

В.М. АБДУЛЛАЄВ

Азербайджанський державний університет нафти та промисловості; Інститут систем керування Міністерства науки та освіти Азербайджанської Республіки;
Західно-Каспійський університет, Баку, Азербайджан, e-mail: vagif_ab@yahoo.com.

В.А. ХАШИМОВ

Інститут систем керування Міністерства науки та освіти Азербайджанської Республіки, Баку, Азербайджан, e-mail: vugarhashimov@gmail.com.

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ТОЧКАМИ НАВАНТАЖУВАННЯ ТА ЇХНІМИ ФУНКЦІЯМИ РЕАКЦІЇ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Анотація. Розглянуто задачу оптимального керування точками навантажування та відповідними функціями реакції, яку описують навантаженим параболічним рівнянням. Отримано оптимальні умови для керувальних впливів. Формули градієнта цільового функціонала, що містяться в цих умовах, використано в алгоритмі числового розв'язання задачі керування рухом точок навантажування та відповідних функцій реакції на основі методів оптимізації першого порядку. Наведено результати числових експериментів.

Ключові слова: система з розподіленими параметрами, навантажене диференціальне рівняння, необхідна умова оптимальності, градієнт функціонала.

ВСТУП

Відомо, що стани багатьох об'єктів та процесів описуються навантаженими диференціальними рівняннями зі звичайними або частинними похідними [1–6]. Стан такого об'єкта в точках навантажування впливає на стан об'єкта в цілому, тому вибір оптимальних місць для точок навантажування та відповідних функцій реакції є важливим для функціонування об'єкта.

Аналогічні задачі оптимізації та оптимального керування постають під час проектування розміщення свердловин у водних, нафтових та газових родовищах, підприємств з урахуванням екології регіону та інших факторів. Ці математичні постановки виникають і на етапі експлуатації зазначених об'єктів для параметричної ідентифікації відповідних математичних моделей, призначених для керування цими об'єктами [7–13]. Навантажені початково-крайові задачі виникають і під час керування зі зворотним зв'язком об'єктами з розподіленими параметрами, в яких точками навантажування є місця, де встановлені точки вимірювання поточного стану об'єкта [14–20].

У зв'язку з цим останніми роками посилюється інтерес до задач оптимального керування об'єктами з розподіленими параметрами, що описуються різними типами навантажених диференціальних рівнянь з частинними похідними та початково-крайових умов [1, 3]. Проведено численні дослідження навантажених диференціальних рівнянь різних типів як з погляду існування та єдиності їхніх розв'язків [1, 21, 22], розроблення числових методів їхнього розв'язання [23–25], так і з погляду оптимального керування процесами, що описуються відповідними початково-крайовими задачами [2, 5, 16–20]. У всіх зазначених дослідженнях було задано [1–3, 5, 16–26] або оптимізовано [6] розташування точок навантажування, але випадок зміни їхнього місцезнаходження в часі, і ба більше, керування цією зміною, ніхто не розглядав. У цій роботі розглянуто випадок навантаженої початково-крайової задачі параболічного типу, коли координати точок навантажування змінюються в часі під дією керувальних впливів та описуються системами звичайних диференціальних рівнянь.

Отримано необхідні умови оптимальності дії керувальних впливів на переміщення точок навантажування та відповідних функцій реакції. З використанням формул градієнта цільового функціонала, що містяться в цих умовах, застосовано числові методи оптимізації першого порядку для числового розв'язання задачі. З урахуванням того, що точки навантажування переміщуються, запропоновано схему скінченнорізницевої інтегро-інтерполяційної апроксимації навантаженої початково-крайової задачі.

У роботі наведено результати числового розв'язання модельної задачі з оптимізації параметрів навантаженої системи.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо задачу оптимального керування точками навантажування та відповідними функціями реакції, яку описують таким двовимірним параболічним рівнянням:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = Lu(x, t) + \sum_{s=1}^n q_s(t) N(\xi_s(t)) u(x, t) + F(x, t), \quad x \in [0, l], \quad t \in (t_0, t_f], \quad (1)$$

з початковими та крайовими умовами

$$u(x, t_0) = \varphi_0(x), \quad x \in [0, l], \quad (2)$$

$$u(0, t) = \chi_1(t), \quad \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = \chi_2(t), \quad t \in [t_0, t_f]. \quad (3)$$

Тут $u(x, t)$ — майже скрізь неперервно диференційовна за $t \in (t_0, t_f]$ та двічі неперервно диференційовна за $x \in (0, l)$ функція, яка визначає фазовий стан досліджуваного процесу; t_0, t_f — час початку і завершення процесу відповідно; неперервні функції $\varphi_0(x)$, $\chi_1(t)$, $\chi_2(t)$ є заданими. Оптимізовані кусково неперервні функції $q_s(t)$, $s=1, 2, \dots, n$, які визначають реакції у точках навантажування, повинні задовольняти такі умови:

$$\underline{q}_s \leq q_s(t) \leq \bar{q}_s, \quad t \in [t_0, t_f], \quad s=1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

n — задана кількість точок навантажування.

Припустимо, що початкова та крайова умови на лівому кінці задовольняють умову узгодження

$$\chi_1(t_0) = \varphi_0(0). \quad (5)$$

Оператор L та оператор навантажування $N(\cdot)$ визначено у такий спосіб:

$$Lu(x, t) = a_0^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + a_1 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + a_2 u(x, t), \quad x \in [0, l], \quad t \in (t_0, t_f], \quad (6)$$

$$N(\xi)u(x, t) = u(\xi, t). \quad (7)$$

Координати точок навантажування $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t))$ є керованими та описуються диференціальними рівняннями

$$\frac{d\xi_s(t)}{dt} = f_s(\xi_s(t), \vartheta_s(t), t), \quad t \in (t_0, t_f], \quad s=1, 2, \dots, n, \quad (8)$$

з початковими умовами

$$\xi_s(t_0) = \xi_s^0 \in (0, l), \quad s=1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

Тут задані функції $f_s(\cdot, \cdot, t)$, $s=1, 2, \dots, n$, є неперервно диференційовними за першими двома аргументами та кусково неперервними за t і визначають за-

кон руху точок навантажування. Кусково неперервні функції $\vartheta_s(t)$ є керувальними впливами на рух точок навантажування $\xi_s(t)$, $s=1, 2, \dots, n$. Точки навантажування повинні задовольняти природні умови

$$0 < a_s \leq \xi_s(t) \leq b_s < l, \quad t \in (t_0, t_f], \quad s=1, 2, \dots, n,$$

які, як нескладно показати, можна звести до такого вигляду:

$$g_s(t) = \frac{b_s - a_s}{2} - \left| \xi_s(t) - \frac{b_s + a_s}{2} \right| \geq 0, \quad t \in (t_0, t_f], \quad s=1, 2, \dots, n.$$

Нехай на керування накладено такі позиційні обмеження:

$$\underline{\vartheta}_s \leq \vartheta_s(t) \leq \bar{\vartheta}_s, \quad t \in (t_0, t_f], \quad s=1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

Розглядувана задача полягає у знаходженні оптимальних керувальних впливів $q = q(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t))$ та $\vartheta = \vartheta(t) = (\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \dots, \vartheta_n(t))$, які разом з відповідним фазовим станом $u(x, t)$ забезпечують мінімальне значення функціонала

$$J(q, \vartheta) = \int_0^l \mu(x) [u(x, t_f; q, \vartheta) - U(x)]^2 dx + \\ + \mu_1 \|q(t)\|_{L_2^n[t_0, t_f]}^2 + \mu_2 \|\vartheta(t)\|_{L_2^n[t_0, t_f]}^2. \quad (11)$$

Тут кусково неперервна функція $U(x)$, $x \in [0, l]$, визначає бажаний кінцевий стан процесу; вагова функція $\mu(x)$ та параметри μ_1 , μ_2 є заданими.

