УДК 517.9

Л.А. ВЛАСЕНКО
Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків, Україна,
e-mail: *lara@rutrus.com.*

А.А. РУТКАС
Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків, Україна,
e-mail: *andrew@rutrus.com.*

А.Г. РУТКАС
Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків, Україна,
e-mail: *anatoly@rutrus.com.*

А.О. ЧИКРІЙ
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *chik@insyg.kiev.ua.*

СТОХАСТИЧНА ДЕСКРИПТОРНА ГРА ПЕРЕСЛІДУВАННЯ

Анотація. Досліджено диференціальну гру переслідування у стохастичній дескрипторній лінійній системі. Динаміку системи описано стохастичним диференціально-алгебраїчним рівнянням у розумінні Іто. Розв'язки рівняння представлено у вигляді стохастичної формули варіації сталих через початкові дані та блок керування. Для отримання умов завершення гри використано обмеження на опорні функціонали двох множин, що визначаються поведінками переслідувача і втікача. Для побудови керування переслідувача, що гарантує приведення динамічного вектора системи на термінальну множину, застосовано метод розв'язувальних функцій. Результати проілюстровано на прикладі стохастичної дескрипторної системи, що описує перехідні режими у радіотехнічному фільтрі з випадковими збуреннями у вигляді білого шуму.

Ключові слова: стохастичне диференціально-алгебраїчне рівняння, вінерівський процес, дескрипторна система, диференціальна гра, радіотехнічний фільтр, білий шум.

Вивчається диференціальна гра переслідування у системі, динаміка якої описується стохастичним лінійним диференціально-алгебраїчним рівнянням. Останні, на відміну від явних рівнянь, не є розв'язними відносно стохастичного диференціала шуканого випадкового процесу. Системи керування, стани яких описують подібними рівняннями, називають стохастичними дескрипторними системами. Як і для явних систем [1, 2], в яких у процесі дослідження диференціальних ігор враховують випадкові збурення у вигляді білого шуму, виникає потреба у проведенні подібних досліджень для дескрипторних систем. Так, ігрові задачі Неша для стохастичної дескрипторної системи вивчались у [3]. Стохастичні диференціальні ігри розглядалися в [4, 5].

ЗОБРАЖЕННЯ СТАНІВ СИСТЕМИ

Уведемо позначення: $\Delta=\{(t,\tau):0\le\tau\le t\le T\}$ — трикутник на площині; $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $||\cdot||$ — скалярний добуток та норма у відповідних просторах; E та 0 — одинична та нульова матриці належної розмірності; K^{tr} — транспонована матриця чи транспонований вектор; $L_2(0,T;\mathbf{R}^n)$ — простір вектор-функцій зі значеннями в $\mathbf{R}^n$, що сумовні з квадратом норми на $[0,T]$; $W_2^k(0,T;\mathbf{R}^n)$ — простір Соболєва порядку k вектор-функцій з $L_2(0,T;\mathbf{R}^n)$, узагальнені похідні яких до порядку k включно належать $L_2(0,T;\mathbf{R}^n)$; $\{\Omega,F,P\}$ — повний імовірнісний простір з неспадною сім'єю сигма-алгебр $\{F_t\}_{0\le t\le T}$ $(F_s\subseteq F_t\subseteq F,\ 0\le s\le t\le T)$; $\mathbf{M}$ — математичне сподівання відносно ймовірнісної міри P; $w(t)=w(t,\omega)$ — m-мірний вінерівський процес на $[0,T]$, що виходить з нуля та узгоджений з сім’єю сигма-алгебр $\{F_t\}_{0\le t\le T}$; $H_2(\Omega;\mathbf{R}^n)=H_2$ — Гільбертів простір n-мірних випадкових величин $\xi=\xi(\omega)$, що мають скінченний абсолютний момент другого порядку $\mathbf{M}||\xi||^2<\infty$, $\langle\xi,\eta\rangle_{H_2}=\mathbf{M}\langle\xi,\eta\rangle$; якщо F_0 — сигма-підалгебра сигма-алгебри F, то $H_2(\Omega;\mathbf{R}^n;F_0)$ — підпростір простору H_2, що складається з F_0-вимірних випадкових величин; $L_2(0,T;\Omega;\mathbf{R}^n)=L_{2,\Omega}$ — Гільбертів простір n-мірних вимірних випадкових процесів $x(t,\omega)$, $0\le t\le T$, $\omega\in\Omega$, що задовольняють умову

$$\int_0^T \mathbf{M}\,||x(t,\omega)||^2\,dt<\infty,\ \langle x,y\rangle_{L_{2,\Omega}}=\int_{t_0}^T \mathbf{M}\langle x(t),y(t)\rangle\,dt;$$

$L_2(0,T;\Omega;\mathbf{R}^n;F_t)=L_{2,\Omega,F_t}$ — підпростір простору $L_{2,\Omega}$, що складається з неупереджених випадкових процесів відносно сім’ї $\{F_t\}_{0\le t\le T}$. Інформацію щодо теорії випадкових процесів наведено в [6, 7].

