УДК 519.6

**Л.В. ЛУЦ**
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *lv1@ukr.net, lili72luts@gmail.com*.

# ОПТИМАЛЬНЕ ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ ВІД ШВИДКООСЦИЛЮВАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ ДЛЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ

**Анотація.** Розглянуто задачу обчислення інтегралів від швидкоосцилювальних функцій з деяких класів диференційовних функцій, зокрема, у випадку інтерполяційного класу функцій, коли інформаційний оператор заданий фіксованою таблицею своїх значень. Побудовано оптимальну за точністю та оптимальну за порядком точності квадратурні формули обчислення інтегралів від швидкоосцилювальних функцій. Отримано оптимальні оцінки похибки методу.

**Ключові слова**: інтеграли від швидкоосцилювальних функцій, інтерполяційні класи функцій, оптимальні за точністю квадратурні формули, метод граничних функцій, оцінка знизу похибки чисельного інтегрування.

У багатьох напрямах прикладної та обчислювальної математики, зокрема, під час моделювання автоматизованих систем керування, оброблення сигналів та розпізнавання зображень, а також статистичного оброблення експериментальних даних [1–3] часто доводиться розв’язувати задачу обчислення інтегралів типу

$$I_1(\omega)=\int_a^b f(x)e^{-i\omega x}dx,$$

$$I_2(\omega)=\int_a^b f(x)\sin\omega x\,dx,$$

$$I_3(\omega)=\int_a^b f(x)\cos\omega x\,dx, \qquad (1)$$

де $a$ і $b$ — скінченні дійсні числа; $\omega$ — довільне дійсне число, $|\omega|\geq 2\pi(b-a)$; інформація про значення $f(x)$ задається не більше ніж у $N$ вузлових точках $\{x_i\}_0^{N-1}$ з $[a,b]$.

У більшості випадків такі перетворення не можна обчислити аналітично і потрібно вдаватися до чисельних методів, які базуються на заміні підінтегральної функції на всьому відрізку $[a,b]$ або його частинах алгебраїчним многочленом невисокого степеня. За великих значень $|\omega|$ недоцільно наближати многочленом всю підінтегральну функцію, оскільки це потребує великої кількості вузлів і ускладнює отримання чисельної стійкості розрахунку [4]. У цьому випадку доцільно застосовувати методи типу Файлона [5–7], коли функції $e^{-i\omega x}$, $\sin\omega x$, $\cos\omega x$ розглядаються як вагові, а наближається лише функція $f(x)$. При цьому використовується деяка якісна і кількісна апріорна інформація про функцію $f(x)$, яка дає змогу виокремити достатньо вузький клас функцій $F$, якому вона належить. Наприклад, можна передбачити, що вона має похідні до певного порядку, які задовольняють деякі умови. Крім того, коли розв’язується конкретна задача, значення функції у вузлах фіксованої сітки $\{x_i\}_0^{N-1}$ є фіксованими і використання цих даних у кожному конкретному випадку дає змогу звузити вказаний клас функцій $F$ на клас $F_N$, який визначається належністю класу $F$ та $2N$ фіксованими значеннями інформаційного оператора $\{x_i\}_0^{N-1}$ і $\{f_i\}_0^{N-1}$.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ ОБЧИСЛЕНЬ

Нехай $L_N$ — множина всіх квадратурних формул $l_N(f)$, що використовують інформацію про значення функції $f(x)$ не більше ніж у $N$ точках. Позначимо $R = R(f, l_N, \omega)$ результат наближеного обчислення $I(\omega)$ за допомогою квадратурної формули $l_N(f)$. Уведемо такі характеристики:

$$V(f, l_N, \omega) = \rho(I(\omega), R),$$

$$V(F, l_N, \omega) = \sup_{f \in F} V(f, l_N, \omega),$$

$$V_N = V(F, \omega) = \inf_{l_N \in L_N} V(F, l_N, \omega), \tag{2}$$

де $\rho(I(\omega), R)$ — похибка чисельного інтегрування, $\rho(I(\omega), R) = |I(\omega) - R|$.

Квадратурну формулу $l_N^*(f)$, на якій досягається $V_N$, назвемо оптимальною за точністю. Якщо для квадратурної формули $\bar{l}_N$ виконується $V(F, \bar{l}_N, \omega) \le V_N + \eta$, то $\bar{l}_N$ назвемо оптимальною з точністю до $\eta$. Якщо $\eta = o[V_N]$ або $\eta = O[V_N]$, то $\bar{l}_N$ назвемо відповідно асимптотично оптимальною або оптимальною за порядком точності.

Якщо $\{x_i\}_0^{N-1}$ і $\{f_i\}_0^{N-1} = \{f(x_i)\}_0^{N-1}$ фіксовані, замість відповідного класу $F$ розглядаємо інтерполяційний клас $F_N$.

У цьому випадку введемо за аналогією з (2) такі характеристики:

$$\delta(f, l_N, \{f_i\}_0^{N-1}, \omega) = \rho(I, R),$$

$$\delta(F_N, l_N, \{f_i\}_0^{N-1}, \omega) = \sup_{f \in F_N} \delta(f, l_N, \{f_i\}_0^{N-1}, \omega),$$

$$\delta = \delta(F_N, \{f_i\}_0^{N-1}, \omega) = \inf_{L_N} \delta(F_N, l_N, \{f_i\}_0^{N-1}, \omega), \tag{3}$$

і аналогічно визначимо оптимальні за точністю, асимптотично оптимальні та оптимальні за порядком точності квадратурні формули на класі $F_N$.

