i=1}^{q}\frac{\Delta_j I(X_{j-1}\le r)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1}\le r)+\sigma_2^2 I(X_{j-1}>r)\}X_{j-1}^{-2}} \end{bmatrix}^{-1}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{q}\frac{(X_j-X_{j-1})I(X_{j-1}\le r)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1}\le r)+\sigma_2^2 I(X_{j-1}>r)\}} \\ \sum_{i=1}^{q}\frac{(X_j-X_{j-1})I(X_{j-1}\le r)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1}\le r)+\sigma_2^2 I(X_{j-1}>r)\}X_{j-1}^{-1}} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}\hat\beta_{20}\\ \hat\beta_{21}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{q}\frac{\Delta_j I(X_{j-1}> r)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1}\le r)+\sigma_2^2 I(X_{j-1}>r)\}} & \sum_{i=1}^{q}\frac{\Delta_j I(X_{j-1}> r)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1}\le r)+\sigma_2^2 I(X_{j-1}>r)\}X_{j-1}^{-1}} \\ \sum_{i=1}^{q}\frac{\Delta_j I(X_{j-1}> r)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1}\le r)+\sigma_2^2 I(X_{j-1}>r)\}X_{j-1}^{-1}} & \sum_{i=1}^{q}\frac{\Delta_j I(X_{j-1}> r)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1}\le r)+\sigma_2^2 I(X_{j-1}>r)\}X_{j-1}^{-2}} \end{bmatrix}^{-1}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{q}\frac{(X_j-X_{j-1})I(X_{j-1}> r)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1}\le r)+\sigma_2^2 I(X_{j-1}>r)\}} \\ \sum_{i=1}^{q}\frac{(X_j-X_{j-1})I(X_{j-1}> r)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1}\le r)+\sigma_2^2 I(X_{j-1}>r)\}} \end{bmatrix};$$

$$\hat\sigma_1^2=\frac{\sum_{i=1}^{q}\frac{\{X_j-X_{j-1}-\Delta_j(\beta_{10}+\beta_{11}X_{j-1})\}^2 I(X_{j-1}\le r)}{\{\sigma_1^4 I(X_{j-1}\le r)+\sigma_2^4 I(X_{j-1}>r)\}\Delta_j}}{\sum_{i=1}^{q}\frac{I(X_{j-1}\le r)}{\{\sigma_1^4 I(X_{j-1}\le r)+\sigma_1^2\sigma_2^2 I(X_{j-1}>r)\}}};$$

$$\hat\sigma_2^2=\frac{\sum_{i=1}^{q}\frac{\{X_j-X_{j-1}-\Delta_j(\beta_{20}+\beta_{21}X_{j-1})\}^2 I(X_{j-1}> r)}{\{\sigma_1^4 I(X_{j-1}\le r)+\sigma_2^4 I(X_{j-1}>r)\}\Delta_j}}{\sum_{i=1}^{q}\frac{I(X_{j-1}> r)}{\{\sigma_1^2\sigma_2^2 I(X_{j-1}\le r)+\sigma_2^4 I(X_{j-1}>r)\}}};\qquad(6)$$

$$\hat{\gamma}_1 = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{q} \frac{X_j I(X_{j-1} \le r)}{\gamma_1 I(X_{j-1} \le r) + \gamma_2 I(X_{j-1} > r)}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{q} \Delta v_j I(X_{j-1} \le r)};$$

$$\hat{\gamma}_2 = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{q} \frac{X_j I(X_{j-1} > r)}{\gamma_1 I(X_{j-1} \le r) + \gamma_2 I(X_{j-1} > r)}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{q} \Delta v_j I(X_{j-1} > r)}.$$

ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ АЛГОРИТМ

Опишемо алгоритм у вигляді узагальнення ітераційної процедури [2], яку можна використати для обчислення наближеної оцінки максимальної правдоподібності для моделі на основі оцінок (6).

Крок 1. Для часового ряду $\{X_0, X_1, \ldots, X_q\}$ обчислимо порядкові статистики $\{X_{(0)}, X_{(1)}, \ldots, X_{(q)}\}$, де $X_{(0)} \le X_{(1)} \le \ldots \le X_{(q)}$. Нехай $a = X_{(q/5)}$, $b = X_{(4q/5)}$, $\hat{r}_i = a + \frac{i}{s}$, $i = 0, 1, \ldots, \lambda$, де $b = \hat{r}_\lambda, s \in \mathbb{N}$.

Крок 2.

2.1. Зафіксуємо $\hat{r}$ для $i = 0, 1, \ldots, \lambda$. Визначимо $\hat{\sigma}_1^2(0), \hat{\sigma}_2^2(0), \hat{\gamma}_1(0), \hat{\gamma}_2(0)$ [11].