Динаміка системи описується стохастичним диференціально-алгебраїчним рівнянням (у розумінні Іто)

$$d[Ax(t)]+Bx(t)\,dt=[f(t)+K_1u(t)+K_2v(t)]\,dt+\sigma\,dw(t),\ 0\le t\le T, \tag{1}$$

з початковою умовою

$$Ax(0,\omega)=\xi(\omega). \tag{2}$$

Тут A та B — дійсні матриці розмірів $n\times n$; K_1, K_2 та σ — дійсні матриці відповідно розмірів $n\times m_1$, $n\times m_2$ та $n\times m$; $f(t,\omega)\in L_2(0,T;\Omega;\mathbf{R}^n;F_t)$, $\xi(\omega)\in H_2(\Omega;\mathbf{R}^n;F_0)$, $u(t,\omega)\in L_2(0,T;\Omega;\mathbf{R}^{m_1};F_t)$ — керування переслідувача; $v(t,\omega)\in L_2(0,T;\Omega;\mathbf{R}^{m_2};F_t)$ — керування втікача. Стохастичні дескрипторні системи керування, означення та властивості їхніх розв’язків описано в [8–11]. У [12, 13] розглянуто практичні застосування стохастичних систем керування. Розв’язки $x(t)\in L_2(0,T;\Omega;\mathbf{R}^n;F_t)$ початкової задачі (1), (2) з імовірністю 1 задовольняють рівняння

$$Ax(t)-\xi+\int_0^t Bx(s)\,ds=\int_0^t[f(s)+K_1u(s)+K_2v(s)]\,ds+\sigma\,w(t),\quad 0\le t\le T.$$

Тут розглянуто неперервну модифікацію випадкового процесу $Ax(t)$.

Вивчаємо регулярні системи, для яких визначник $\det(\lambda A+B)$ характеристичної в’язки матриць $\lambda A+B$ як функція λ тотожно не перетворюється в нуль. Це обмеження дає змогу ввести у розгляд такі матриці (див. [14] та посилання там):

$$I=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma(\lambda A+B)^{-1}d\lambda,\quad G=AI(A-B)+B,$$

$$D=-AIBG^{-1},\quad H=(E-AI)AG^{-1},$$

де контур γ обмежує всі власні числа характеристичної в’язки. Тут I — дійсна матриця, IA — проєкційна матриця на підпростір власних та приєднаних векторів характеристичної в’язки у скінченних точках, $E-IA$ — проєкційна матриця на підпростір власних та приєднаних векторів у нескінченно віддаленій точці, H — нільпотентна матриця з індексом нільпотентності $m\ge 1$. Мають місце рівності

$$AIB=BIA,\quad IAG^{-1}=G^{-1}AI,\quad AG^{-1}AI=AI,\quad DAI=AID. \tag{3}$$

Нехай справедливі обмеження:

— якщо $m > 1$, то детермінованими є вектор $(E - AI)\xi$ та функція

$$f_H(t) = Hf(t); \tag{4}$$

— якщо $m > 1$, то

$$H^{j-1} f_H(t) \in W_2^j(0, T; \mathbf{R}^n), \ j = 1, \ldots, m-1, \tag{5}$$

$$HK_1 = 0, \ HK_2 = 0, \ AI\sigma = \sigma, \quad (E - AI)\xi = \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} [H^j f_H(0)]. \tag{6}$$

Унаслідок теореми 1 із [9] існує єдиний розв'язок задачі (1), (2), який допускає зображення

$$x(t) = G^{-1} \int_0^t e^{D(t-\tau)} AI [K_1 u(\tau) + K_2 v(\tau) + f(\tau)] d\tau + G^{-1}(E - AI) \times$$

$$\times [K_1 u(t) + K_2 v(t)] + G^{-1} e^{Dt} AI\xi + G^{-1} \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} [H^j (E - AI) f(t)] +$$

$$+ G^{-1} \int_0^t e^{D(t-\tau)} \sigma dw(\tau). \tag{7}$$

За допомогою співвідношення (7) з урахуванням рівностей (3) одержуємо зображення

$$Ax(t) = \int_0^t e^{D(t-\tau)} AI [K_1 u(\tau) + K_2 v(\tau)] d\tau + \psi(t), \tag{8}$$

$$\psi(t) = e^{Dt} AI\xi + \int_0^t e^{D(t-\tau)} AIf(\tau) d\tau + \int_0^t e^{D(t-\tau)} \sigma dw(\tau) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} [H^{j+1} (E - AI) f(t)]. \tag{9}$$

РОЗВ'ЯЗНІСТЬ СТОХАСТИЧНОЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ГРИ

Перейдемо до постановки ігрової задачі у стохастичній дескрипторній системі (1), (2). Множинами допустимих керувань переслідувача U_1 та втікача V_1 є випадкові процеси $u(t, \omega) \in L_2(0, T; \Omega; \mathbf{R}^{m_1}; F_t)$ та $v(t, \omega) \in L_2(0, T; \Omega; \mathbf{R}^{m_2}; F_t)$, що як функції часу t набувають значень з областей керувань $U_0 \subset H_2(\Omega; \mathbf{R}^{m_1})$ та $V_0 \subset H_2(\Omega; \mathbf{R}^{m_2})$. Припускаємо, що U_0, V_0 — замкнені опуклі обмежені множини у просторах випадкових величин $H_2(\Omega; \mathbf{R}^{m_1})$, $H_2(\Omega; \mathbf{R}^{m_2})$. Тоді множинами допустимих керувань U_1 та V_1 є опуклі замкнені обмежені множини в $L_2(0, T; \Omega; \mathbf{R}^{m_1}; F_t)$ та $L_2(0, T; \Omega; \mathbf{R}^{m_2}; F_t)$. Допустимим керуванням $u(t) \in U_1$ та $v(t) \in V_1$ відповідає розв'язок $x(t) = x(t; u, v)$ початкової задачі (1), (2) (стан системи). Термінальною множиною $M \subset H_2(\Omega; \mathbf{R}^n)$ є ортогональна сума

$$M = M_0 \oplus M_1 \tag{10}$$

замкненого лінійного підпростору M_0 у $H_2(\Omega; \mathbf{R}^n)$ та замкненої кулі M_1 із ортогонального доповнення $M_0^{\perp}$ до M_0 з центром у нулі і радіусом d. Якщо