Побудова оптимальних за точністю та близьких до них квадратурних формул обчислення інтегралів (1) для деяких класів функцій $F$ та $F_N$ підінтегральних функцій досліджується, зокрема, у [8, 9].

Розглянемо такі класи функцій:

• $W_{r,L}$, $r > 1$, — клас функцій, що мають $(r-1)$ неперервну похідну, причому

$$|f^{(r-1)}(x') - f^{(r-1)}(x'')| \le L|x' - x''|, \; x', x'' \in [a, b],$$

де $L$ — задане дійсне число;

• $W_{3,N,L}$ — клас функцій, що належать $W_{3,L}$, і вхідна інформація про $f(x)$ задана фіксованими значеннями функції та її першої і другої похідних у вузлах фіксованої сітки $\{x_i\}_0^{N-1}$.

Розглянемо класи $W_{r,L}$, $r>1$. У [9] доведено теорему про оцінку знизу похибки чисельного інтегрування інтегралів (1) на цих класах, наведемо її без доведення.

**Теорема 1.** Нехай $f(x) \in W_{r,L}$, $[a,b] \equiv [0,1]$. Для похибки обчислення інтегралів (1) справедлива така оцінка знизу:

$$V(W_{r,L}, \omega) \ge \begin{cases} C_1 \dfrac{1}{(N-1)^r}, \ N \ge |\omega|, \\ C_1 \dfrac{1}{|\omega|^r}, \quad N \le |\omega|, \end{cases} \tag{4}$$

де $C_1 = C(r) = \min\left(\dfrac{LB(r+1, r+1)}{14^{2r+1} r!}, \dfrac{L(2\pi)^{r+1} B(r+1, r+1)}{48^{2r+1} r!}\right)$, $B(r+1, r+1)$ — інтеграл Ейлера першого роду, $B(r+1, r+1) = \dfrac{r!}{2^{r+1}(r+1/2)(2r-1)!!}$.

**Зауваження 1.** Оцінка (4) записана у вигляді, де враховано, що кількість елементарних відрізків, на які розділено відрізок інтегрування, дорівнює не $N$ [9], а $N-1$.

Нехай $f(x) \in W_{3,L}$. Розглянемо квадратурну формулу обчислення інтеграла $I_2(\omega)$

$$R_1(\omega) = \sum_{i=0}^{N-2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} S_{5,3}(x) \sin \omega x dx, \tag{5}$$

де $S_{5,3}(x)$ — локальний сплайн п'ятого ступеня дефекта 3 [10], який інтерполює підінтегральну функцію та її першу і другу похідні у вузлах сітки $\{x_i\}_0^{N-1}$: $S_{5,3}(x_i) = f_i$, $S'_{5,3}(x_i) = f'_i$, $S''_{5,3}(x_i) = f''_i$, $i = \overline{0, N-1}$.

На відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ сплайн $S_{5,3}(x)$ можна записати у вигляді

$$S_{5,3}(x) = \varphi_1(t) f_i + \varphi_2(t) f_{i+1} + h_i \varphi_3(t) f'_i + h_i \varphi_4(t) f'_{i+1} + h_i^2 \varphi_5(t) f''_i + \\ + h_i^2 \varphi_6(t) f''_{i+1}, \tag{6}$$

де

$$\varphi_1(t) = (1-t)^3 (1+3t+6t^2), \ \varphi_2(t) = t^3 (10-15t+6t^2), \ \varphi_3(t) = (1-t)^3 t(1+3t),$$

$$\varphi_4(t) = -t^3 (1-t)(4-3t), \ \varphi_5(t) = 0.5(1-t)^3 t^2, \ \varphi_6(t) = 0.5 t^3 (1-t)^2,$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \ t = (x - x_i)/h_i.$$

Без обмеження загальності припустимо, що $\{x_i\}_0^{N-1}$ — рівномірна сітка, $h_i = h = (b-a)/(N-1)$. Підставимо (6) у (5). Інтегруючи частинами, отримуємо

$$I(\omega) = \int_a^b f(x) \sin \omega x \, dx \cong R_1(\omega) = \sum_{i=0}^{N-2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} S_{5,3}(x) \sin \omega x dx =$$

$$= h \left\{ Af(a) + Bf(b) + hA_1 f'(a) + hB_1 f'(b) + h^2 A_2 f''(a) + h^2 B_2 f''(b) + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{N-2} (a_1 f_i + \gamma_1 h^2 f''_i) \sin \omega x_i - \beta_1 h \sum_{i=1}^{N-2} f'_i \cos \omega x_i \right\},$$