Основна особливість задачі (1)–(11) полягає у тому, що, по-перше, диференціальне рівняння (1) є навантаженим [1, 3], і, по-друге, координати точок навантажування змінюються в часі під дією керувальних впливів та є розв'язком системи диференціальних рівнянь (8) з початковими умовами (9). Ще однією особливістю задачі є неопуклість функціонала задачі, зумовлена другим членом правої частини диференціального рівняння (1).

У цій роботі зроблено припущення про те, що виконано умови існування, єдиності та стійкості розв'язку початково-крайової задачі (1)–(3) та задачі Коші (8), (9) для всіх допустимих функцій реакції $q_s(t)$, траєкторій руху точок навантажування $\xi_s(t)$ та керувань $\vartheta_s(t)$, $s=1, 2, \dots, n$.

Як відомо, складність задач оптимального керування як з погляду теоретичних досліджень, так і з погляду їхнього розв'язання числовими методами зумовлена наявністю фазових обмежень. Для вивчення та розв'язання розглянутої задачі застосовано метод штрафних функцій. Для мінімізації замість функціонала (11) використано зовнішній штрафний функціонал

$$\hat{J}(q, \vartheta; r) = J(q, \vartheta) + rG(t; \xi(t)), \quad G(t; \xi(t)) = \sum_{s=1}^n \int_{t_0}^{t_f} [\min(0, g_s(t))]^2 dt, \quad (12)$$

де $r > 0$ — додатний коефіцієнт штрафу, що прямує до $+\infty$.

Зауважимо, що замість штрафної функції (12) можна використовувати точну штрафну функцію [27, 28]. У цьому випадку не потрібно, щоб параметр штрафу r прямував до $+\infty$. Тоді для мінімізації негладкої штрафної функції можна застосувати будь-яку версію r -алгоритму [27–29].

НЕОБХІДНІ УМОВИ ОПТИМАЛЬНОСТІ У ЗАДАЧІ (1)–(12)

Насамперед доведемо диференційовність цільового функціонала (11) для кожного заданого значення коефіцієнта штрафу. Для цього скористаємося мето-

дом оцінювання приросту функціонала, зумовленого приростом оптимізованих параметрів. Уведемо такі позначення відтинково неперервних функцій:

$$f(x^-) = f(x-0), \quad f(x^+) = f(x+0).$$

Теорема 1. За умов, накладених на функції, які фігурують у задачі (1)–(3), штрафний функціонал задачі (12) для заданого коефіцієнта штрафу $r \in \mathbb{R}$ диференційовним, а його градієнти визначаються такими формулами:

$$\frac{\partial \hat{J}(q, \vartheta; r)}{\partial q_s} = -u(\xi_s(t), t) \int_0^l \psi(x, t) dx + 2\mu_1 q_s(t), \quad t \in (t_0, t_f], \quad s = 1, 2, \dots, n, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \hat{J}(q, \vartheta; r)}{\partial \vartheta_s} = -\varphi_s(t) \frac{\partial f_s(\xi_s(t), \vartheta_s(t), t)}{\partial \vartheta_s} + 2\mu_2 \vartheta_s(t), \quad t \in (t_0, t_f], \quad s = 1, 2, \dots, n. \quad (14)$$

Тут функція $\psi(x, t)$ є неперервною за $x \in [0, l]$, неперервно диференційовною за $t \in [t_0, t_f]$, майже скрізь двічі диференційовною за $x \in [0, l]$, за винятком точок $\xi_s \in [0, l]$, $s = 1, 2, \dots, n$, і є розв'язком спряженої початково-крайової задачі

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -a_0^2 \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + a_1 \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} - a_2 \psi(x, t), \quad x \in [0, l], \quad t \in (t_0, t_f], \quad (15)$$

$$\psi(x, t_f) = -2\mu(x)[u(x, t_f) - U(x)], \quad x \in [0, l], \quad (16)$$

$$\psi(0, t) = 0, \quad a_0^2 \frac{\partial \psi(l, t)}{\partial x} = a_1 \psi(l, t), \quad t \in [t_0, t_f], \quad (17)$$

у точках ξ_s , $s = 1, 2, \dots, n$, для $t \in [t_0, t_f]$ ця функція має задовольняти умови

$$\psi_x(\xi_s^-, t) = \psi_x(\xi_s^+, t) - \frac{q_s(t)}{a_0^2} \int_0^l \psi(x, t) dx, \quad s = 1, 2, \dots, n, \quad (18)$$

функції $\varphi_s(t)$, $s = 1, 2, \dots, n$, є неперервно диференційовними та є розв'язками таких спряжених задач Коші:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_s(t)}{dt} = & -\varphi_s(t) \frac{\partial f_s(\xi_s(t), \vartheta_s(t), t)}{\partial \xi_s} - q_s(t) N(\xi_s(t)) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \int_0^l \psi(\gamma, t) d\gamma + \\ & + r \min \left(0, -2 \operatorname{sgn} \left(\xi_s(t) - \frac{b_s + a_s}{2} \right) \left(\frac{b_s - a_s}{2} - \left| \xi_s(t) - \frac{b_s + a_s}{2} \right| \right) \right), \end{aligned} \quad (19)$$

$$t \in (t_0, t_f], \quad s = 1, 2, \dots, n,$$

$$\varphi_s(t_f) = 0, \quad s = 1, 2, \dots, n. \quad (20)$$

Доведення. Нехай для заданого значення $r > 0$ функція $u(x, t) = u(x, t; q, \xi)$ та вектор-функція $\xi(t; \vartheta) = (\xi_1(t; \vartheta_1), \xi_2(t; \vartheta_2), \dots, \xi_n(t; \vartheta_n))$ є відповідно розв'язками початково-крайової задачі (1)–(3) та задачі Коші (8), (9) для заданих допустимих значень $q(t)$, $\vartheta(t)$, а функції $\tilde{u}(x, t) = \tilde{u}(x, t; \tilde{q}, \tilde{\xi})$, $\tilde{\xi}(t; \tilde{\vartheta}) = (\tilde{\xi}_1(t; \tilde{\vartheta}_1), \dots, \tilde{\xi}_n(t; \tilde{\vartheta}_n))$ є розв'язками задач (1)–(3) та (8), (9) для прирощених допустимих значень функцій $\tilde{q}(t)$, $\tilde{\vartheta}(t)$. Скористаємося такими позначеннями:

$$\tilde{q}(t) = q(t) + \Delta q(t), \quad \tilde{\vartheta}(t) = \vartheta(t) + \Delta \vartheta(t),$$

$$\tilde{u}(x, t) = u(x, t) + \Delta u(x, t), \quad \tilde{\xi}(t) = \xi(t) + \Delta \xi(t).$$