$d=0$, то $M_1=\{0\}$. Для дескрипторної системи термінальне обмеження у диференціальній грі накладаємо на динамічний вектор $Ax(t)$ (див. [15]). Нехай Π — ортопроєктор у $H_2(\Omega;\mathbf{R}^n)$ на підпростір $M_0^{\perp}$. Гру в системі (1), (2) можна завершити за час T_0, що не перевищує T, якщо для будь-якого допустимого керування втікача $v\in V_1$ знайдеться допустиме керування переслідувача $u\in U_1$, для якого $\|\Pi\, Ax(T_0;u,v)\|_{H_2}\le d$.

Задамо умови закінчення гри у системі (1), (2). У просторі $H_2(\Omega;\mathbf{R}^n)$ розглянемо опуклі замкнені обмежені множини

$$\Omega_u=\left\{\int_0^{T_0}\Pi e^{D(T_0-\tau)}AIK_1u(\tau)\,d\tau,\ u\in U_1\right\},$$

$$\Omega_v=\left\{\int_0^{T_0}\Pi e^{D(T_0-\tau)}AIK_2v(\tau)\,d\tau,\ v\in V_1\right\}$$

та їхні опорні функціонали

$$\varphi_u(h)=\sup_{z\in\Omega_u}\langle h,z\rangle_{H_2},\ \varphi_v(h)=\sup_{z\in\Omega_v}\langle h,z\rangle_{H_2}. \tag{11}$$

Теорема 1. Припустимо, що для регулярної системи (1), (2) з термінальною множиною (10) справедливі обмеження (4)–(6). Для завершення гри у системі (1), (2) за час T_0 необхідно і достатньо, щоб виконувалась нерівність

$$p(h)\doteq\varphi_v(h)-\varphi_u(-h)+\langle h,\Pi\psi(T_0)\rangle_{H_2}\le d\quad\forall h\in H_2(\Omega;\mathbf{R}^n):\ \|h\|_{H_2}=1. \tag{12}$$

Доведення. За допомогою співвідношення (8) та рівності $\varphi_u(-h)=$ $=-\inf\limits_{z\in\Omega_u}\langle h,z\rangle_{H_2}$ одержуємо зображення функції $p(h)$ із (12):

$$p(h)=\sup_{v\in V_1}\inf_{u\in U_1}\langle h,\Pi Ax(T_0;u,v)\rangle_{H_2}=\inf_{u\in U_1}\sup_{v\in V_1}\langle h,\Pi Ax(T_0;u,v)_{H_2}\rangle.$$

Доведемо необхідність нерівності (12) для завершення гри у системі (1), (2) за час T_0. Припустимо супротивне. Нехай гру можна завершити за час T_0, але нерівність (12) не виконується, тобто існує вектор $h\in H_2(\Omega;\mathbf{R}^n)$ з нормою $\|h\|_{H_2}=1$ такий, що виконується нерівність $p(h)>d$. Згідно з [16, розд. 2.9, 2.10] опукла замкнена обмежена множина слабко компактна у Гільбертовому просторі. Тому слабко компактна множина $\Omega_v\subset H_2(\Omega;\mathbf{R}^n)$. Отже, точна верхня межа в означенні опорного функціонала $\varphi_v(h)$ у (11) досягається: існує керування втікача $v_0\in V_1$ таке, що

$$\varphi_v(h)=\left\langle h,\int_0^{T_0}\Pi e^{D(T_0-\tau)}AIK_2v_0(\tau)\,d\tau\right\rangle_{H_2}.$$

Звідси одержуємо співвідношення

$$d<p(h)\le\left\langle h,\int_0^{T_0}\Pi e^{D(T_0-v)}AI[K_1u(\tau)+K_2v_0(\tau)]\,d\tau+\Pi\psi(T_0)\right\rangle_{H_2}=$$

$$=\langle h,\Pi Ax(T_0;u,v_0)\rangle_{H_2}\le\|\Pi Ax(T_0;u,v)\|_{H_2}\quad\forall u\in U_1.$$

Таким чином, існує керування втікача $v_0 \in V_1$ таке, що для будь-якого керування переслідувача $u \in U_1$ виконується нерівність

$$||\Pi Ax(T_0; u, v_0)||_{H_2} > d. \tag{13}$$

Це суперечить можливості завершення гри за час T_0. Необхідність доведена.