де

$$A=\beta_2\cos\omega a+\frac{1}{2}\alpha_1\sin\omega a,\; B=-\beta_2\cos\omega b+\frac{1}{2}\alpha_1\sin\omega b,\; A_1=-\frac{1}{2}\beta_1\cos\omega a-$$

$$-\gamma_2\sin\omega a,\; B_1=-\frac{1}{2}\beta_1\cos\omega b+\gamma_2\sin\omega b,\; A_2=\alpha_2\cos\omega a+\frac{1}{2}\gamma_1\sin\omega a,$$

$$B_2=-\alpha_2\cos\omega b+\frac{1}{2}\gamma_1\sin\omega b,\; \alpha_1=120\cdot\varphi^{-6}((12-\varphi^2)(1-\cos\varphi)-6\varphi\, sin\varphi),$$

$$\beta_1=48\cdot\varphi^{-6}((15-\varphi^2)\sin\varphi-\varphi(8+7\cos\varphi)),$$

$$\gamma_1=6\cdot\varphi^{-6}((20-\varphi^2)(1-\cos\varphi)-2\varphi(\varphi+4\sin\varphi)),$$

$$\alpha_2=\varphi^{-6}(-\varphi^3+3(\varphi^2-20)\sin\varphi+120\times(3+2\cos\varphi)),$$

$$\beta_2=\varphi^{-6}(\varphi^5+60(\varphi^2-12)\sin\varphi+360\varphi(1+\cos\varphi)),$$

$$\gamma_2=\varphi^{-6}(\varphi^2\times(\varphi^2+12)+24(\varphi^2-15)(1-\cos\varphi)+168\varphi\sin\varphi),\; \varphi=\omega h.$$

**Теорема 2.** Нехай $f(x)\in W_{3,L}$ задана таблицею значень $\{f_i\}_0^{N-1}$, $\{f_i'\}_0^{N-1}$, $\{f_i''\}_0^{N-1}$ у вузлах рівномірної сітки $x_i=i\cdot h$, $h=(b-a)/(N-1)$, $i=\overline{0,N-1}$. Тоді квадратурна формула $R_1(\omega)$ наближеного обчислення $I(\omega)$ є оптимальною за порядком точності у класі $W_{3,L}$ для $N\ge|\omega|$, і при цьому має місце оцінка

$$V(W_{3,L}R_1,\omega)\le\begin{cases}\dfrac{C_2\eta(b-a)^{3\frac{1}{2}}L}{(N-1)^3}, & N\ge|\omega|,\\[2ex] \dfrac{C_3\eta(b-a)^{1\frac{1}{2}}L}{|\omega|^2(N-1)}, & N\le|\omega|,\end{cases}$$

де $C_2=6.1849\cdot10^{-3}$, $C_3=0.20833$, $\eta=\sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sin2\omega b-\sin2\omega a}{4\omega(b-a)}}$.

**Доведення**. У випадку, коли $N\ge|\omega|$, маємо

$$V(W_{3,L},R_1,\omega)=\left|\int_a^b(S_{5,3}(x)-f(x))\sin\omega x dx\right|.$$

За нерівністю Гельдера отримаємо

$$V(W_{3,L},R_1,\omega)\le\sqrt{\int_a^b(S_3(x)-f(x))^2dx}\;\sqrt{\int_a^b\sin^2\omega x dx}.$$

Скориставшись оцінками похибки інтерполяції функції $f(x)\in W_{3,L}$ сплайном $S_{5,3}(x)$ із [10] з урахуванням, що кількість елементарних відрізків, на які розділено відрізок інтегрування, становить $N-1$, а не $N$, матимемо

$$\sqrt{\int_a^b(S_{5,3}(x)-f(x))^2dx}=||S_{5,3}(x)-f(x)||_{L_2[a,b]}\le C_2h^3||f'''(x)||_\infty\le$$

$$\le\frac{C_2(b-a)^3L}{(N-1)^3},$$

де $C_2=6.1849\cdot10^{-3}$, а також матимемо

$$\sqrt{\int_a^b \sin^2 \omega x dx} = \sqrt{\frac{1}{2}\int_a^b (1-\cos 2\omega x)\, dx} = \sqrt{\frac{1}{2}(b-a) - \frac{1}{4\omega}\int_a^b \cos 2\omega x d 2\omega x} =$$

$$= (b-a)^{1/2} \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sin 2\omega b - \sin 2\omega a}{4\omega (b-a)}},$$

$$V(W_{3,L}, R_1, \omega) = \sqrt{\int_a^b (S_{5,3}(x) - f(x))^2 \, dx} \sqrt{\int_a^b \sin^2 \omega x \, dx} \le \frac{C_2 \eta (b-a)^{3\frac{1}{2}} L}{(N-1)^3}, \qquad (7)$$

де $\eta = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sin 2\omega b - \sin 2\omega a}{4\omega (b-a)}}$.