Нескладно показати, що $\Delta u(x, t)$ та $\Delta \xi(t)$ з точністю до членів першого порядку малості є відповідно розв'язками початково-крайової задачі

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta u(x, t)}{\partial t} = & L \Delta u(x, t) + \sum_{s=1}^n q_s(t) N(\xi_s(t)) (\Delta u(x, t) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Delta \xi_s(t)) + \\ & + \sum_{s=1}^n \Delta q_s(t) N(\xi_s(t)) u(x, t), \quad x \in [0, l], \quad t \in (t_0, t_f], \end{aligned} \quad (21)$$

$$\Delta u(x, t_0) = 0, \quad x \in [0, l], \quad (22)$$

$$\Delta u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial \Delta u(l, t)}{\partial x} = 0, \quad t \in [t_0, t_f], \quad (23)$$

та задачі Коші

$$\frac{d \Delta \xi_s(t)}{dt} = \frac{\partial f_s(\xi_s(t), \vartheta_s(t), t)}{\partial \xi_s} \Delta \xi_s(t) + \frac{\partial f_s(\xi_s(t), \vartheta_s(t), t)}{\partial \vartheta_s} \Delta \vartheta_s(t), \quad (24)$$

$$t \in (t_0, t_f], \quad s = 1, 2, \dots, n,$$

$$\Delta \xi_s(t_0) = 0, \quad s = 1, 2, \dots, n. \quad (25)$$

У (21) використано формулу Лагранжа з точністю до членів першого порядку малості:

$$\Delta u(\xi_s(t), t) = \tilde{u}(\xi_s(t) + \Delta \xi_s(t), t) - u(\xi_s(t), t) - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=\xi_s(t)} \Delta \xi_s(t) + O((\Delta \xi_s(t))^2).$$

Беручи до уваги властивості стійкості крайових задач, описаних параболічними рівняннями, і задач Коші відносно правої частини звичайних диференціальних рівнянь, членами другого порядку малості у (21) та (24) можна знехтувати:

$$\|\Delta u(x, t)\|_{L_2^n[t_0, t_f]}^2 \leq M_1 \|\Delta q(t)\|_{L_2^n[t_0, t_f]}^2 + M_2 \|\Delta \xi(t)\|_{L_2^n[t_0, t_f]}^2, \quad (26)$$

$$\|\Delta \xi(t)\|_{L_2^n[t_0, t_f]}^2 \leq M_3 \|\Delta \vartheta(t)\|_{L_2^n[t_0, t_f]}^2. \quad (27)$$

Оцінимо приріст цільового функціонала, отриманий за рахунок приросту оптимізованих функцій:

$$\begin{aligned} \Delta \hat{J}(q, \vartheta; r) &= \Delta J(q, \vartheta; r) + r \Delta G(t; \xi(t)) = \\ &= J(q + \Delta q, \vartheta + \Delta \vartheta) - J(q, \vartheta) + r(G(t; \xi(t) + \Delta \xi(t)) - G(t; \xi(t))), \quad (28) \\ \Delta J(q, \vartheta) &= 2 \int_0^l \mu(x) [u(x, t_f) - U(x)] \Delta u(x, t_f) dx + \\ &+ 2\mu_1 \int_{t_0}^{t_f} q(t) \Delta q(t) dt + 2\mu_2 \int_{t_0}^{t_f} \vartheta(t) \Delta \vartheta(t) dt + \\ &+ O(\|\Delta u(x, t_f)\|_{L_2[0, l]}^2) + O(\|\Delta q(t)\|_{L_2^n[t_0, t_f]}^2) + O(\|\Delta \vartheta(t)\|_{L_2^n[t_0, t_f]}^2), \\ \Delta G(t; \xi(t)) &= G(t; \xi(t) + \Delta \xi(t)) - G(t; \xi(t)) = \\ &= \sum_{s=1}^n \int_{t_0}^{t_f} \left[\min \left(0, \frac{b_s - a_s}{2} - \left| \xi_s(t) + \Delta \xi_s(t) - \frac{b_s + a_s}{2} \right| \right) \right]^2 dt - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{s=1}^n \int_{t_0}^{t_f} \left[\min \left(0, \frac{b_s - a_s}{2} - \left| \xi_s(t) - \frac{b_s + a_s}{2} \right| \right) \right]^2 dt = \\
& = \sum_{s=1}^n \int_{t_0}^{t_f} \min \left(0, -2 \operatorname{sgn} \left(\xi_s(t) - \frac{b_s + a_s}{2} \right) \left(\frac{b_s - a_s}{2} - \left| \xi_s(t) - \frac{b_s + a_s}{2} \right| \right) \right) \Delta \xi_s(t) dt + \\
& \quad + O(\|\Delta \xi(t)\|_{L_2^n[t_0, t_f]}^2).
\end{aligned}$$

Перенесемо всі члени рівняння (21) вліво та помножимо обидві частини отриманої рівності на функцію $\psi(x, t)$ — поки що довільну, неперервну за $x \in [0, l]$, неперервно диференційовну за $t \in [t_0, t_f]$, майже скрізь двічі неперервно диференційовну за $x \in [0, l]$, крім точок $\xi_s \in [0, l]$, $s = 1, 2, \dots, n$.

Аналогічно перенесемо всі члени рівнянь (24) вліво та помножимо обидві частини отриманих рівностей на поки що довільні функції $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, з класу функцій, неперервно диференційовних за $t \in [t_0, t_f]$. Проінтегрувавши ліві частини отриманих рівностей, які дорівнюють нулю, за $x \in [0, l]$ та $t \in [t_0, t_f]$ і підсумувавши отримані співвідношення з (28), матимемо

$$\begin{aligned}
\Delta \hat{J}(q, \vartheta; r) = & 2 \int_0^l \mu(x) [u(x, t_f) - U(x)] \Delta u(x, t_f) dx + \\
& + 2\mu_1 \int_{t_0}^{t_f} q(t) \Delta q(t) dt + 2\mu_2 \int_{t_0}^{t_f} \vartheta(t) \Delta \vartheta(t) dt + \\
& + r \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^{t_f} \min \left(0, -2 \operatorname{sgn} \left(\xi_i(t) - \frac{b_i + a_i}{2} \right) \left(\frac{b_i - a_i}{2} - \left| \xi_i(t) - \frac{b_i + a_i}{2} \right| \right) \right) \Delta \xi_i(t) dt + \\
& + \int_0^l \int_{t_0}^{t_f} \psi(\gamma, t) \left[\frac{\partial \Delta u(x, t)}{\partial t} - L \Delta u(x, t) - \sum_{i=1}^n q_i(t) \left(\Delta u(x, t) + \frac{\partial u(\xi_i(t), t)}{\partial x} \Delta \xi_i(t) \right) - \right. \\
& - \sum_{i=1}^n \Delta q_i(t) u(\xi_i(t), t) \left. \right] dt dx + \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^{t_f} \varphi_i(t) \left(\frac{d \Delta \xi_i(t)}{dt} - \frac{\partial f_i(\xi_i(t), \vartheta_i(t), t)}{\partial \xi_i} \Delta \xi_i(t) - \right. \\
& - \frac{\partial f_i(\xi_i(t), \vartheta_i(t), t)}{\partial \vartheta_i} \Delta \vartheta_i(t) \left. \right) dt + O(\|\Delta u(x, t_f)\|_{L_2[0, l]}^2) + \\
& + O(\|\Delta q(t)\|_{L_2^n[t_0, t_f]}^2) + O(\|\Delta \vartheta(t)\|_{L_2^n[t_0, t_f]}^2) + O(\|\Delta \xi(t)\|_{L_2^n[t_0, t_f]}^2).
\end{aligned}$$

