УДК 519.6

В.Г. ПРИКАЗЧИКОВ
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *viktorprikazchikov@gmail.com.*

ЕКВІВАВАЛЕНТНІСТЬ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО СПЛАЙНУ ТА ФУНКЦІЇ ГРІНА ДЛЯ ПОБУДОВИ ТОЧНОГО СКІНЧЕННОВИМІРНОГО АНАЛОГА КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ 4-ГО ПОРЯДКУ

Анотація. Розглянуто задачу з головними та природними умовами на межі відрізка. Запропоновано новий метод побудови точного дискретного аналога цієї задачі. Метод полягає в проєктуванні диференціального рівняння на локальні сплайни, утворені фундаментальною системою розв’язків задач Коші для однорідного рівняння вихідної задачі. Одержано систему лінійних алгебраїчних рівнянь з 5-діагональною матрицею стосовно точних значень розв’язку вихідної задачі в точках рівномірної сітки. Для реалізації точного аналога запропоновано використати схеми високого порядку точності, які утворені з частинних сум рядів з парними степенями кроку сітки для розв’язків задач Коші.

Ключові слова: крайова задача, звичайне диференціальне рівняння 4-го порядку, задача Коші, визначник Вронського, локальний сплайн, суперпозиція розв’язків, точний дискретний аналог, система лінійних алгебраїчних рівнянь, 5-діагональна матриця.

ВСТУП

Точні сіткові аналоги крайової задачі для загального рівняння з головними умовами на межі відрізка побудовано з використанням функції Гріна в [1, 2]. Точна схема для окремого рівняння без урахування крайових умов одержана проєктуванням на сплайн в [3].

У цій роботі для загального рівняння з головними та природними крайовими умовами проєктуванням на локальні сплайни побудовано систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) стосовно точних значень розв’язку вихідної задачі в точках рівномірної сітки. Сплайни утворені з лінійно незалежних розв’язків задач Коші для однорідного рівняння вихідної задачі. Коефіцієнти біля точних значень розв’язку розглянутої задачі такі самі, як в [1, 2], але одержані з умов неперервності сплайнів та їхніх похідних до 2-го порядку включно та розривності похідних 3-го порядку в центральних точках сплайнів. У цій роботі сіткові рівняння подано у вигляді, зручному для практичної реалізації, оскільки визначники Вронського розв’язків задач Коші визначаються лише через коефіцієнти сплайнів.

Розглянемо таку задачу:

$$\begin{gathered} LU \equiv (pU'')'' - (qU')' + rU = f(x),\ 0 < x < l, \\ U = A_0,\ U' = B_0,\ x = 0, \\ pU'' = A_l,\ (pU'')' = B_l,\ x = l, \end{gathered} \tag{1}$$

де

$$0 < p_0 \le p(x) \in C^{(2)}(0;\ l), \quad 0 \le q(x) \in C^{(1)}(0;\ l),$$

$$0 \le r(x) \in C(0;\ l), \quad f(x) \in L_2(0;\ l).$$

Гладкість розв’язку задачі (1) досліджено в [4]. На відрізку $[0;\ l]$ уведемо рівномірну сітку вузлів

$$x_i = ih,\ i = 0, 1, \ldots, N,\ h = \frac{l}{N}.$$

ТОЧНІ ЛІВІ КРАЙОВІ УМОВИ

Для одержання точного сіткового аналога лівої крайової умови у вузлі $x_1 = h$ використаємо сплайн

$$\widetilde{S}_1 = \begin{cases} \widetilde{a}_1 u_1(x) + \widetilde{b}_1 u_2(x), & 0 \le x \le h, \\ \widetilde{c}_1 u_3(x) + \widetilde{d}_1 u_4(x), & h \le x \le 2h, \\ \widetilde{d}_1 u_4(x), & 2h \le x \le 3h. \end{cases}$$