У випадку, коли $N \le |\omega|$, маємо

$$\int_a^b (S_{5,3}(x) - f(x)) \sin \omega x dx = -\frac{1}{\omega}(S_{5,3}(x) - f(x)) \cos \omega x \Big|_a^b +$$

$$+ \frac{1}{\omega^2}(S'_{5,3}(x) - f'(x)) \cos \omega x \Big|_a^b - \frac{1}{\omega^2}\int_a^b (S''_{5,3}(x) - f''(x)) \sin \omega x \, dx.$$

Враховуючи умови інтерполяції, отримуємо

$$V(W_{3,L}, R_1, \omega) = \left| \int_a^b (S_{5,3}(x) - f(x)) \sin \omega x dx \right| = \frac{1}{|\omega|^2} \left| \int_a^b (S''_{5,3}(x) - f''(x)) \sin \omega x dx \right|.$$

Розмірковуючи, аналогічно до попереднього випадку, і використовуючи оцінки похибки інтерполяції другої похідної функції $f''(x)$ для класу функцій $W_{3,L}$ із [10], маємо

$$\sqrt{\int_a^b (S''_{5,3}(x) - f''(x))^2 dx} = \| S''_{5,3}(x) - f''(x) \|_{L_2[a,b]} \le$$

$$\le C_3 h \| f'''(x) \|_\infty \le \frac{C_3 (b-a) L}{N-1},$$

де $C_3 = 0.20833$, а також маємо

$$V(W_{3,L}, R_1, \omega) \le \sqrt{\int_a^b (S''_{5,3}(x) - f''(x))^2 \, dx} \sqrt{\int_a^b \sin^2 \omega x \, dx} \le \frac{C_3 \eta (b-a)^{1\frac{1}{2}} L}{|\omega|^2 (N-1)}.$$

З порівняння оцінки знизу (4) для $r = 3$ та оцінки зверху (7) випливає, що квадратурна формула $R_1$ є оптимальною за порядком точності для обчислення інтеграла $I_2(\omega)$ для функцій з класу $W_{3,L}$ для $N \ge |\omega|$.

Теорему доведено.

**Зауваження 2.** Твердження, аналогічні до теореми 2, можна довести для інтеграла $I_3(\omega)$, отже, і для $I_1(\omega)$.

Для побудови та обґрунтування оптимальних за точністю і близьких до них квадратурних формул обчислення інтегралів (1) у класах $F_N$ застосуємо метод граничних функцій [9], який полягає в наступному.

Будуються верхня (мажоранта) і нижня (міноранта) границі області можливих значень інтеграла $I(\omega)$ на функціях класу $F_N$:

$$I^+(\omega) = \sup_{f \in F_N} I(\omega), \quad I^-(\omega) = \inf_{f \in F_N} I(\omega),$$

де $I^{\pm}(\omega)$ досягаються на $f^{\pm}(x) \in F_N$ відповідно мажоранті і міноранті класу $F_N \subset F$.

**Означення 1.** Функція $f^{\pm}(x)$ називається мажорантою (мінорантою) класу функцій $F_N$, визначених у деякій області $D$, якщо $f^+(x) \geq f(x)$ $(f^-(x) \leq f(x))$ для всіх $f \in F_N$ та якщо $f^+(x) \in F_N$ $(f^-(x) \in F_N)$.

Таким чином, задача зводиться до побудови функцій $f^{\pm}(x) \in F_N$, значення яких у вузлах $\{x_i\}_0^{N-1}$ мають збігатися зі значеннями $f_i$, $i = \overline{0, N-1}$ $(f^{\pm}(x_i) = f_i^{\pm} = f_i)$. Очевидно, наприклад, що $I_2^+(\omega) = \int_a^b f^+(x) \sin x dx$, $I_2^-(\omega) = \int_a^b f^-(x) \sin x dx$. Функції $f^{\pm}(x)$ необхідно будувати з урахуванням поведінки осцилювальних функцій $(\sin \omega x, \cos \omega x)$. Далі, знаходяться чебишовський центр $I^*(\omega)$ і чебишовський радіус $\rho^*(\omega)$ області невизначеності розв'язку задачі (1) [9]:

$$I^*(\omega) = \frac{I^+(\omega) + I^-(\omega)}{2}, \qquad \rho^*(\omega) = \frac{I^+(\omega) - I^-(\omega)}{2}, \tag{8}$$

які являють собою відповідно оптимальну за точністю квадратурну формулу обчислення $I(\omega)$ і оптимальну оцінку похибки чисельного інтегрування $I(\omega)$ на класі функцій $F_N$.

Розглянемо обчислення $I_2(\omega) = \int_a^b f(x) \sin \omega x dx$ для функцій $f(x) \in W_{3,N,L}$, коли інформаційний оператор (і.о.) $\Phi_1(f, x)$ заданий таблицею фіксованих значень функції, її першої та другої похідних у вузлах фіксованої сітки, тобто $\Phi_1(f, x) = \{\{f_i\}_0^{N-1}, \{f_i'\}_0^{N-1}, \{f_i''\}_0^{N-1}, \{x_i\}_0^{N-1}\}$. Для спрощення викладок припустимо, що виконується наведена далі умова.

**Умова 1.** Визначимо цю умову у такий спосіб: $[|\omega|(b-a)/\pi] + 1$ нулів функції $\sin \omega x$ на $[a, b]$ входять у число вузлів $x_i$ квадратурної формули.