Тепер доведемо достатність нерівності (12) для завершення гри за час T_0. Припустимо супротивне: виконується нерівність (12), але знайдеться керування втікача $v_0 \in V_1$ таке, що для будь-якого керування переслідувача $u \in U_1$ виконується нерівність (13). Унаслідок теореми 1.8 із [17] неперервний опуклий функціонал $\varphi(u) = ||\Pi Ax(T_0; u, v_0)||_{H_2}$, що визначений на Гільбертовому просторі $L_2(0, T; \Omega; \mathbf{R}^{m_1}; F_t)$, досягає свого мінімуму на опуклій замкненій обмеженій множині U_1. Отже, знайдеться $\varepsilon > 0$ таке, що $\min\limits_{u \in U_1} \varphi(u) > d + \varepsilon$. Використаємо (8) для $t = T_0$ та $v = v_0$ і маємо, що у просторі $H_2(\Omega; \mathbf{R}^n)$ опукла множина

$$\Omega_u + \int_0^{T_0} \Pi e^{D(T_0 - \tau)} AIK_2 v_0(\tau)\, d\tau + \psi(T_0) = \{\Pi Ax(T_0; u, v_0),\ u \in U_1\}$$

та замкнена куля $S_{d+\varepsilon}$ радіуса $d + \varepsilon$ з центром у нулі не перетинаються. З теореми віддільності [див. 16, розд. 2.6] випливає існування $h \in H_2(\Omega; \mathbf{R}^n)$ з $||h||_{H_2} = 1$ такого, що

$$\inf_{u \in U_1} \langle h, \Pi Ax(T_0; u, v_0)\rangle_{H_2} \geq \sup_{z \in S_{d+\varepsilon}} \langle h, z\rangle_{H_2} \geq d + \varepsilon > d.$$

Звідси доходимо висновку, що $p(h) > d$ і нерівність (12) не виконується. Це суперечить припущенню. Теорема доведена.

Правило побудови керування переслідувача, що гарантує завершення гри переслідування, дає метод розв'язувальних функцій [18] (також див. [19] та посилання там). Уведемо у розгляд багатозначне відображення

$$Q(t, \tau, v) = \Pi e^{D(t - \tau)} AI(K_1 U_0 + K_2 v), \quad (t, \tau, v) \in \Delta \times V_0, \tag{14}$$

з опуклими замкненими обмеженими образами в $H_2(\Omega; \mathbf{R}^n)$. Замкненість образів є наслідком слабкої компактності у Гільбертовому просторі $H_2(\Omega; \mathbf{R}^{m_1})$ опуклої замкненої обмеженої множини U_0. Також розглянемо багатозначне відображення

$$\Lambda(t, \tau, v) = \{\tilde{\alpha} \geq 0 : Q(t, \tau, v) \cap \tilde{\alpha}[M_1 - \Pi\psi(t)] \neq \varnothing\}, \tag{15}$$

з образами в $\mathbf{R}$. Випадковий процес $\psi(t)$ визначений в (9). Припустимо, що $0 \in Q(t, \tau, v)$ для всіх $(t, \tau, v) \in \Delta \times V_0$. Тоді відображення (15) має непорожні образи. Замкненість образів відображення (15) є наслідком слабкої компактності множини M_1 та образів відображення Q. Якщо $\Pi\psi(t) \in M_1$, то $\Lambda(t, \tau, v) = [0, \infty)$. Якщо $\Pi\psi(t) \notin M_1$, то для t відображення Λ має опуклі замкнені обмежені образи. Значенням опорного функціонала множини $\Lambda(t, \tau, v)$ на елементі 1 є розв'язувальна функція $\alpha(t, \tau, v)$:

$$\alpha(t, \tau, v) = \sup\{\tilde{\alpha} : \tilde{\alpha} \in \Lambda(t, \tau, v)\}, \ \alpha : \Delta \times V_0 \to \mathbf{R}. \tag{16}$$

Якщо $||\Pi\psi(t)||_{H_2} \leq d$, то $\alpha(t, \tau, v) = \infty$. Якщо $||\Pi\psi(t)||_{H_2} > d$, то завдяки компактності образів $\Lambda(t, \tau, v)$ (15) супремум у (16) досягається. У цьому випадку припускаємо, що функція $\alpha_t(\tau)=\alpha(t,\tau,v(\tau))$ є вимірною за $\tau\in[0,t]$ для кожного $v\in V_1$.

Визначимо множину моментів часу, на яких може завершуватись гра:

$$\Theta=\{t\in[0,T]:\Pi\psi(t)\in M_1\}\cup$$
$$\cup\left\{t\in[0,T]:\Pi\psi(t)\notin M_1\wedge\inf_{v\in V_1}\int_0^t\alpha(t,\tau,v(\tau))\,d\tau\ge1\right\}. \qquad (17)$$

Якщо множина Θ не є порожньою і $T_0\in\Theta$, уведемо у розгляд багатозначні відображення з $[0,T_0]\times V_0$ у $H_2(\Omega;\mathbf{R}^{m_1})$:

$$\Gamma_1(\tau,v)=\{u\in U_0:\ \Pi e^{D(T_0-\tau)}AI(K_1u+K_2v)=0\}, \qquad (18)$$

$$\Gamma_2(\tau,v)=\{u\in U_0:\ \Pi e^{D(T_0-\tau)}AI(K_1u+K_2v)\in\alpha(T_0,\tau,v)(M_1-\Pi\psi(T_0))\}. \qquad (19)$$

Теорема 2. Нехай для регулярної системи (1), (2) з термінальною множиною (10) виконуються такі припущення: справедливі обмеження (4)–(6); $0\in Q(t,\tau,v)$ (14) для всіх $(t,\tau,v)\in\Delta\times V_0$; якщо для випадкового процесу $\psi(t)$ (9) маємо $\|\Pi\psi(t)\|_{H_2}>d$, то для кожного $v\in V_1$ функція $\alpha_t(\tau)=\alpha(t,\tau,v(\tau))$ є вимірною за $\tau\in[0,t]$; для $v\in V_1$ багатозначні відображення $\Gamma_1(\tau,v(\tau)),\Gamma_2(\tau,v(\tau))$, де Γ_1,Γ_2, визначені в (18), (19), мають селектори $\gamma_1(\tau),\gamma_2(\tau)\in\in L_2(0,T;\Omega;\mathbf{R}^{m_1};F_t)$. Тоді гру у системі (1), (2) можна завершити за час $T_0\in\Theta$.