2.2. Для $k \ge 1$ обчислимо

$$\hat{\theta}(k) = (\hat{\beta}_{10}(k), \hat{\beta}_{11}(k), \hat{\beta}_{20}(k), \hat{\beta}_{21}(k),\ \hat{\sigma}_1^2(k), \hat{\sigma}_2^2(k), \hat{\gamma}_1(k), \hat{\gamma}_2(k))$$

рекурсивно, як у співвідношеннях (6), замінивши відповідно у правих частинах β_{10} на $\hat{\beta}_{10}(k-1)$, β_{11} на $\hat{\beta}_{11}(k-1)$, β_{20} на $\hat{\beta}_{20}(k-1)$, β_{21} на $\hat{\beta}_{21}(k-1)$, σ_1^2 на $\hat{\sigma}_1^2(k-1)$, σ_2^2 на $\hat{\sigma}_2^2(k-1)$, γ_1 на $\hat{\gamma}_1(k-1)$ та γ_2 на $\hat{\gamma}_2(k-1)$.

2.3. Повторимо крок 2.2, доки $\hat{\theta}(k)$ не буде збіжною.

Нехай збіжна оцінка буде мати вигляд

$$\hat{\theta}_i = (\hat{\beta}_{10,i}(k), \hat{\beta}_{11,i}(k), \hat{\beta}_{20,i}(k), \hat{\beta}_{21,i}(k),\ \hat{\sigma}_{1,i}^2(k), \hat{\sigma}_{2,i}^2(k), \hat{\gamma}_{1,i}(k), \hat{\gamma}_{2,i}(k)).$$

Крок 3. Для $i = 0, 1, \ldots, \lambda$ обчислимо $-2l_X(\hat{\theta}_i)$. Тоді $\tau = \operatorname{argmin}_i \{-2l_X(\hat{\theta}_i)\}$ і наближеною оцінкою максимальної правдоподібності $\boldsymbol{\eta} = (r, \theta)$ буде $\hat{\boldsymbol{\eta}} = (\hat{r}_\tau, \hat{\theta}_\tau)$.

ВИСНОВКИ

На відміну від раніше досліджених моделей у [2], отримано процеси, в яких стрибки накладаються на неперервну дифузійну складову. Важливо також, що запропоновано метод наближеної максимальної правдоподібності для оцінювання параметрів зсуву, дифузії, стрибків та порогу одночасно. Отримані результати дають змогу продовжити дослідження для обґрунтування збіжності ітераційної процедури, узгодженості та асимптотичної нормальності порогових оцінок та оцінок у режимах.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Skorohod A.V. Studies in the theory of random processes. Dover Publication, Reprint, 1962.
2. Yu T.-H., Tsai H., Rachinger H. Approximate maximum likelihood estimation of a threshold diffusion process. *Computational Statistics & Data Analysis.* 2020. Vol. 142. 106823.
3. Rachinger H., Lin E.M.H., Tsai H. A bootstrap test for threshold effects in a diffusion process. *Computational Statistics.* 2023. https://doi.org/10.1007/s00180-023-01375-z.
4. Aпt-Sahalia Y. Maximum likelihood estimation of discretely sampled diffusions: A closed form approximation approach. *Econometrica.* 2002. Vol. 70, N 1. P. 223–262.
5. Chan K.-S. Consistency and limiting distribution of the least squares estimator of a threshold autoregressive model. *Ann. Statist.* 1993. Vol. 21, N 1. P. 520–533.
6. Su F., Chan K.S. Quasi-likelihood estimation of a threshold diffusion process. *J. Econometrics.* 2015. Vol. 189, N 2. P. 473–484.
7. Iacus S. Simulation and inference for stochastic processes with R examples. Springer, 2008. 300 p.
8. Chabanyuk Y., Nikitin A., Khimka U. Asymptotic analyzes for complex evolutionary systems with Markov and Semi-Markov switching using approximation schemes. Wiley-ISTE, 2020. 240 p.
9. Knopova V. On recurrence and transience of some Levy-type processes in R. *Theory of Probability and Mathematical Statistics.* 2023. Vol. 108. P. 59–75.
10. Gihman I.I., Skorohod A.V. Stochastic differential equations and their applications. Kyiv, Naukova dumka, 1982. 612 p.
11. Uhlenbeck G.E., Ornstein L.S. On the theory of Brownian motion. *Phys. Rev.* 1930. Vol. 36. P. 823–841.
12. Milstein G.N. Numerical integration of stochastic differential equations. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1995. 178 p.

Henghsiu Tsai, A.V. Nikitin

THRESHOLD MODELS FOR LEVY PROCESSES AND APPROXIMATE MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION

Abstract. Using the Levy process (the solution to the Ito–Skorokhod stochastic differential equation) we propose the construction of the model of the threshold process and the approximate maximum likelihood method based on approximation of the logarithmic function of the likelihood of observations. The estimates for the parameters of the two-mode threshold jump process with discretely sampled data are found. We show that by checking the likelihood ratio, determining the presence of threshold effects is possible.

Keywords: threshold jump process, approximate maximum likelihood method, stochastic differential equation.

Надійшла до редакції 31.10.2023