Тут u_j, $j = 1, 2, 3, 4,$ — розв'язки однорідного рівняння $Lu_j = 0$ з початковими умовами

$$\left.\begin{matrix} u_1 = u_1' = pu_1'' = 0, \quad (pu_1'')' = 1 \\ u_2 = u_2' = 0, \quad pu_2'' = 1, \quad (pu_2'')' = 0 \end{matrix}\right\} \text{ для } x = 0, \tag{2}$$

$$u_3 = u_3' = pu_3'' = 0, \quad (pu_3'')' = -1 \quad \text{для } x = 2h,$$

$$u_4 = u_4' = pu_4'' = 0, \quad (pu_4'')' = -1 \quad \text{для } x = 3h.$$

Оскільки вронськіан Δ_1 системи u_j є сталою величиною, то знайдемо його в точці $x = 0$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & u_3 & u_4 \\ 0 & 0 & u_3' & u_4' \\ 0 & 1 & pu_3'' & pu_4'' \\ 1 & 0 & (pu_3'')' & (pu_3'')' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_3 & u_3' \\ u_4 & u_4' \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Покажемо, що $\Delta_1 \ne 0$. Припустимо супротивне. Тоді існують числа

$$\xi_1, \xi_2, \ \xi_1^2 + \xi_2^2 \ne 0,$$

для яких у точці $x = 0$ виконуються співвідношення

$$\xi_1 u_j + \xi_2 u_j' = 0, \quad j = 3, 4.$$

Відповідно до умов у точках $x = 2h$ і $x = 3h$ одержуємо власні функції u_j, $j = 3, 4$, з нульовим власним значенням. Однак усі власні значення випливають із формули

$$\lambda = \int_0^{3h} [\, p(u_j'')^2 + q(u_j')^2 + ru_j^2 \,]\, dx, \quad j = 3, 4, \tag{4}$$

і не можуть бути нульовими внаслідок умов щодо p, q, r в (1). Отже, вся система u_j, $j = 1, 2, 3, 4$, лінійно незалежна.

Зазначимо, що стосовно незалежності систем тут і далі немає обмежень на крок сітки, але це помилково припускалося в роботі [1].

Коефіцієнти $\widetilde{a}_1$, $\widetilde{b}_1$, $\widetilde{c}_1$, $\widetilde{d}_1$ визначаються з таких умов гладкої неперервності $\widetilde{S}_1$ в точц $x = h$ зі стрибком похідних 3-го порядку:

$$\begin{gathered} \widetilde{a}_1 u_1 + \widetilde{b}_1 u_2 = \widetilde{c}_1 u_3 + \widetilde{d}_1 u_4, \\ \widetilde{a}_1 u_1' + \widetilde{b}_1 u_2' = \widetilde{c}_1 u_3' + \widetilde{d}_1 u_4', \\ \widetilde{a}_1 u_1'' + \widetilde{b}_1 u_2'' = \widetilde{c}_1 u_3'' + \widetilde{d}_1 u_4'', \\ \widetilde{a}_1 (pu_1'')' + \widetilde{b}_1 (pu_2'')' = \widetilde{c}_1 (pu_3'')' + \widetilde{d}_1 (pu_4'')' + 1. \end{gathered} \tag{5}$$

За допомогою інтегрування частинами доводяться такі зв'язки між u_j:

$$\begin{gathered} u_3(0) = u_1(2h), \quad u_4(0) = u_1(3h), \\ u_3'(0) = -u_2(2h), \quad u_4'(0) = -u_2(3h), \\ u_4(2h) = -u_3(3h). \end{gathered} \tag{6}$$

Тому вронськіан запишемо у вигляді

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} u_1(2h) & u_1(3h) \\ u_2(2h) & u_2(3h) \end{vmatrix}.$$

Уведемо позначення

$$\alpha = u_3(0), \ \beta = u_4(0), \ \gamma = u_3'(0), \ \delta = u_4'(0), \ \varepsilon = u_4'(2h). \tag{7}$$