Після проведення простих обчислень (інтегрування частинами, групування), отримуємо

$$\begin{aligned}
\Delta \hat{J}(q, \vartheta; r) = & 2\mu_1 \sum_{s=1}^n \int_{t_0}^{t_f} q_s(t) \Delta q_s(t) dt + 2\mu_2 \sum_{s=1}^n \int_{t_0}^{t_f} \vartheta_s(t) \Delta \vartheta_s(t) dt + \\
& + \int_0^l (\psi(x, t_f) + 2\mu(x) [u(x, t_f) - U(x)]) \Delta u(x, t_f) dx + \\
& + r \sum_{s=1}^n \int_{t_0}^{t_f} \min \left(0, -2 \operatorname{sgn} \left(\xi_s(t) - \frac{b_s + a_s}{2} \right) \left(\frac{b_s - a_s}{2} - \left| \xi_s(t) - \frac{b_s + a_s}{2} \right| \right) \right) \Delta \xi_s(t) dt + \\
& + \int_{t_0}^{t_f} (a_0^2 \psi_x(l, t) - a_1 \psi(l, t)) \Delta u(l, t) dt + a_0^2 \int_{t_0}^{t_f} \psi(0, t) \Delta u_x(0, t) dt +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^l \int_{t_0}^{t_f} \left(-\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} - a_0^2 \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + a_1 \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} - a_2 \psi(x, t) \right) \Delta u(x, t) dt dx + \\
& + a_0^2 \sum_{s=1}^n \int_{t_0}^{t_f} \left[\psi_x(\xi_s^-, t) - \psi_x(\xi_s^+, t) + \frac{q_s(t)}{a_0^2} \int_0^l \psi(x, t) dx \right] \Delta u(\xi_s, t) dt - \\
& - a_0^2 \sum_{s=1}^n \int_{t_0}^{t_f} [(\psi(\xi_s^+, t) - \psi(\xi_s^-, t))] \Delta u_x(\xi_s, t) dt - \sum_{s=1}^n \int_0^l \int_{t_0}^{t_f} \psi(x, t) \Delta q_s(t) u(\xi_s(t), t) dt dx - \\
& - \sum_{s=1}^n \int_0^l \int_{t_0}^{t_f} \psi(x, t) q_s(t) \frac{\partial u(\xi_s(t), t)}{\partial x} \Delta \xi_s(t) dt dx + \sum_{s=1}^n \varphi_s(t_f) \xi_s(t_f) + \\
& + \sum_{s=1}^n \int_{t_0}^{t_f} \left(-\frac{d\varphi_s(t)}{dt} \Delta \xi_s(t) - \varphi_s(t) \frac{\partial f_s(\xi_s(t), \vartheta_s(t), t)}{\partial \xi_s} \Delta \xi_s(t) - \right. \\
& \left. - \varphi_s(t) \frac{\partial f_s(\xi_s(t), \vartheta_s(t), t)}{\partial \vartheta_s} \Delta \vartheta_s(t) \right) dt + O(\|\Delta u(x, t_f)\|_{L_2[0, l]}^2) + \\
& + O(\|\Delta q(t)\|_{L_2^n[t_0, t_f]}^2) + O(\|\Delta \vartheta(t)\|_{L_2^n[t_0, t_f]}^2) + O(\|\Delta \xi(t)\|_{L_2^n[t_0, t_f]}^2), \quad (29)
\end{aligned}$$

де $O(\|\Delta \xi(t)\|_{L_2^n[t_0, t_f]}^2)$, $O(\|\Delta q(t)\|_{L_2^n[t_0, t_f]}^2)$, $O(\|\Delta \vartheta(t)\|_{L_2^n[t_0, t_f]}^2)$ та $O(\|\Delta u(x, t_f)\|_{L_2[0, l]}^2)$ є малими величинами другого порядку відносно $\Delta \xi(t)$, $\Delta q(t)$, $\Delta \vartheta(t)$, $t \in (t_0, t_f]$ та $\Delta u(x, t_f)$, $x \in [0, l]$.

Оскільки функції $\psi(x, t)$, $\varphi_s(t)$, $s = 1, 2, \dots, n$, є довільними, вимагатимемо, щоб вони були розв'язками початково-крайової задачі (15)–(18) та задач Коші (19)–(20).

Врахуємо оцінки (26), (27), тоді з (29) випливає, що функціонал є диференційовним, а з умов (22), (23), (26) для компонент вектор-градієнта цільового функціонала, які є лінійними частинами приросту функціонала за відповідними оптимізованими параметрами, отримуємо формули (13), (14).

Тепер нескладно сформулювати необхідні умови оптимальності для функцій $q(t)$ та $\vartheta(t)$ відносно штрафного функціонала у такій варіаційній формі.

Теорема 2. Нехай $q^*(t)$, $\vartheta^*(t)$ задовольняють умови задачі (1)–(3), (8) і (9) і для заданих значень r забезпечують мінімум функціонала (12). Тоді для довільних допустимих параметрів $q(t)$, $\vartheta(t)$, що задовольняють умови (4) і (10), справджується така нерівність:

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=1}^n \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial \hat{J}(q^*(t), \vartheta^*(t); r)}{\partial q_s} (q_s(t) - q_s^*(t)) \right] dt + \sum_{s=1}^n \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial \hat{J}(q^*(t), \vartheta^*(t); r)}{\partial \vartheta_s} (\vartheta_s(t) - \vartheta_s^*(t)) \right] dt = \\
& = \sum_{s=1}^n \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(-u(\xi_s(t), t; \vartheta_s^*(t)) \int_0^l \psi(x, t; q_s^*(t)) dx + 2\mu_1 q_s^*(t) \right) (q_s(t) - q_s^*(t)) \right] dt + \\
& + \sum_{s=1}^n \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(-\varphi_s(t; \vartheta_s^*(t)) \frac{\partial f_s(\xi_s(t), \vartheta_s(t), t)}{\partial \vartheta_s} \Big|_{\vartheta_s(t)=\vartheta_s^*(t)} + 2\mu_2 \vartheta_s^*(t) \right) (\vartheta_s(t) - \vartheta_s^*(t)) \right] dt \geq 0.
\end{aligned}$$

ЧИСЛОВА СХЕМА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ (1)–(12)

Для числового розв'язання розглянутої задачі керування точками навантаження запропоновано застосувати метод проєкції градієнта штрафного функціонала на обмеження (4), (10), накладені на оптимізовні функції $q(t)$, $\vartheta(t)$. Ітераційну процедуру побудовано у такий спосіб [30]:

$$\begin{pmatrix} q(t) \\ \vartheta(t) \end{pmatrix}^{k+1} = P_{(4),(10)} \left[\begin{pmatrix} q(t) \\ \vartheta(t) \end{pmatrix}^k - \alpha_k \text{grad } \hat{J}(q^k(t), \vartheta^k(t), r) \right], \quad k = 0, 1, \dots \quad (30)$$