Доведення. Для завершення гри у системі (1), (2) допустиме керування переслідувача $u(\tau)\in U_1$ будуємо залежно від вибраного допустимого керування втікача $v(\tau)\in V_1$ за допомогою багатозначних відображень (18), (19). У випадку $\Pi\psi(T_0)\in M_1$ керування переслідувача $u(\tau)$ на проміжку $[0,T_0]$ покладемо рівним селектору $\gamma_1(\tau)\in L_2(0,T;\Omega;\mathbf{R}^{m_1};F_t)$ багатозначного відображення $\Gamma_1(\tau,v(\tau))$. У цьому разі згідно з зображенням (8) маємо $\Pi Ax(T_0)==\Pi\psi(T_0)\in M_1$, звідки $Ax(T_0)\in M$, тобто гру буде завершено за час T_0.

Розглянемо випадок, коли $\Pi\psi(T_0)\notin M_1$. Уведемо функцію

$$q(t)=\int_0^t\alpha(T_0,\tau,v(\tau))\,d\tau,\ \ 0\le t\le T_0.$$

Оскільки $T_0\in\Theta$ (17), справедлива нерівність $q(T_0)\ge1$. Тому існує момент часу $t_*\in(0,T_0]$, що задовольняє співвідношення $q(t_*)=1$. Як допустиме керування переслідувача $u(\tau)$, $\tau\in[0,T_0]$, виберемо функцію, що на проміжку $[0,t_*)$ є селектор $\gamma_2(\tau)\in L_2(0,T;\Omega;\mathbf{R}^{m_1};F_t)$, а на проміжку $[t_*,T_0]$ є селектор $\gamma_1(\tau)\in L_2(0,T;\Omega;\mathbf{R}^{m_1};F_t)$. За такого вибору керування переслідувача завдяки зображенню $Ax(t)$ (8) з урахуванням означень Γ_1 (18) та Γ_2 (19) маємо

$$\Pi Ax(T_0)=\Pi\psi(T_0)+\int_0^{t_*}\Pi e^{D(T_0-\tau)}AI[K_1\gamma_2(\tau)+K_2v(\tau)]\,d\tau\in$$

$$\in\Pi\psi(T_0)+\int_0^{t_*}\alpha(T_0,\tau,v(\tau))(M_1-\Pi\psi(T_0))\,d\tau=\int_0^{t_*}\alpha(T_0,\tau,v(\tau))M_1\,d\tau\subset M_1,$$

де останні два інтеграли розуміються як множина інтегралів від інтегровних селекторів. Оскільки $\Pi Ax(T_0)\in M_1$, то $Ax(T_0)\in M$. Теорема доведена.

СТОХАСТИЧНА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ГРА У РАДІОТЕХНІЧНОМУ ФІЛЬТРІ

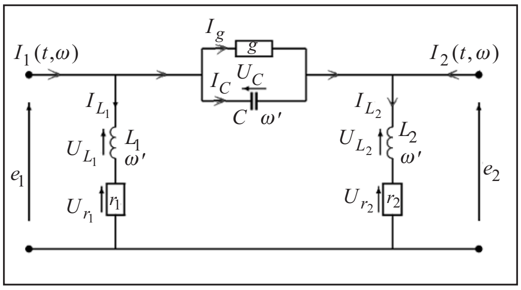

Рис. 1. Чотириполюсний фільтр

У радіотехнічних системах існують різні види перешкод, що зумовлені випадковими шумами навколишнього середовища [20–22]. Ці шуми моделюються за допомогою білого шуму — узагальненої похідної $w'(t)$ вінерівського процесу $w(t)$ [9, 23, 24]. Розглянемо моделювання диференціальної гри для кола, що зображено на рис. 1. Тут паралельно з ємністю C включено провідність g, а на інших внутрішніх гілках розташовано індуктивності L_1, L_2 і опори r_1, r_2. На значення внутрішніх струмів та напруг впливають два зовнішні джерела струму $I_1(t) = I_1(t,\omega),\ I_2(t) = I_2(t,\omega)$.

Маємо рівняння Кірхгофа та коливань елементів з урахуванням впливу білого шуму:

$$U_{L_1} + U_{r_1} - U_{L_2} - U_{r_2} - U_C = 0,\ I_1 = I_{L_1} + I_C + I_g,\ I_2 = I_{L_2} - I_C - I_g,$$
$$CU'_C = I_C + \sigma_C w'(t),\ I_g = gU_C,$$
$$L_j I'_{L_j} = U_{L_j} + \sigma_{L_j} w'(t),\ U_{r_j} = r_j I_{L_j},\ j = 1, 2, \tag{20}$$

де L_j, r_j, C, g — додатні сталі, σ_{L_j}, σ_C — вагові коефіцієнти, що визначають інтенсивності впливу білого шуму. Диференціальні рівняння коливань у (20) записують у вигляді стохастичних диференціалів

$$CdU_C = I_C\,dt + \sigma_C\,dw(t),\ L_j dI_{L_j} = U_{L_j}\,dt + \sigma_{L_j}\,dw(t). \tag{21}$$