Випишемо розв'язок системи (5):

$$a_1 = \begin{vmatrix} u_3 & u_2 & u_4 \\ u_3' & u_2' & u_4' \\ u_3'' & u_2'' & u_4'' \end{vmatrix}, \quad b_1 = \begin{vmatrix} u_1 & u_3 & u_4 \\ u_1' & u_3' & u_4' \\ u_1'' & u_3'' & u_4'' \end{vmatrix},$$

$$c_1 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_4 \\ u_1' & u_2' & u_4' \\ u_1'' & u_2'' & u_4'' \end{vmatrix}, \quad d_1 = \begin{vmatrix} u_2 & u_1 & u_3 \\ u_2' & u_1' & u_3' \\ u_2'' & u_1'' & u_3'' \end{vmatrix}.$$

Тут $a_1 = \Delta_1 \widetilde{a}_1$, $b_1 = \Delta_1 \widetilde{b}_1$, $c_1 = \Delta_1 \widetilde{c}_1$, $d_1 = \Delta_1 \widetilde{d}_1$.

Розкриваючи визначники за першим рядком та інтегруючи частинами, отримаємо

$$a_1 = \delta u_3 - \varepsilon u_2 - \gamma u_4, \quad b_1 = \alpha u_3 - \beta u_3 - \varepsilon u_1,$$
$$c_1 = \delta u_1 + \beta u_2, \quad d_1 = -\alpha u_2 - \gamma u_1, \tag{8}$$
$$u_j = u_j(h), \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Наведемо Δ_1 через коефіцієнти $S_1 = \Delta_1 \widetilde{S}_1$. По-перше, маємо

$$\int_0^{3h} (pS_1'')'' dx = (pS_1'')'(3h) - (pS_1'')'(0) = -d_1 - a_1.$$

По-друге, беручи до уваги (2) та стрибок похідних у точці $x = h$, одержуємо

$$\int_0^{3h} (pS_1'')'' dx = a_1[(pu_1'')'(h) - (pu_1'')'(0)] +$$

$$+b_1[(pu_2'')'(h) - (pu_2'')'(0)] + c_1[(pu_3'')'(2h) - (pu_3'')'(h)] +$$

$$+d_1[(pu_4'')'(3h) - (pu_4'')'(h)] = \Delta_1 - a_1 - c_1 - d_1.$$

Отже, $\Delta_1 = c_1$.

Унаслідок проєктування диференціального рівняння на сплайн S_1 маємо точний сітковий аналог лівої крайової умови:

$$a_1 U(0) - b_1 U'(0) + c_1 U(2h) + d_1 U(3h) - \Delta_1 U(h) = \int_0^{3h} S_1(x) f(x) dx. \tag{9}$$

Оскільки $\Delta_1 = c_1$, то рівність (9) стає простішою для практичного застосування, ніж у роботі [2]:

$$c_1 U(2h) + d_1 U(3h) - c_1 U(h) = \int_0^{3h} S_1(x) f(x) dx - a_1 A_0 + b_1 B_0. \tag{10}$$

Коефіцієнти (8) такі самі, як в [3], де вони визначаються іншим способом. Рівняння (9) узгоджено з принципом суперпозиції розв'язків. Ліва частина (9) є лінійною комбінацією сіткових значень точного розв'язку однорідного рівняння $LU = 0$ з неоднорідними умовами, а права частина дає розв'язок не-однорідного рівняння з нульовими крайовими умовами. Тому коефіцієнти (8) отримаємо іншим способом. Розв'язання однорідного рівняння на відрізку $[0;3h]$ подамо у вигляді

$$U(x)=\sum_{j=1}^{4} T_j u_j(x). \tag{11}$$

Беручи до уваги (3), (6), (7), для визначення T_j дістанемо СЛАР

$$\begin{cases} T_1\cdot 0+T_2\cdot 0+T_3\cdot\alpha+T_4\cdot\beta=\Phi_1, \\ T_1\cdot 0+T_2\cdot 0+T_3\cdot\gamma+T_4\cdot\delta=\Phi_2, \\ T_1\cdot\alpha-T_2\cdot\gamma+T_3\cdot 0+T_4\cdot\varepsilon=\Phi_3, \\ T_1\cdot\beta-T_2\cdot\delta-T_3\cdot\varepsilon+T_4\cdot 0=\Phi_4, \end{cases} \tag{12}$$