Очевидно, що множина функцій $W_{3,N,L}$ на кожному елементарному відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ обмежена чотирма кривими:

$$f_i + f_i'(x - x_i) + \frac{f_i''}{2}(x - x_i)^2 \pm \frac{L}{6}(x - x_i)^3,$$

$$f_{i+1} + f_{i+1}'(x - x_{i+1}) + \frac{f_i''}{2}(x - x_{i+1})^2 \pm \frac{L}{6}(x - x_{i+1})^3,$$

які попарно перетинаються у точках $x_i \le \bar{x}_i \le \bar{\bar{x}}_i \le x_{i+1}$, де

$$\bar{x}_i = \min(x_1, x_2), \ \bar{\bar{x}}_i = \max(x_1, x_2), \tag{9}$$

$$x_1 = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} + \frac{\Delta f_i''}{2L} + \sqrt[3]{-\frac{q_1}{2} - \sqrt{\frac{q_1^2}{4} + \frac{p_1^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q_1}{2} + \sqrt{\frac{q_1^2}{4} + \frac{p_1^3}{27}}},$$

$$x_2 = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} - \frac{\Delta f_i''}{2L} + \sqrt[3]{-\frac{q_2}{2} - \sqrt{\frac{q_2^2}{4} + \frac{p_2^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q_2}{2} + \sqrt{\frac{q_2^2}{4} + \frac{p_2^3}{27}}}, \tag{10}$$

Тут

$$q_{1,2} = \mp 2\left(\frac{\Delta f_i''}{2L}\right)^3 + \frac{3\Delta f_i''}{4L^2}(h_i(f_i'' + f_{i+1}'') - 2\Delta f_i') \pm \frac{3}{2L}(h_i(f_i' + f_{i+1}') - 2\Delta f_i),$$

$$p_{1,2} = \frac{3}{4}\left(h_i^2 - \left(\frac{\Delta f_i''}{L}\right)^2\right) \pm \frac{3}{2L}(h_i(f_i'' + f_{i+1}'') - 2\Delta f_i'), \qquad h_i = x_{i+1} - x_i,$$

$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$, $\Delta f_i' = f_{i+1}' - f_i'$, $\Delta f_i'' = f_{i+1}'' - f_i''$, $L$ — константа Ліпшиця.

Окремо розглянемо відрізки $x \in [x_i, \bar{x}_i]$ та $x \in [\bar{x}_i, \bar{\bar{x}}_i]$.

У випадку, коли $x \in [x_i, \bar{x}_i]$, з урахуванням поведінки функції $\sin \omega x$ верхня і нижня границі області невизначеності значень $f(x) \in W_{3,N,L}$ мають вигляд

$$f_i^{\pm}(x) = f_i + f_i'(x - x_i) + \frac{f_i''}{2}(x - x_i)^2 \pm \frac{L}{6}(x - x_i)^3 \operatorname{sign}(\sin \omega x_i). \tag{11}$$

У випадку, коли $x \in [\bar{x}_i, \bar{\bar{x}}_i]$, функції $f^+(x)$ та $f^-(x)$ визначаються так:

$$f_i^+(x) = \min_{x \in [\bar{x}_i, \bar{\bar{x}}_i]} \left\{ f_i + f_i'(x - x_i) + \frac{f_i''}{2}(x - x_i)^2 + \frac{L}{6}(x - x_i)^3 \operatorname{sign}(\sin \omega x_i); \right.$$

$$\left. f_{i+1} + f_{i+1}'(x - x_{i+1}) + \frac{f_{i+1}''}{2}(x - x_{i+1})^2 - \frac{L}{6}(x - x_{i+1})^3 \operatorname{sign}(\sin \omega x_i) \right\};$$

$$f_i^-(x) = \max_{x \in [\bar{x}_i, \bar{\bar{x}}_i]} \left\{ f_i + f_i'(x - x_i) + \frac{f_i''}{2}(x - x_i)^2 - \frac{L}{6}(x - x_i)^3 \operatorname{sign}(\sin \omega x_i); \right.$$

$$\left. f_{i+1} + f_{i+1}'(x - x_{i+1}) + \frac{f_{i+1}''}{2}(x - x_{i+1})^2 + \frac{L}{6}(x - x_{i+1})^3 \operatorname{sign}(\sin \omega x_i) \right\}.$$

Врахувавши, що $f^+(x)$ та $f^-(x)$ залежать від знака $\Delta f_i$, запишемо ці співвідношення у вигляді

$$f_i^{\pm}(x) = \frac{1 \pm \operatorname{sign}(\Delta f_i)}{2}\left(f_i + f_i'(x - x_i) + \frac{f_i''}{2}(x - x_i)^2 \pm \frac{L}{6}(x - x_i)^3 \operatorname{sign}(\sin \omega x_i)\right) +$$

$$+ \frac{1 \pm \operatorname{sign}(\Delta f_i)}{2}\left(f_{i+1} + f_{i+1}'(x - x_{i+1}) + \frac{f_{i+1}''}{2}(x - x_{i+1})^2 \mp \right.$$

$$\left. \mp \frac{L}{6}(x - x_{i+1})^3 \operatorname{sign}(\sin \omega x_i)\right). \tag{12}$$

У випадку $x \in [\bar{\bar{x}}_i,\, x_{i+1}]$ маємо

$$f_i^{\pm}(x) = f_{i+1} + f'_{i+1}(x - x_{i+1}) + \frac{f''_{i+1}}{2}(x - x_{i+1})^2 \mp$$

$$\mp \frac{L}{6}(x - x_{i+1})^3 \operatorname{sign}(\sin \omega x_i). \qquad (13)$$