Стани електричного кола характеризуються вектором

$$x(t) = (x_1(t)\ \ x_2(t)\ \ x_3(t))^{tr} = (I_{L_1}(t)\ \ I_{L_2}(t)\ \ U_C(t))^{tr}, \tag{22}$$

що складається з «енергетичних» компонент, які відповідають інерційним елементам. Виконуючі очевидні перетворення у співвідношеннях (20) з урахуванням диференціальних співвідношень (21), на відрізку часу $[0, T]$ одержуємо систему трьох стохастичних диференціальних рівнянь відносно енергетичних компонент (22):

$$d[L_1 I_{L_1}(t) - L_2 I_{L_2}(t)] + [r_1 I_{L_1}(t) - r_2 I_{L_2}(t) - U_C(t)]\,dt = (\sigma_{L_1} - \sigma_{L_2})\,dw(t),$$
$$d[CU_C(t)] + [I_{L_1}(t) + gU_C(t)]\,dt - I_1(t)\,dt = \sigma_C\,dw(t),$$
$$d[CU_C(t)] + [gU_C(t) - I_{L_2}(t)]\,dt + I_2(t)\,dt = \sigma_C\,dw(t),\ 0 \le t \le T. \tag{23}$$

Припустимо, що у початковий момент часу $t = 0$ відомі значення

$$L_1 I_{L_1}(0) - L_2 I_{L_2}(0) = \xi_1,\quad CU_C(0) = \xi_2, \tag{24}$$

де ξ_1, ξ_2 — випадкові величини. Нехай ціль гри у системі (23), (24) полягає в одержанні такого значення напруги $U_C(t)$ у момент часу $t = T_0$ $(T_0 \in (0, T])$, що математичне сподівання його квадрата не перевищує $\delta \ge 0$, у класі допустимих струмів переслідувача $u(t) = I_1(t)$ за будь-якого допустимого струму втікача $v(t) = I_2(t)$.

Нехай $I_1(t),\ I_2(t) \in L_2(0,T;\ \Omega;\mathbf{R};F_t),\ \xi_1,\ \xi_2 \in H_2(\Omega;\mathbf{R};F_0)$. Уведемо позначення

$$A = \begin{pmatrix} L_1 & -L_2 & 0 \\ 0 & 0 & C \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} r_1 & -r_2 & -1 \\ 1 & 0 & g \\ 0 & -1 & g \end{pmatrix},\ f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$K_1^{tr} = (0\ \ 1\ \ 0),\ K_2^{tr} = (0\ \ 0\ \ -1),\ \xi^{tr} = (\xi_1\ \ \xi_2\ \ \xi_2),\ \sigma^{tr} = (\sigma_{L_1}\ \ -\sigma_{L_1}\ \ \sigma_C\ \ \sigma_C).$$

Тоді початкову задачу (23), (24) можна записати у вигляді (1), (2) відносно вектора станів $x(t)$ (22). Система (23), (24) є регулярною, оскільки існує резольвента

$$(\lambda A + B)^{-1} = \frac{1}{d_0(\lambda)} \begin{pmatrix} d_1(\lambda) & 1 + d_1(\lambda)\, d_3(\lambda) & -d_1(\lambda)\, d_3(\lambda) \\ -d_1(\lambda) & d_1(\lambda)\, d_2(\lambda) & -1 - d_1(\lambda)\, d_2(\lambda) \\ -1 & d_2(\lambda) & d_3(\lambda) \end{pmatrix},$$

$$\lambda \neq -a \pm \sqrt{a^2 - b}\,,$$

$$a = 0.5\,(C r_{12} + g L_{12})\, C^{-1} L_{12}^{-1},\ b = (g r_{12} + 1)\, C^{-1} L_{12}^{-1},\ r_{12} = r_1 + r_2\,,$$

$$L_{12} = L_1 + L_2\,,\ d_0(\lambda) = (\lambda C + g)(\lambda L_{12} + r_{12}) + 1,\ d_1(\lambda) = \lambda C + g,$$

$$d_{j+1}(\lambda) = \lambda L_j + r_j\,,\ j = 1, 2.$$

Неважко бачити, що умови (4)–(6) виконані. Тому для будь-яких вхідних струмів $I_1(t), I_2(t) \in L_2(0,T;\ \Omega;\mathbf{R};F_t)$ стан $x(t)$ (22) однозначно визначається в явному вигляді (7).

Гру в радіотехнічній системі (23), (24) можна інтерпретувати як гру в абстрактній системі (1), (2). Допустимі струми $u(t) = I_1(t) \in U_1$ (керування переслідувача) та $v(t) = I_2(t) \in V_1$ (керування втікача) задовольняють обмеження $\mathbf{M} I_j^2(t,\omega) \le \rho_j^2\ \ (\rho_j > 0)$. Динамічний вектор має вигляд

$$Ax(t) = (L_1 I_{L_1}(t) - L_2 I_{L_2}(t)\ \ CU_C(t)\ \ CU_C(t))^{tr}.$$

Проєкційна матриця $\operatorname{diag}\{0,0,1\}$ природно індукує ортопроєктор Π в $H_2(\Omega;\mathbf{R}^3)$ на підпростір $M_0^{\perp}$ в означенні термінальної множини M (10). Радіус кулі $M_1 \subset \Pi H_2(\Omega;\mathbf{R}^3)$ покладемо $d = \delta C$. Нехай $\varphi(t) = (0\ \ 0\ \ 1) e^{Dt} AI$. Знаходимо опорні функціонали (11):

$$\varphi_u(h) = \varphi_u(h_1, h_2, h_3) = \rho_1 \sqrt{\mathbf{M} h_3^2} \cdot \int_0^{T_0} |\varphi(T_0 - \tau) K_1|\, d\tau\,,$$

$$\varphi_v(h) = \rho_2 \sqrt{\mathbf{M} h_3^2} \cdot \int_0^{T_0} |\varphi(T_0 - \tau) K_2|\, d\tau\,.$$