де $\Phi_1=U(0)$, $\Phi_2=U'(0)$, $\Phi_3=U(2h)$, $\Phi_4=U(3h)$. Визначник системи внаслідок зв'язків (6) становить Δ_1^2. Розв'язок системи (12):

$$\Delta_1 T_3=\delta\Phi_1-\beta\Phi_2, \quad \Delta_1 T_4=\alpha\Phi_2-\gamma\Phi_1,$$

$$\Delta_1 T_1=\delta\Phi_3-\gamma\Phi_4-\varepsilon\Phi_2, \quad \Delta_1 T_2=\beta\Phi_3-\alpha\Phi_4-\varepsilon\Phi_1. \tag{13}$$

Підставляючи (13) в (11) для $x=h$, маємо рівняння

$$\Delta_1 U(h)=a_1U(0)-b_1U'(0)+c_1U(2h)+d_1U(3h)$$

з такими самими коефіцієнтами, як у формулах (8).

ТОЧНІ УМОВИ ВСЕРЕДИНІ ВІДРІЗКА

Для отримання точного сіткового аналога диференціального рівняння у вузлах x_i, $i=2,\ldots, N-2$, використаємо, так само, як в окремому випадку [3], сплайн

$$\widetilde{S}_i=\begin{cases} \widetilde{a}_i v_1^i(x), & x_{i-2}\le x\le x_{i-1}, \\ \widetilde{a}_i v_1^i(x)+\widetilde{b}_i v_2^i(x), & x_{i-1}\le x\le x_i, \\ \widetilde{c}_i v_3^i(x)+\widetilde{d}_i v_4^i(x), & x_i\le x\le x_{i+1}, \\ \widetilde{d}_i v_4^i(x), & x_{i+1}\le x\le x_{i+2}. \end{cases} \tag{14}$$

Через наявність багатьох різних індексів надалі індекс i в системі v_j не пишемо. Тут v_j — це розв'язок однорідного рівняння $Lv_j=0$ з початковими умовами

$$v_1=v_1'=v_1''=0, \quad (pv_1'')'=1 \quad \text{для } x=x_{i-2},$$

$$v_2=v_2'=v_2''=0, \quad (pv_2'')'=1 \quad \text{для } x=x_{i-1},$$

$$v_3=v_3'=v_3''=0, \quad (pv_3'')'=-1 \quad \text{для } x=x_{i+1},$$

$$v_4=v_4'=v_4''=0, \quad (pv_4'')'=-1 \quad \text{для } x=x_{i+2}.$$

Система v_j лінійно незалежна. Доведення, як і у випадку u_j, випливає від супротивного. Припустивши, що визначник Вронського Δ_i системи v_j, наприклад, у точці x_i дорівнює нулю, одержимо лінійну залежність рядків або стовпців. Тоді v_j будуть власними функціями з нульовим власним значенням, а це суперечить співвідношенню (4) для v_j. Так само, як і в [1], коефіцієнти сплайну (14) визначаються з умов (5) для $\widetilde{S}_i$ в точці x_i.

Унаслідок проєктування диференціального рівняння на сплайн (14) в [3] наведено точний сітковий аналог

$$a_iU(x_{i-2})+b_iU(x_{i-1})+c_iU(x_{i+1})+d_iU(x_{i+2})-\Delta_iU(x_i)=\int_{x_{i-2}}^{x_{i+2}} S_i(x)f(x)\,dx. \tag{15}$$