Використовуючи співвідношення (11)–(13), а також (7), (8), отримуємо $f_i^*(x)$ і $p_i^*(x)$ для $[x_i,\, x_{i+1}]$. Зокрема, $f_i^*(x)$ має вигляд:

$$f_i^*(x) = \begin{cases} f_i + f'_i(x - x_i) + \dfrac{f''_i}{2}(x - x_i)^2, & x \in [x_i, \bar{x}_i], \\ \dfrac{1}{2}\left[ f_i + f'_i(x - x_i) + \dfrac{f''_i}{2}(x - x_i)^2 + f_{i+1} + \right. & \\ \left. + f'_{i+1}(x - x_{i+1}) + \dfrac{f''_{i+1}}{2}(x - x_{i+1})^2 \right] + \dfrac{L}{12}\operatorname{sign}(\Delta f_i) \times & \\ \times \operatorname{sign}(\sin \omega x_i)((x - x_i)^3 + (x - x_{i+1})^3), & x \in [x_i, \bar{\bar{x}}_i], \\ f_{i+1} + f'_{i+1}(x - x_{i+1}) + \dfrac{f''_{i+1}}{2}(x - x_{i+1})^2, & x \in [\bar{\bar{x}}_i, x_{i+1}]. \end{cases} \qquad (14)$$

Легко перевірити, що ця функція буде неперервною на $[x_i,\, x_{i+1}]$ і $f_i^*(x) \in W_{3,N,L}$.

Чебишовський радіус $p_i^*(x)$ для $[x_i,\, x_{i+1}]$ має вигляд:

$$p_i^*(x) = \begin{cases} \dfrac{L}{6}(x - x_i)^3 \operatorname{sign}(\sin \omega x_i), & x \in [x_i, \bar{x}_i], \\ \dfrac{Lh_i}{12}[\, 3x^2 - 3(x_i + x_{i+1})x + (x_i + x_{i+1})^2 - x_i x_{i+1}] \cdot \operatorname{sign}(\sin \omega x_i) - & \\ -\dfrac{\operatorname{sign}(\Delta f_i)}{2}\left[ \dfrac{\Delta f''_i}{2}x^2 + (\Delta f'_i + f''_i \cdot x_i - f''_{i+1} \cdot x_{i+1})x + \right. & \\ \left. + \Delta f_i + f'_i \cdot x_i - f'_{i+1} \cdot x_{i+1} - \dfrac{f''_i}{2}x_i^2 + \dfrac{f''_{i+1}}{2}x_{i+1}^2 \right], & x \in [\bar{x}_i, \bar{\bar{x}}_i], \\ \dfrac{L}{6}(x - x_{i+1})^3 \operatorname{sign}(\sin \omega x_i), & x \in [\bar{\bar{x}}_i, x_{i+1}]. \end{cases} \qquad (15)$$

Чебишовський центр і чебишовський радіус області невизначеності класу $W_{3,N,L}$ визначаються так:

$$f^*(x) = \bigcup_{i=0}^{N-1} f_i^*(x), \quad \rho^*(x) = \bigcup_{i=0}^{N-1} \rho_i^*(x). \qquad (16)$$

Справедлива наступна теорема.

**Теорема 3.** Нехай виконується умова 1, $f(x) \in W_{3,N,L}$, інформація про функцію задана за допомогою і.о $\Phi_1(f,\, x) = \{\{f_i\}_0^{N-1},\ \{f'_i\}_0^{N-1},\ \{f''_i\}_0^{N-1},\ \{x_i\}_0^{N-1}\}$. Оптимальною за точністю квадратурною формулою обчислення інтеграла $I_2(\omega)$ на класі $W_{3,N,L}$ у сенсі характеристик (3) є квадратурна формула

$$R_2(\omega) = \int_a^b f^*(x) \sin \omega x dx = \sum_{i=0}^{N-2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_i^*(x) \sin \omega x dx, \qquad (17)$$

де $f^*(x)$ визначається співвідношеннями (14), (16), причому

$$\delta(W_{3,N,L},\{\Phi_{1,i}\}_0^{N-1},\omega)=\left|\frac{L|\sin\omega a|}{2\omega^4}+\right.$$

$$+\frac{L}{12\omega^4}\sum_{i=0}^{N-2}\operatorname{sign}(\sin\omega x_i)[(\omega^3\Delta_{1,i}^3-6\omega\Delta_{1,i})\cos\omega\bar{x}_i-(\omega^3\Delta_{4,i}^3-6\omega\Delta_{4,i})\cos\omega\bar{\bar{x}}_i+$$

$$+(3\omega^2\Delta_{1,i}^2-6)\sin\omega\bar{x}_i-(3\omega^2\Delta_{4,i}^2-6)\sin\omega\bar{\bar{x}}_i]+$$

$$+\frac{1}{2\omega^3}\sum_{i=0}^{N-2}\operatorname{sign}(\Delta f_i)\left[\frac{1}{2}(\omega^2(2\Delta f_i-2f_i'\Delta_{1,i}-2f_{i+1}'\Delta_{2,i}-f_i''\Delta_{1,i}^2+f_{i+1}''\Delta_{2,i}^2)-\right.$$