Тут $P_{(4),(10)}[\cdot]$ — оператор проєктування на допустиму область значень оптимізовних функцій. З урахуванням того, що ця область є відрізком, оператор проєктування на нього має конструктивний характер [30]. Крок $\alpha_k \geq 0$ у напрямку антиградієнта можна визначити, наприклад, будь-яким методом одновимірної мінімізації з такої умови:

$$\alpha_k = \arg \min_{\alpha \geq 0} \hat{J} \left(P_{(4),(10)} \left[\begin{pmatrix} q(t) \\ \vartheta(t) \end{pmatrix}^k - \alpha \text{grad } \hat{J}(q^k(t), \vartheta^k(t), r) \right] \right).$$

Як початкове наближення $(q(t), \vartheta(t))^0$ можна призначити довільні функції, зокрема зі значеннями, що задовольняють обмеження (4), (10). Градієнт штрафного функціонала визначається формулами, наведеними в теоремі 1.

Для числового розв'язання прямої початково-крайової задачі відносно навантаженого диференціального рівняння (1)–(3) та спряженої задачі (15)–(18) використано інтегро-інтерполяційну схему методу сіток (скінченнорізницевої апроксимації) [29].

Уведемо на відрізках $[0, l]$, $[t_0, t_f]$ вузлові точки $x_i = ih_x$, $i = 0, 1, \dots, N_x$, $h_x = l / N_x$, $t_j = jh_t$, $j = 0, 1, \dots, N_t$, $h_t = (t_f - t_0) / N_t$, $h_x \leq l - b_s$, $s = 1, 2, \dots, n$, та позначення $\omega = \{x_0, x_1, \dots, x_{N_x}\}$, $u_i^j = u(x_i, t_j)$, $u_i = u(x_i, t)$, $F_i^j = F(x_i, t_j)$, $i = 1, 2, \dots, N_x - 1$, $j = 1, 2, \dots, N_t$, $\varphi_{0,i} = u(x_i, t_0)$, $i = 0, 1, \dots, N_x$, $\chi_1^j = \chi_1(t_j)$, $\chi_2^j = \chi_2(t_j)$, $j = 1, 2, \dots, N_t$.

Для апроксимації початково-крайової задачі у вузлових точках сіткової області використано такі схеми [31]:

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{(x_i, t_j)} = \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{h_t} + O(h_t), \quad \left. \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right|_{(x_i, t_j)} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h_x^2} + O(h_x^2). \quad (31)$$

Для апроксимації оператора $N(\xi)$ застосовано схему

$$\xi = \xi(t) \in (x_{\gamma_\xi}, x_{\gamma_\xi+1}], \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \hat{N}(\xi)u(x, t) = & \frac{(\xi - x_{\gamma_\xi+1})(\xi - x_{\gamma_\xi+2})}{2h_x^2} u_{\gamma_\xi}(t) + \frac{(\xi - x_{\gamma_\xi})(x_{\gamma_\xi+2} - \xi)}{h_x^2} u_{\gamma_\xi+1}(t) + \\ & + \frac{(\xi - x_{\gamma_\xi})(\xi - x_{\gamma_\xi+1})}{2h_x^2} u_{\gamma_\xi+2}(t), \quad t \in (t_0, t_f], \quad \xi \in (x_{\gamma_\xi}, x_{\gamma_\xi+1}], \end{aligned} \quad (33)$$

що, як нескладно показати, має порядок точності $O(h_x^2)$, тобто

$$|\hat{N}(\xi)u(x, t) - N(\xi)u(x, t)| \leq M h_x^2, \quad t \in (t_0, t_f]. \quad (34)$$

Для розв'язання початково-крайової задачі (1)–(3) для кожних заданих векторів $q(t)$, $\xi(t)$ використано скінченнорізницеву апроксимацію на основі неявної

схеми апроксимації оператора $Lu(x, t)$, а для оператора навантажування $N(\xi)u(x, t)$ — апроксимацію (33) ([23–25, 31]):

$$\begin{aligned}
u_i^0 &= \varphi_{0,i}, \quad 0 \leq i \leq N_x, \quad u_0^j = \chi_1^j, \quad j > 0, \\
u_{N_x}^j &= Eu_{N_x-1}^j + \sum_{s=1}^n q_s^j (D_{\gamma_{\xi_s}}^0 u_{\gamma_{\xi_s}}^j + D_{\gamma_{\xi_s}}^1 u_{\gamma_{\xi_s}+1}^j + D_{\gamma_{\xi_s}}^2 u_{\gamma_{\xi_s}+2}^j) + \\
&\quad + Cu_{N_x}^{j-1} + h_t CF_{N_x}^{j-1} + H\chi_2^j, \quad j \geq 1, \\
E &= \left(\frac{2a_0^2 h_t}{h_x^2} \right) \left(1 + \frac{2a_0^2 h_t}{h_x^2} - a_2 h_t \right)^{-1}, \quad H = \left(a_1^2 h_t - \frac{2a_0^2 h_t}{h_x} \right) \left(1 + \frac{2a_0^2 h_t}{h_x^2} - a_2 h_t \right)^{-1}, \\
u_i^j &= Au_{i-1}^j + Bu_{i+1}^j + \sum_{s=1}^n q_s^j (D_{\gamma_{\xi_s}}^0 u_{\gamma_{\xi_s}}^j + D_{\gamma_{\xi_s}}^1 u_{\gamma_{\xi_s}+1}^j + D_{\gamma_{\xi_s}}^2 u_{\gamma_{\xi_s}+2}^j) + \\
&\quad + Cu_i^{j-1} + h_t CF_i^{j-1}, \\
A &= \left(\frac{a_0^2 h_t}{h_x^2} - \frac{a_1 h_t}{2h_x} \right) \left(1 + \frac{2a_0^2 h_t}{h_x^2} - a_2 h_t \right)^{-1}, \quad B = \left(\frac{a_0^2 h_t}{h_x^2} + \frac{a_1 h_t}{2h_x} \right) \left(1 + \frac{2a_0^2 h_t}{h_x^2} - a_2 h_t \right)^{-1}, \\
C &= \left(1 + \frac{2a_0^2 h_t}{h_x^2} - a_2 h_t \right)^{-1}, \quad D_{\gamma_{\xi_s}}^0 = \frac{(\xi_s - x_{\gamma_{\xi_s}+1})(\xi_s - x_{\gamma_{\xi_s}+2})}{2h_x^2} \left(1 + \frac{2a_0^2 h_t}{h_x^2} - a_2 h_t \right)^{-1}, \\
D_{\gamma_{\xi_s}}^1 &= \frac{(\xi_s - x_{\gamma_{\xi_s}})(x_{\gamma_{\xi_s}+2} - \xi_s)}{h_x^2} \left(1 + \frac{2a_0^2 h_t}{h_x^2} - a_2 h_t \right)^{-1}, \\
D_{\gamma_{\xi_s}}^2 &= \frac{(\xi_s - x_{\gamma_{\xi_s}})(\xi_s - x_{\gamma_{\xi_s}+1})}{2h_x^2} \left(1 + \frac{2a_0^2 h_t}{h_x^2} - a_2 h_t \right)^{-1}, \quad 0 < i < N_x, \quad j \geq 1.
\end{aligned}$$

З урахуванням [31] похибка такої апроксимації задачі (1)–(3) становить $O(h_t + h_x^2)$. Для розв'язання задачі Коші (8), (9) для заданої керувальної вектор-функції $\vartheta(t)$ використано метод Рунге–Кутти четвертого порядку.