Тут $a_i = \Delta_i \widetilde{a}_i$, $b_i = \Delta_i \widetilde{b}_i$, $c_i = \Delta_i \widetilde{c}_i$, $d_i = \Delta_i \widetilde{d}_i$, $S_i = \Delta_i \widetilde{S}_i$, Δ_i — визначник Вронського для v_j. Оскільки ліва частина (15) є лінійною комбінацією сіткових значень точного розв'язання однорідного рівняння $LU = 0$ з неоднорідними крайовими умовами на межі, то коефіцієнти сплайну одержимо іншим способом. Розв'язання однорідного рівняння зображується у вигляді

$$U(x) = \sum_{j=1}^{4} T_j v_j(x), \quad x \in [x_{i-2}; x_{i-2}]. \tag{16}$$

Уведемо позначення:

$$\alpha = v_2(x_{i-2}), \quad \beta = v_3(x_{i-2}), \quad \gamma = v_4(x_{i-2}), \quad \delta = v_3(x_{i-1}),$$
$$\varepsilon = v_4(x_{i-2}), \quad \theta = v_4(x_{i+1}), \tag{17}$$
$$\Phi_1 = U(x_{i-2}), \quad \Phi_2 = U(x_{i-1}), \quad \Phi_3 = U(x_{i+1}), \quad \Phi_4 = U(x_{i+2}).$$

Застосовуючи інтегрування частинами, в [3] одержано такі зв'язки між v_j:

$$v_2(x_{i-2}) = -v_1(x_{i-1}), \quad v_3(x_{i-2}) = v_1(x_{i+1}), \quad v_4(x_{i-2}) = v_1(x_{i+2}),$$
$$v_3(x_{i-1}) = v_2(x_{i+1}), \quad v_4(x_{i-1}) = v_2(x_{i+2}), \quad v_4(x_{i+1}) = -v_3(x_{i+2}). \tag{18}$$

Невідомі T_j знайдемо зі СЛАР

$$U(x_k) = \sum_{j=1}^{4} T_j v_j(x_k), \quad x_k = i-2, \; i-1, \; i+1, \; i+2. \tag{19}$$

Беручи до уваги (14), (17), і (18), перетворимо систему (19) до вигляду

$$\begin{cases} T_1 \cdot 0 + T_2 \cdot \alpha + T_3 \cdot \beta + T_4 \cdot \gamma = \Phi_1, \\ -T_1 \cdot \alpha + T_2 \cdot 0 + T_3 \cdot \delta + T_4 \cdot \varepsilon = \Phi_2, \\ T_1 \cdot \beta + T_2 \cdot \delta + T_3 \cdot 0 + T_4 \cdot \theta = \Phi_3, \\ T_1 \cdot \gamma + T_2 \cdot \varepsilon - T_3 \cdot \theta + T_4 \cdot 0 = \Phi_4. \end{cases} \tag{20}$$

Розв'язання системи (20):

$$\Delta_i T_1 = \theta\,\Phi_2 + \delta\,\Phi_4 - \varepsilon\,\Phi_3, \quad \Delta_i T_2 = \gamma\,\Phi_3 - \beta\Phi_4 - \theta\Phi_1,$$
$$\Delta_i T_3 = \gamma\,\Phi_2 + \alpha\,\Phi_4 - \varepsilon\,\Phi_1, \quad \Delta_i T_4 = \delta\,\Phi_1 - \beta\,\Phi_2 - \alpha\,\Phi_3. \tag{21}$$

Після підстановки в (16) для $x = x_i$ отримаємо

$$\Delta_i U(x_i) = a_i U(x_{i-2}) + b_i U(x_{i-1}) + c_i U(x_{i+1}) + d_i U(x_{i+2}),$$

де

$$a_i = \delta v_4 - \theta v_2 - \varepsilon v_3, \quad b_i = \theta v_1 + \gamma v_3 - \beta v_4,$$
$$c_i = \gamma v_2 - \varepsilon v_1 - \alpha v_4, \quad d_i = \delta v_1 + \alpha v_3 - \beta v_2, \tag{22}$$
$$v_j = v_j(x_i).$$

Коефіцієнти (22) такі самі, як у [1, 2], де вони знайдені іншим способом. Однак для практичного застосування подамо простіший точний аналог. Для цього виразимо Δ_i через коефіцієнти сплайну S_i. По-перше,

$$\int_{x_{i-2}}^{x_{i+2}} (pS_i'')''\,dx = (pS_i'')'(x_{i+2}) - (pS_i'')'(x_{i-2}) = -d_i - a_i.$$