Унаслідок теореми 1 гру в системі (23), (24) можна завершити у момент часу T_0 тоді і тільки тоді, коли для всіх $h_3 \in H_2(\Omega;\mathbf{R})$ з $\|h_3\|_{H_2} \le 1$ виконується нерівність

$$\sqrt{\mathbf{M}h_3^2}\cdot\int_0^{T_0}[\rho_2|\varphi(T_0-\tau)K_2|-\rho_1|\varphi(T_0-\tau)K_1|]\,d\tau+\mathbf{M}[h_3\zeta(T_0)]\le\delta C,$$

$$\zeta(t)=\varphi(t)\xi+\int_0^t\varphi(t-\tau)\sigma\,dw(\tau).$$

Якщо $\delta=0$, то ціль гри полягає в одержані значення напруги $U_C(T_0)=0$. Завершення цієї гри у момент часу T_0 еквівалентно виконуванню нерівності

$$\int_0^{T_0}[\rho_1|\varphi(T_0-\tau)K_1|-\rho_2|\,\varphi(T_0-\tau)K_2|]\,d\tau\ge\sqrt{\mathbf{M}\zeta^2(T_0)}=||\zeta(T_0)||_{H_2}.$$

Будуватимемо струм $I_1(t)$, що забезпечує переведення математичного сподівання квадрата напруги $U_C(T_0)$ у нуль за будь якого допустимого струму $I_2(t)$, за схемою доведення теореми 2. Нехай $L_1r_2=L_2r_1$, $L_1\rho_1\ge L_2\rho_2$. Умова $0\in Q(t,\tau,v)$ (14) виконана. Визначимо розв'язувальну функцію $\alpha(t,\tau,v)$ (16). Якщо $\zeta(t)\ne0$, $z(t)=\varphi(t)(0\ \ 1\ \ 1)^{tr}$, то

$$\alpha(t,\tau,v)=$$

$$=\frac{L_2z(t-\tau)\mathbf{M}\,[\zeta(t)v]+|\,z(t-\tau)|\sqrt{L_2^2\,\mathbf{M}^2\,[\zeta(t)v]+\mathbf{M}\zeta^2(t)\cdot(L_1^2\rho_1^2-L_2^2\,\mathbf{M}v^2)}}{L_{12}\mathbf{M}\zeta^2(t)}.$$

Унаслідок (17) моменти часу T_0, на яких завершується гра, задовольняють нерівність $(L_1\rho_1-L_2\rho_2)\int_0^{T_0}|\,z(T_0-\tau)|\,d\tau\ge L_{12}\sqrt{\mathbf{M}\zeta^2(T_0)}$. Для довільного допустимого керування втікача $v=I_2$ будуємо допустиме керування переслідувача $u=I_1$:

$$u(\tau)=u(\tau,\omega)=$$

$$=\begin{cases}L_1^{-1}L_2v(\tau)-L_1^{-1}L_{12}z^{-1}(T_0-\tau)\,\alpha(T_0,\tau,v(\tau))\,\zeta(T_0), & \tau\in[0,t_*)\\ L_1^{-1}L_2v(\tau), & \tau\in[t_*,T_0]\end{cases},\quad q(t_*)=1.$$

Зауважимо, що об'єктами застосування можуть бути будь-які дескрипторні системи керування, математичні моделі яких містять відповідні диференціально-алгебраїчні рівняння. Зокрема, під час перетворення відеоформатів у системах програмування [25] для врахування випадкових впливів та втрат якості внаслідок стиснення можуть бути корисними результати аналізу наведеної стохастичної гри.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Kushner H.J., Chamberlain S.G. On stochastic differential games: Sufficient conditions that a given strategy be a saddle point, and numerical procedures for the solution of the game. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1969. Vol. 26, Iss. 3. P. 560–575. https://doi.org/10.1016/0022-247X(69)90199-1.

2. Friedman A. Stochastic differential games. *Journal of Differential Equations*. 1972. Vol. 11, Iss. 1. P. 79–108. https://doi.org/10.1016/0022-0396(72)90082-4.