Аналогічні схеми скінченнорізницевої апроксимації застосовано для розв'язання спряжених початково-крайової задачі (15)–(18) та задачі Коші (19), (20).

Для розв'язання сіткових початково-крайових прямої та спряженої задач для заданих функцій $q(t)$, $\xi(t)$ та з урахуванням особливостей сіткових різнице-вих систем рівнянь на кожному часовому шарі $t = t_j$, застосовано спеціальні числові методи, запропоновані у [24, 31, 32].

Представимо результати числових експериментів, отримані під час розв'язання наведеної нижче задачі оптимального керування.

Розглянемо задачу керування, яка описується такою початково-крайовою задачею відносно навантаженого диференціального рівняння параболічного типу:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + q_1(t)u(\xi_1(t), t) + q_2(t)u(\xi_2(t), t) + 0.1 \sin^2(4\pi x)(t + 0.1),$$

$$x \in [0, 1], \quad t \in (0, 1],$$

$$u(x, 0) = 0.2 \sin^2(2\pi x^3), \quad x \in [0, 1],$$

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = 0, \quad t \in [0, 1].$$

На керувальні функції реакції накладено обмеження:

$$-2.3 \leq q_i(t) \leq 2.3, \quad t \in [0, 1], \quad i = 1, 2.$$

Керовані рухи двох точок навантажування описуються такими задачами Коші:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_1(t)}{dt} &= 2\xi_1(t) + \vartheta_1(t), \quad \frac{d\xi_2(t)}{dt} = -3\xi_2(t) + \vartheta_2(t), \quad t \in (0, 1], \\ \xi_1(0) &= 0.36, \quad \xi_2(0) = 0.62, \end{aligned}$$

з обмеженнями

$$\begin{aligned} 0.05 &\leq \xi_i(t) \leq 0.95, \quad t \in (0, 1], \quad i = 1, 2, \\ -1 &\leq \vartheta_i(t) \leq 1, \quad t \in [0, 1], \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Цільовий функціонал має вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{J}(q, \vartheta; r) &= J(q, \vartheta) + rG(q, \vartheta). \\ J(q, \vartheta) &= \int_0^1 \mu(x)[u(x, t_f; q, \vartheta) - U(x)]^2 dx + \mu_1 \|q(t)\|_{L_2^n[0,1]}^2 + \mu_2 \|\vartheta(t)\|_{L_2^n[0,1]}^2, \\ G(q, \vartheta) &= \int_0^1 [\min(0, g_1(t))]^2 dt + \int_0^1 [\min(0, g_2(t))]^2 dt, \end{aligned}$$

де $\mu(x) = 1$, $x \in [0, 1]$, $\mu_1 = 0.1$, $\mu_2 = 0.1$, $U(x) = 5$, $x \in [0, 1]$.

У комп'ютерних експериментах, наведених нижче, використано такі параметри скінченнорізницевої апроксимації навантаженої початково-крайової задачі та задачі Коші:

$$n = 2, \quad l = 1, \quad t_0 = 0, \quad t_f = 1, \quad h_x = 0.01, \quad h_t = 0.005.$$

Як безумовну мінімізацію штрафного функціонала використано метод спряженого градієнта [30], а зміну значення коефіцієнта штрафу здійснено трічі: $R_k = 5R_{k-1}$, $k = 1, 2, 3$, $R_0 = 5$.

Експеримент 1. Початкові наближення для керувальних функцій $q_1^0(t)$, $q_2^0(t)$, $\vartheta_1^0(t)$, $\vartheta_2^0(t)$ вибрано у такий спосіб:

$$\begin{aligned} q_1^0(t) &= 1.5 \sin^2(2\pi t), \quad q_2^0(t) = 1.5 \sin^2(3\pi t), \quad t \in [0, 1], \\ \vartheta_1^0(t) &= -0.6 + 0.4 \cos(2\pi t), \quad \vartheta_2^0(t) = 0.5 - 0.4 \cos(4\pi t), \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Для цих даних маємо

$$\begin{aligned} J(q^0, \vartheta^0) &= 24.91, \quad \int_0^1 [u(x, t_f) - U(x)]^2 dx = 24.66, \quad G(q^0, \vartheta^0) = 0, \\ \|q^0(t)\|_{L_2^n[0,1]}^2 &= 1.69, \quad \|\vartheta^0(t)\|_{L_2^n[0,1]}^2 = 0.82. \end{aligned}$$

Після виконання ітераційної процедури (30) отримано такі оптимальні значення:

$$\begin{aligned} J(q^*, \vartheta^*) &= 0.0094, \quad \int_0^1 [u(x, t_f) - U(x)]^2 dx = 0, \quad G(q^*, \vartheta^*) = 0, \\ \|q^*(t)\|_{L_2^n[0,1]}^2 &= 9.1321, \quad \|\vartheta^*(t)\|_{L_2^n[0,1]}^2 = 0.2712. \end{aligned}$$

На рис. 1–3 пунктирними лініями наведено графіки відповідно для початкових наближень функцій реакції ($q_1^0(t)$, $q_2^0(t)$), функції керування ($\vartheta_1^0(t)$, $\vartheta_2^0(t)$), траєкторій руху точок навантажування ($\xi_1^0(t)$, $\xi_2^0(t)$). Суцільними лініями зображено відповідні отримані значення цих самих функцій ($q_1^*(t)$, $q_2^*(t)$), ($\vartheta_1^*(t)$, $\vartheta_2^*(t)$), ($\xi_1^*(t)$, $\xi_2^*(t)$).

Експеримент 2. Початкові наближення для керувальних функцій $q_1^0(t)$, $q_2^0(t)$, $\vartheta_1^0(t)$, $\vartheta_2^0(t)$ вибрано так:

$$q_1^0(t) = 0.80 + 0.80 \sin(2.0\pi t), \quad q_2^0(t) = 0.85 + 1.05 \sin(3\pi t), \quad t \in [0, 1],$$

$$\begin{aligned} \vartheta_1^0(t) &= -0.58 + 0.18 (\cos(8\pi t \sin(2\pi t)) - t), \\ \vartheta_2^0(t) &= 0.2 - 0.2(\cos(2\pi t) \sin(8\pi t) - t), \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