По-друге, використовуючи умови Коші для v_j та стрибок похідних у точці x_i, маємо

$$\int_{x_{i-2}}^{x_{i+2}} (pS_i'')'' dx = a_i[(pv_1'')'(x_i) - (pv_1'')'(x_{i-2})] + b_i[(pv_2'')'(x_i) - (pv_2'')'(x_{i-1})] +$$

$$+ c_i[(pv_3'')'(x_{i+1}) - (pv_3'')'(x_i)] + d_i[(pv_4'')'(x_{i+2}) - (pv_4'')'(x_i)] =$$

$$= -a_i - b_i - c_i - d_i + \Delta_i .$$

Тоді $\Delta_i = b_i + c_i$. Отже, точний сітковий аналог диференціального рівняння в кожній точці x_i, $i = 2, \ldots, N-2$, має вигляд

$$a_i U(x_{i-2}) + b_i U(x_{i-1}) + c_i U(x_{i+1}) + d_i U(x_{i+2}) - (b_i + c_i) U(x_i) =$$

$$= \int_{x_{i-2}}^{x_{i+2}} S_i(x) f(x) dx. \tag{23}$$

ТОЧНІ ПРАВІ КРАЙОВІ УМОВИ

Для одержання точного сіткового аналога правої природної крайової умови використаємо сплайн

$$\tilde{S}_N(x) = \begin{cases} \tilde{a}_N w_1(x), & l-3h \le x \le l-2h, \\ \tilde{c}_N w_1(x) + \tilde{b}_N w_2(x), & l-2h \le x \le l-h, \\ \tilde{c}_N w_3(x) + \tilde{d}_N w_4(x), & l-h \le x \le l. \end{cases} \tag{24}$$

Тут w_j — розв'язки однорідного рівняння $Lw_j = 0$ з початковими умовами

$$w_1 = w_1' = pw_1' = 0, \quad (pw_1'')' = 1 \quad \text{для } x = l - 3h,$$

$$w_2 = w_2' = pw_2'' = 0, \quad (pw_2'')' = 1 \quad \text{для } x = l - 2h,$$

$$\left.\begin{aligned} w_3 = 0, \; w_3' = -1, \; pw_3'' = (pw_3'')' = 0 \\ w_4 = 1, \; w_4' = pw_4'' = (pw_4'')' = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{для } x = l. \tag{25}$$

Визначник Вронського Δ_N системи w_j, $j = 1, 2, 3, 4$, в точці $x = l$ має вигляд:

$$\Delta_N = \begin{vmatrix} pw_1'' & pw_2'' \\ (pw_1'')' & (pw_2'')' \end{vmatrix} \ne 0.$$

Доведення, як і вище, від супротивного. Отже, система w_j лінійно незалежна.

Проєктуванням диференціального рівняння на сплайн (24) отримуємо точне сіткове рівняння

$$a_N U(l-3h) + b_N U(l-2h) + c_N pU''(l) + d_N (pU'')'(l) - \Delta_N U(l-h) =$$

$$= \int_{l-3h}^{l} S_N(x) f(x) dx. \tag{26}$$

Тут $a_N = \Delta_N \tilde{a}_N$, $b_N = \Delta_N \tilde{b}_N$, $c_N = \Delta_N \tilde{c}_N$, $d_N = \Delta_N \tilde{d}_N$, $S_N = \Delta_N \tilde{S}_N$.

Коефіцієнти в (24) визначаються з умов (5) для $\tilde{S}_N$ в точці $x = l - h$. Як і вище, ліва частина (26) є лінійною комбінацією сіткових значень точного розв'язку однорідного рівняння $LU = 0$ з неоднорідними крайовими умовами. Тому, не розв'язуючи СЛАР, знайдемо коефіцієнти в (24) інакше. Розв'язок однорідного рівняння на відрізку $[l-3h;\ l]$ подамо у вигляді

$$U(x) = \sum_{j=1}^{4} T_j w_j(x). \tag{27}$$

Невідомі T_j знайдемо з такої системи:

$$\sum_{j=1}^{4} T_j w_j(l-3h) = U(l-3h),$$

$$\sum_{j=1}^{4} T_j w_j(l-2h) = U(l-2h),$$

$$\sum_{j=1}^{4} T_j pw_j''(l) = pU''(l),$$

$$\sum_{j=1}^{4} T_j (pw_j'')'(l) = (pU'')'(l). \tag{28}$$

Уведемо позначення:

$$\alpha = w_2(l-3h), \quad \beta = w_3(l-3h), \quad \gamma = w_4(l-3h),$$

$$\delta = w_3(l-2h), \quad \varepsilon = v_4(l-2h), \tag{29}$$

$$\Phi_1 = U(l-3h), \quad \Phi_2 = U(l-2h), \quad \Phi_3 = pU''(l), \quad \Phi_4 = (pU'')'(l).$$

Інтегруючи частинами, дістаємо такі зв'язки між w_j:

$$w_2(l-3h) = -w_1(l-2h), \quad w_3(l-3h) = pw_1''(l),$$

$$w_4(l-3h) = (pw_1'')'(l), \quad w_3(l-2h) = pw_2''(l), \quad v_4(l-2h) = (pw_2'')'(l). \tag{30}$$

Використовуючи (25), (29) і (30), запишемо систему інакше:

$$\begin{cases} T_1 \cdot 0 - T_2 \cdot \alpha + T_3 \cdot \beta + T_4 \cdot \gamma = \Phi_1, \\ T_1 \cdot \alpha + T_2 \cdot 0 + T_3 \cdot \delta + T_4 \cdot \varepsilon = \Phi_2, \\ T_1 \cdot \beta + T_2 \cdot \delta + T_3 \cdot 0 + T_4 \cdot 0 = \Phi_3, \\ T_1 \cdot \gamma + T_2 \cdot \varepsilon + T_3 \cdot 0 + T_4 \cdot 0 = \Phi_4. \end{cases} \tag{31}$$

Розв'язання системи (31) подамо у вигляді

$$\Delta_N T_1 = \varepsilon \Phi_3 - \delta \Phi_4, \quad \Delta_N T_2 = \beta \Phi_4 - \gamma \Phi_3,$$

$$\Delta_N T_3 = \varepsilon \Phi_1 - \gamma \Phi_2 + \alpha \Phi_4, \quad \Delta_N T_4 = \beta \Phi_2 - \delta \Phi_1 - \alpha \Phi_3. \tag{32}$$

Підставляючи (32) у (27) для $x = l - h$, одержимо

$$\Delta_N U(l-h) = a_N U(l-3h) + b_N U(l-2h) + c_N pU''(l) + d_N (pU'')'(l),$$

де

$$a_N = \varepsilon w_3 - \delta w_4, \quad b_N = \beta w_4 - \gamma w_3, \quad c_N = \varepsilon w_1 - \gamma w_2 + \alpha w_4,$$

$$d_N = \beta w_2 - \delta w_1 + \alpha w_3, \quad \Delta_N = \beta\varepsilon - \gamma\delta, \quad w_j = w_j(l-h).$$

Відмітимо, що визначник системи (31) є квадратом визначника Вронського для w_j, оскільки справджуються зв'язки (30).

Для практичного застосування подамо Δ_N, використовуючи коефіцієнти сплайну (24). Як і вище, спочатку маємо

$$\int_{l-3h}^{l} (pS_N'')'' \, dx = (pS_N'')'(l) - (pS_N'')'(l-3h) = -a_N.$$

Далі, беручи до уваги (25) та стрибок $(pS_N'')'(l-h)$, отримуємо

$$\int_{l-3h}^{l} (pS_N'')'' \, dx = a_N [(pw_1'')'(l-h) - (pw_1'')'(l-3h)] +$$

$$+ b_N [(pw_2'')'(l-h) - (pw_2'')'(l-2h)] + c_N [(pw_3'')'(l) -$$

$$-(pw_3'')'(l-h)] + d_N [(pw_4'')'(l) - (pw_4'')'(l-h)] = -a_N - b_N + \Delta_N.$$