$$-\Delta f_i'')\cos\omega\bar{x}_i-\frac{1}{2}(\omega^2(2\Delta f_i-2f_i'\Delta_{3,i}-2f_{i+1}'\Delta_{4,i}-f_i''\Delta_{3,i}^2+f_{i+1}''\Delta_{4,i}^2)-$$

$$-\Delta f_i'')\cos\omega\bar{\bar{x}}_i-\omega(\Delta f_i'-f_i''\Delta_{1,i}-f_{i+1}''\Delta_{2,i})\sin\omega\bar{x}_i+$$

$$\left.\left.+\omega(\Delta f_i'-f_i''\Delta_{3,i}-f_{i+1}''\Delta_{4,i})\sin\omega\bar{\bar{x}}_i\right]-\frac{L|\sin\omega b|}{2\omega^4}\right|, \tag{18}$$

де $\bar{x}_i$, $\bar{\bar{x}}_i$, $x_1$, $x_2$ визначені у (9), (10),

$$\Delta_{1,i}=\bar{x}_i-x_i,\ \Delta_{2,i}=x_{i+1}-\bar{x}_i,$$
$$\Delta_{3,i}=\bar{\bar{x}}_i-x_i,\ \Delta_{4,i}=x_{i+1}-\bar{\bar{x}}_i. \tag{19}$$

**Доведення.** Уведемо позначення згідно з (19).
На підставі (8), (15), (19) маємо

$$\delta(W_{3,N,L},\{\Phi_{1,i}\}_0^{N-1},\omega)=p^*(\omega)=\left|\frac{1}{2}\int_a^b(f^+(x)-f^-(x))\sin\omega x dx\right|=$$

$$=\left|\sum_{i=0}^{N-2}\frac{1}{2}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(f_i^+(x)-f_i^-(x))\sin\omega x dx\right|=\left|\sum_{i=0}^{N-2}\int_{x_i}^{x_{i+1}}p_i^*(x)\sin\omega x dx\right|=$$

$$=\left|\frac{L}{6}\sum_{i=0}^{N-2}\left[\int_{x_i}^{\bar{x}_i}(x-x_i)^3\operatorname{sign}(\sin\omega x_i)\sin\omega x dx+\right.\right.$$

$$\left.+\int_{\bar{\bar{x}}_i}^{x_{i+1}}(x-x_{i+1})^3\operatorname{sign}(\sin\omega x_i)\sin\omega x dx\right]+$$

$$+\frac{L}{12}\sum_{i=0}^{N-2}h_i\int_{\bar{x}_i}^{\bar{\bar{x}}_i}[3x^2-3(x_i+x_{i+1})x+(x_i+x_{i+1})^2-x_ix_{i+1}]\operatorname{sign}(\sin\omega x_i)\sin\omega x dx+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-2}\operatorname{sign}(\Delta f_i)\int_{\bar{x}_i}^{\bar{\bar{x}}_i}\left[\frac{\Delta f_i''}{2}x^2+(\Delta f_i'+f_i''\cdot x_i-f_{i+1}''\cdot x_{i+1})x+\Delta f_i+\right.$$

$$\left.\left.+f_i'\cdot x_i-f_{i+1}'\cdot x_{i+1}-\frac{f_i''}{2}x_i^2+\frac{f_{i+1}''}{2}x_{i+1}^2\right]\sin\omega x dx\right|=\left|\frac{L|\sin\omega a|}{2\omega^4}+\right.$$

$$+\frac{L}{12\omega^4}\sum_{i=0}^{N-2}\operatorname{sign}(\sin\omega x_i)[(\omega^3\Delta_{1,i}^3-6\omega\Delta_{1,i})\cos\omega\bar{x}_i-$$

$$-(\omega^3\Delta_{4,i}^3-6\omega\Delta_{4,i})\cos\omega\bar{\bar{x}}_i+(3\omega^2\Delta_{1,i}^2-6)\sin\omega\bar{x}_i-(3\omega^2\Delta_{4,i}^2-6)\sin\omega\bar{\bar{x}}_i]+$$

$$+\frac{1}{2\omega^3}\sum_{i=0}^{N-2}\operatorname{sign}(\Delta f_i)\Bigg[\frac{1}{2}(\omega^2(2\Delta f_i-2f_i'\Delta_{1,i}-2f_{i+1}'\Delta_{2,i}-f_i''\Delta_{1,i}^2+f_{i+1}''\Delta_{2,i}^2)-$$

$$-\Delta f_i'')\cos\omega\bar{x}_i-\frac{1}{2}(\omega^2(2\Delta f_i-2f_i'\Delta_{3,i}-2f_{i+1}'\Delta_{4,i}-f_i''\Delta_{3,i}^2+f_{i+1}''\Delta_{4,i}^2)-$$

$$-\Delta f_i'')\cos\omega\bar{\bar{x}}_i-\omega(\Delta f_i'-f_i''\Delta_{1,i}-f_{i+1}''\Delta_{2,i})\sin\omega\bar{x}_i+$$

$$+\omega(\Delta f_i'-f_i''\Delta_{3,i}-f_{i+1}''\Delta_{4,i})\sin\omega\bar{\bar{x}}_i\Bigg]-\frac{L|\sin\omega b|}{2\omega^4}\Bigg|.$$