3. Zhou H., Zhu H., Zhang C. Linear quadratic Nash differential games of stochastic singular systems. *Journal of Systems Science and Information*. 2014. Vol. 2, Iss. 6. P. 553–560. https://doi.org/10.1515/JSSI-2014-0553.
4. Ramachandran K.M., Tsokos C.P. Stochastic differential games. Paris; Amsterdam; Beijing: Atlantis Press, 2012. 252 p.
5. Carmona R. Lectures on BSDEs, Stochastic control and stochastic differential games with financial applications. Philadelphia: SIAM, 2016. 263 p. http://doi.org/10.1137/1.9781611974249.
6. Liptser R.S., Shiryaev A.N. Statistics of random processes 1. General Theory. New York: Springer, 1977. 395 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-1665-8.
7. Fleming W., Rishel, R. Deterministic and stochastic optimal control. New York: Springer, 1975. 222 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-6380-7.
8. Vlasenko L.A., Rutkas A.G. Optimal control of a class of random distributed Sobolev type systems with aftereffect. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2013. Vol. 45, Iss. 9. P. 66–76. http://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v45.i9.60.
9. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Semenets V.V., Chikrii A.A. Stochastic optimal control of a descriptor system. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2020. Vol. 56, Iss. 2. P. 204–212. http://doi.org/10.1007/s10559-020-00236-7.
10. Shu Y., Li B. Expected value based optimal control for discrete-time stochastic noncausal systems. *Optimization Letters*. 2022. Vol. 16. P. 1847–1879. https://doi.org/10.1007/s11590-021-01807-z.
11. Ge Z. *GE*-semigroup method for controllability of stochastic descriptor linear systems. *Science China Information Sciences*. 2023. Vol. 66, Article number 139201. https://doi.org/10.1007/s11432-020-3288-x.
12. Starokozhev S., Tkach M., Hlushchenko A., Datsenko O., Chernyshov M., Chumak V. Optimization of the probability of transmission of flight data in the response channel of secondary radar systems. *IEEE 8th International Conference on Problems of Infocommunications, Science and Technology Kharkiv*, Ukraine. 2021. P. 511–515. https://doi.org/10.1109/PICST54195.2021.9772199.
13. Chang C., Xing S., Deng F. et al. Dissipative control for T–S Fuzzy stochastic descriptor biological economic systems with time-varying Delays. *International Journal of Fuzzy Systems*. 2022. Vol. 24. P. 1974–1985. https://doi.org/10.1007/s40815-022-01253-8.
14. Vlasenko L.A. Existence and uniqueness theorems for an implicit delay differential equation. *Differential Equations*. 2000. Vol. 36, N 5. P. 689–694. http://doi.org/10.1007/BF02754227.
15. Vlasenko L.A., Rutkas A.G. On a differential game in a system described by an implicit differential-operator equation. *Differential Equations*. 2015. Vol. 51, N 6. P. 798–807. http://doi.org/10.1134/S0012266115060117.
16. Hille E., Phillips R.S. Functional Analysis and Semi-Groups. Providence: American Mathematical Society, 1957. 808 p.
17. Balakrishnan A.V. Introduction to Optimization Theory in a Gilbert Space. Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo: Springer-Verlag, 1971. 157 p.
18. Chikrii A.A. Conflict-Controlled Processes. Dordrecht: Springer Science and Business Media, 2013. 424 p. http://doi.org/10.1007/978-94-017-1135-7.
19. Baranovskaya L. A method of resolving functions for one class of pursuit problems. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2015. Vol. 2, N 4. P. 4–8. https://doi.org/10.15587/1729-4061.2015.39355.
20. Cooper G.R., McGillem C.D. Probabilistic methods of signal and system snalysis. *The Oxford Series in Electrical and Computer Engineering.* 3rd Edition, 1998. 491 p.

21. Klyatskin V.I. Stochastic Equations: Theory and Applications in Acoustics, Hydrodynamics, Magnetohydrodynamics and Radiophysics. Vol. 1: Basic Concepts, Exact Results, and Asymptotic Approximations. Springer International Publishing, 2015. 418 p. https://doi.org/10.1007/978-3-319-07587-7.

22. Klyatskin V.I. Stochastic Equations: Theory and Applications in Acoustics, Hydrodynamics, Magnetohydrodynamics and Radiophysics. Vol. 2: Coherent Phenomena in Stochastic Dynamic Systems. Springer International Publishing, 2015. 491 p. https://doi/org/10.1007/978-3-319-07590-7.

23. Winkler R. Stochastic differential algebraic equations of index 1 and applications in circuit simulation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2003. Vol. 157. P. 477–505. https://doi.org/10.1016/S0377-0427(03)00436-9.

24. Kolářová E., Braněik L. Vector stochastic differential equations used to electrical networks with random parameters. *International Journal of Advances in Telecommunications, Electronics*, *Signals and Systems.* 2013. Vol. 2, N 1. P. 1–8. http://dx.doi.org/10.11601/ijates.v2i1.24.

25. Rutkas A.A. Using windows services technology for organizing video format converting in Microsoft Windows XP Media Center systems. *9th International Conference «The Experience of Designing and Applications of CAD Systems in Microelectronics»*, Lviv, Ukraine. 2007. P. 52–529. http://doi.org/10.1109/CADSM.2007.4297639.

L.A. Vlasenko, A.A. Rutkas, A.G. Rutkas, A.A. Chikrii

STOCHASTIC DESCRIPTOR PURSUITE GAME

Abstract. A differential pursuit game in a stochastic descriptor linear system is analyzed. The system dynamics is described by Ito's stochastic differential algebraic equation. Solutions of the equation are presented by the formula of variation of constants in terms of the initial data and control unit. Constraints on the support functionals of two sets defined by the behaviors of the pursuer and evader are used to obtain the game completion conditions. The method of resolving functions is applied to construct a pursuer control bringing the dynamic vector of the system to a terminal set. The results are illustrated by an example of a stochastic descriptor system that describes transient states in a radio technical filter with random perturbations in the form of white noise.

Keywords: stochastic differential algebraic equation, Wiener process, descriptor system, differential game, radio technical filter, white noise.

Надійшла до редакції 07.11.2023