Отже, $\Delta_N = b_N$. Тому точним сітковим аналогом правої крайової умови є рівняння

$$a_N U(l-3h) + b_N U(l-2h) - b_N U(l-h) =$$
$$= \int_{l-3h}^{l} S_N(x) f(x)\, dx - c_N A_l - d_N B_l. \qquad (33)$$

У практичній реалізації точної схеми для обчислення розв'язків задач Коші, які належать до коефіцієнтів сплайну, запропоновано, так само, як у [1, 5–7], використовувати ряди за парними степенями кроку сітки. Наприклад, частинна сума з трьох доданків забезпечує 6-й порядок точності, якщо для першого, другого і третього доданків застосовувати квадратурні формули відповідно 6-го, 4-го і 2-го порядків точності.

Для обчислень варто використовувати рівняння (10), (23) і (33), які є простішими, ніж в [2], оскільки визначник Вронського в кожному сітковому рівнянні визначається лише через коефіцієнти відповідного сплайну.

Побудова точного аналога без особливих труднощів переноситься на довільну нерівномірну сітку у випадку різноманітних крайових умов.

ВИСНОВКИ

Запропонований в цій статті метод можна використовувати для одержання точних дискретних аналогів крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь різного порядку. Для цього формуються сплайни з числа незалежних розв'язків задач Коші, що відповідають порядку рівняння. Обмеженнями не є рівномірність сітки, тип крайових умов або гладкість коефіцієнтів вихідної задачі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бурханов Ш.Л., Гуминська Н.О., Макаров В.Л., Приказчиков В.Г. Про точні різницеві схеми для звичайного диференціального рівняння четвертого порядку. *Доп. АН УРСР. Сер. А.* 1978. № 9. С. 778–780.
2. Бурханов Ш.А., Макаров В.Л. О точных и усеченных разностных схемах для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка. *Дифференц. уравнения*. 1984. Т. 20, № 9. С. 1502–1514.
3. Приказчиков В.Г. Методы построения точной разностной схемы для обыкновенного дифференциального уравнения 4-го порядка. *Кибернетика и системный анализ*. 2017. Т. 53, № 2. С. 1–7.
4. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. Москва: Наука, 1970. 512 с.
5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Однородные разностные схемы высокого порядка точности на неравномерных сетках. *Журн. вычисл. математики и мат. физики*. 1961. № 3. С. 423–440.
6. Приказчиков В.Г. Однородные разностные схемы высокого порядка точности для задачи Штурма–Лиувилля. *Журн. вычисл. математики и мат. физики*. 1969. № 2. С. 315–336.
7. Приказчиков В.Г. Точная трехточечная схема и схемы высокого порядка точности для обыкновенного дифференциального уравнения 4-го порядка. *Кибернетика и системный анализ.* 2020. Т. 56, № 4. С. 56–67.

V. Prikazchikov

THE EQUIVALENCE OF THE FUNDAMENTAL SPLINE AND GREEN'S FUNCTION IN THE CONSTRUCTION OF THE EXACT FINITE-DIMENSIONAL ANALOGUE OF THE BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR AN ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION OF THE 4TH ORDER

Abstact. The author considers a problem with the main and natural boundary conditions on an interval. A new method for constructing an exact discrete analog of the problem is proposed. The method deals with the projection of the differential equation on local splines, formed by the fundamental system of solutions of the Cauchy problems for the homogeneous equation. A system of linear algebraic equations with a 5-diagonal matrix is obtained for the values of the exact solutions of the original problem at the points of a uniform grid. To implement an exact analog, we recommend using high-order accuracy schemes which are formed by partial sums of series in even powers of the grid step for solving the Cauchy problems.

Keywords: boundary-value problem, ordinary differential equation of the 4th order, Cauchy problem, Wronskian, local spline, superposition of solutions, exact discrete analog, system of linear algebraic equations, 5-diagonal matrix.

Надійшла до редакції 08.01.2023