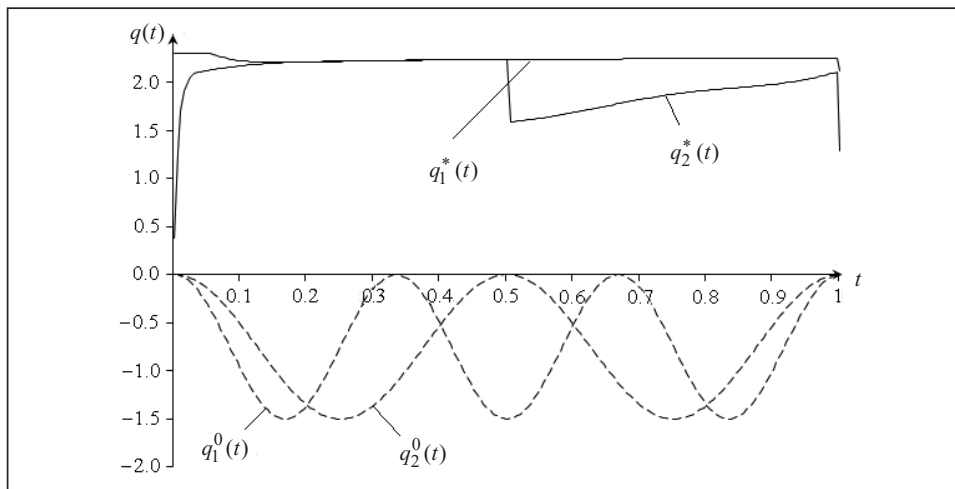


Рис. 1. Графіки функцій реакції для початкових наближень $q_1^0(t)$, $q_2^0(t)$ (пунктирні лінії) та отриманих оптимальних функцій $q_1^*(t)$, $q_2^*(t)$ (суцільні лінії)

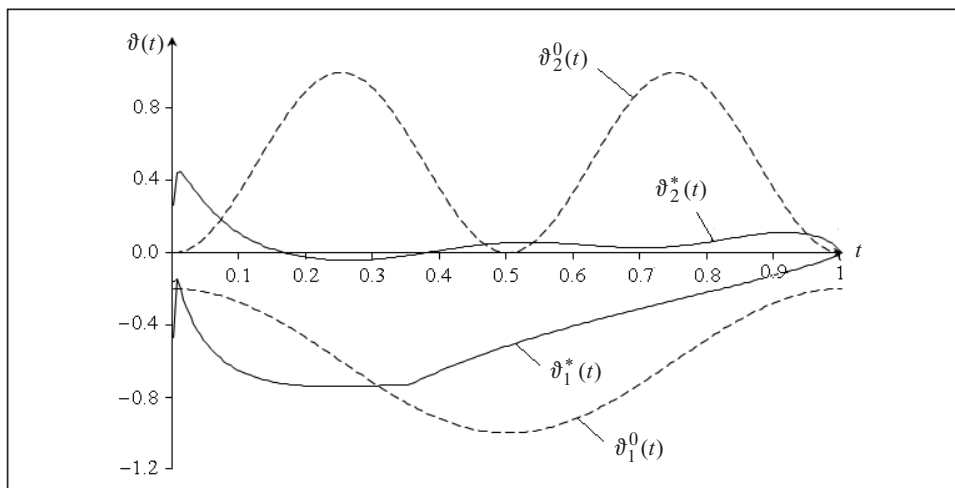


Рис. 2. Графіки початкових керувальних функцій $\vartheta_1^0(t)$, $\vartheta_2^0(t)$ (пунктирні лінії) та отриманих оптимальних функцій $\vartheta_1^*(t)$, $\vartheta_2^*(t)$ (суцільні лінії)

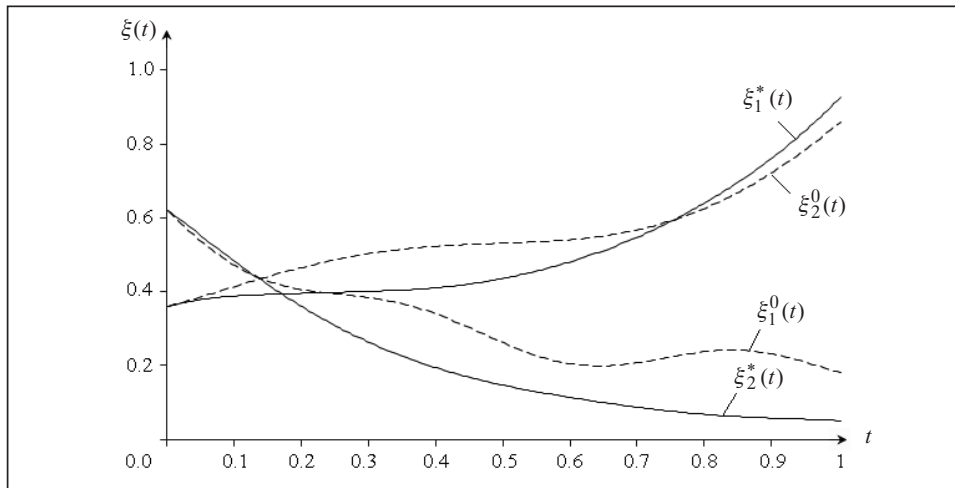


Рис. 3. Траєкторії руху точок навантажування $\xi_1^0(t)$, $\xi_2^0(t)$ (пунктирні лінії) для початкових керувань $(q^0(t), \vartheta^0(t))$ та траєкторії руху точок навантажування $\xi_1^*(t)$, $\xi_2^*(t)$ (суцільні лінії) для оптимальних керувальних функцій $(q^*(t), \vartheta^*(t))$

Для цих початкових значень керувальних функцій маємо:

$$J(q^0, \vartheta^0) = 20.69, \int_0^1 [u(x, t_f) - U(x)]^2 dx = 20.37, G(q^0, \vartheta^0) = 0, R = 1,$$

$$\|q^0(t)\|_{L_2^n[0,1]}^2 = 2.61, \|\vartheta^0(t)\|_{L_2^n[0,1]}^2 = 0.57.$$

Після виконання ітераційних процедур отримано такі оптимальні значення:

$$J(q^*, \vartheta^*) = 10^{-5}, \int_0^1 [u(x, t_f) - U(x)]^2 dx = 10^{-5}, G(q^*, \vartheta^*) = 10^{-5},$$

$$\|q^*(t)\|_{L_2^n[0,1]}^2 = 9.0937, \|\vartheta^*(t)\|_{L_2^n[0,1]}^2 = 0.3461.$$

На рис. 4–6 пунктирними лініями наведено графіки відповідно для початкових наближень функції реакції $(q_1^0(t), q_2^0(t))$, функції керування $(\vartheta_1^0(t), \vartheta_2^0(t))$, траєкторій руху точок навантажування $(\xi_1^0(t), \xi_2^0(t))$. Суцільними лініями позначено оптимальні функції реакції $(q_1^*(t), q_2^*(t))$.