Таким чином, отримали оцінку знизу (18). Для завершення доведення необхідно отримати відповідну оцінку зверху для квадратурної формули (17) обчислення інтеграла $I_2(\omega)$. Для цього обчислимо

$$\delta(W_{3,N,L},R_2(\omega),\{\Phi_{1,i}\}_0^{N-1},\omega)=\sup_{f(x)\in W_{3,N,L}}\left|\int_a^b(f(x)-f^*(x))\sin\omega x dx\right|=$$

$$=\sup_{f(x)\in W_{3,N,L}}\left|\sum_{i=0}^{N-2}\int_{x_i}^{x_i+1}(f(x)-f^*(x))\sin\omega x dx\right|=$$

$$=\max\left\{\left|\sum_{i=0}^{N-2}\int_{x_i}^{x_i+1}(f_i^+(x)-f_i^*(x))\sin\omega x dx\right|;\left|\sum_{i=0}^{N-2}\int_{x_i}^{x_i+1}(f_i^*(x)-f_i^-(x))\sin\omega x dx\right|\right\}.$$

З урахуванням того, що для чебишовського центру $f^*(x)$ справедлива рівність $f_i^+(x)-f_i^*(x)=f_i^*(x)-f_i^-(x)$ і що $f_i^*(x)=\dfrac{f_i^+(x)+f_i^-(x)}{2}$, остаточно маємо

$$\delta(W_{3,N,L},R_2(\omega),\{\Phi_{1,i}\}_0^{N-1},\omega)=\left|\sum_{i=0}^{N-2}\int_{x_i}^{x_i+1}(f_i^+(x)-f_i^*(x))\sin\omega x dx\right|=$$

$$=\left|\sum_{i=0}^{N-2}\int_{x_i}^{x_i+1}\frac{f_i^+(x)-f_i^-(x)}{2}\sin\omega x dx\right|=\left|\sum_{i=0}^{N-2}\int_{x_i}^{x_i+1}\rho_i^*(x)\sin\omega x dx\right|.$$

Теорему доведено.

**Зауваження 3.** Твердження, аналогічні до теореми 3, можна довести для інтеграла $I_3(\omega)$, отже, і для $I_1(\omega)$.

Таким чином, у статті побудовано оптимальні за точністю та близькі до них (оптимальні за порядком точності) квадратурні формули обчислення інтегралів від швидкоосцилювальних функцій вигляду (1) для класів $W_{3,L}$, $W_{3,N,L}$ гладких функцій та отримано оцінки похибки цих квадратурних формул.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. Drachman B., Ross J. Approximation of certain functions given by integrals with highly oscillatory integrands. *IEEE Trans. Antennas Propagation*. 1994. Vol. 42, N 9. P. 1355–1356.
2. Gold B., Rader C.M. Digital Processing of Signals. Krieger, 1983. 269 p.
3. Leondes C.T. (Ed.) Digital control and signal processing systems and techniques. San-Diego, CA.: Academic Press, 1996. 398 p.
4. Haider Q., Liu L.C. Fourier and Bessel transformations of highly oscillatory functions. *J. Phys*. 1992. A 25. P. 6755–6760.
5. Filon L.N. On a quadrature formula for trigonometric integrals. *Proc. Roy. Soc. Edinburg*. 1928. Vol. 49. P. 38–47.
6. Flinn E.A. A modification of Filon's method of numerical integration. *J. Assoc. Comput. Mach*. 1960. N 7. P. 181–184.
7. Luke Y.L. On the computation of oscillatory integrals. Part 2. *Proc. Cambridge Philos. Soc*. 1964. Vol. 50. P. 269–277.
8. Zadiraka V.K., Melnikova S.S., Luts L.V. Optimal integration of rapidly oscillating functions in the class $W_{2,L,N}$ with the use of different information operators. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2013. Vol. 49, N 2. P. 229–238. https://doi.org/10.1007/s10559-013-9504-5.
9. Задірака В.К., Луц Л.В., Швідченко І.В. Теорія обчислень інтегралів від швидкоосцилювальних функцій. Київ: Наук. думка, 2023. 472 с. https://doi.org/10.15407/978-966-00-1843-3.
10. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы слайн-функций. Москва: Наука, 1980. 352 с.



## L.V. Luts


### OPTIMAL CALCULATION OF INTEGRALS OF RAPIDLY OSCILLATING FUNCTIONS FOR SOME CLASSES OF DIFFERENTIAL FUNCTIONS


**Abstract.** The author considers the problem of calculating integrals of rapidly oscillating functions from some classes of differential functions, in particular, in the case of the interpolation class of functions, where the information operator is specified by a fixed table of its values. Quadrature formulas for calculating integrals of rapidly oscillating functions have been constructed that are optimal in terms of accuracy and optimal in order of accuracy. The optimal estimates for the error of the method are obtained.



**Keywords:** integrals of rapidly oscillating functions, interpolation classes of functions, quadrature formulas optimal in terms of accuracy, method of boundary functions, lower estimate of numerical integration error.

*Надійшла до редакції 31.08.2023*