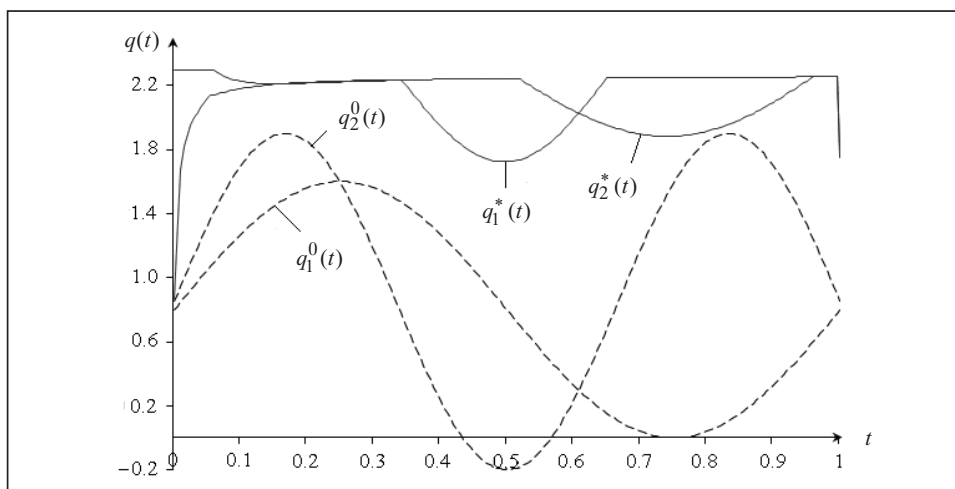


Рис. 4. Графіки початкових наближень для функцій реакції $q_1^0(t)$, $q_2^0(t)$ (пунктирні лінії) та отриманих оптимальних функцій $q_1^*(t)$, $q_2^*(t)$ (суцільні лінії)

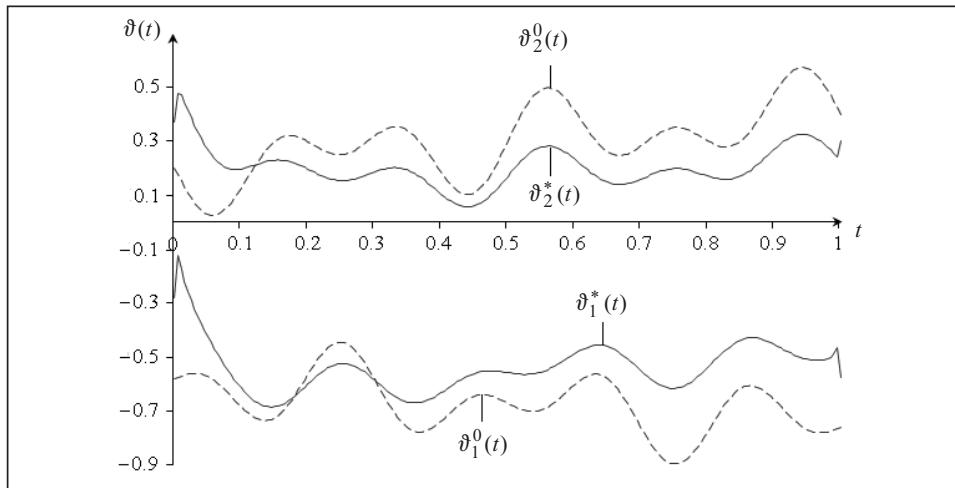


Рис. 5. Графіки початкових керувальних функцій $\vartheta_1^0(t)$, $\vartheta_2^0(t)$ (пунктирні лінії) та отриманих оптимальних функцій $\vartheta_1^*(t)$, $\vartheta_2^*(t)$ (суцільні лінії)

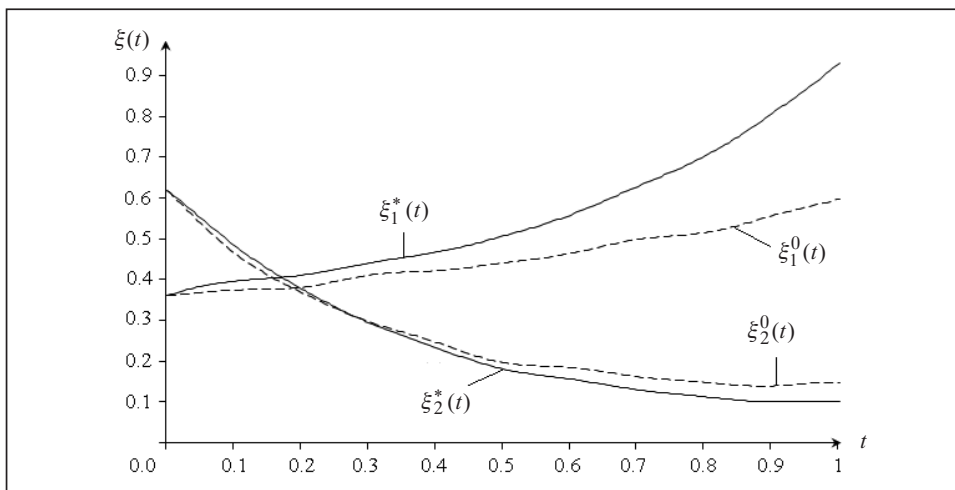


Рис. 6. Траєкторії руху точок навантажування $\xi_1^0(t)$, $\xi_2^0(t)$ (пунктирні лінії) для початкових керувань $(q^0(t), \vartheta^0(t))$ та траєкторії руху точок навантажування $\xi_1^*(t)$, $\xi_2^*(t)$ суцільні лінії) для оптимальних керувальних функцій $(q^*(t), \vartheta^*(t))$

чено відповідні отримані значення цих самих функцій $(q_1^*(t), q_2^*(t))$, $(\vartheta_1^*(t), \vartheta_2^*(t))$, $(\xi_1^*(t), \xi_2^*(t))$.

Проведено численні комп'ютерні експерименти як для інших значень параметрів, що використовуються в числових методах розв'язання крайової задачі та задачі Коші, так і для інших даних самої задачі. Результати цих експериментів мало відрізнялися від результатів, наведених вище.

ВИСНОВКИ

Досліджено задачу керування зміною місць навантажування та відповідних функцій реакції для об'єктів, що описуються навантаженим диференціальним рівнянням параболічного типу з частинними похідними. Задачі у постановках, розглянутих у цій роботі, можуть виникати як під час оптимізації навантажених систем, так і у разі розв'язання обернених задач ідентифікації невідомих місць навантажування та відповідних функцій реакції на навантажування. Особливість і новизна розглянутої задачі полягає в тому, що координати точок навантажування є розв'язком системи диференціальних рівнянь і змінюються в часі під дією керувальних впливів.

Отримано необхідні умови оптимальності для оптимізованих параметрів, що входять у навантажену початково-крайову задачу та задачі Коші, які описують рухи точок навантажування. Умови оптимальності містять формули для градієнта цільового функціонала, які використано під час застосування методів оптимізації першого порядку для числового розв'язання задачі оптимізації місць навантажування та функцій реакції на навантажування.

Постановку задачі та підхід до отримання обчислювальних формул для її числового розв'язання, запропоновані у цій роботі, можна поширити на випадки керування багатьма іншими процесами, що описуються іншими типами навантажених диференціальних рівнянь з частинними похідними та початково-крайових умов.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. Москва: Наука, 2012. 232 с.
2. Дженалиев М.Т. Оптимальное управление линейными нагруженными параболическими уравнениями. *Дифференц. уравнения*. 1989. Т. 25, № 4. С. 641–651.
3. Дженалиев М.Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы: Компьютерный центр ИТПМ, 1995. 270 с.
4. Mardanov M.J., Sharifov Y.A., Zeynalli F.M. Existence and uniqueness of the solutions to impulsive nonlinear integro-differential equations with nonlocal boundary conditions. *Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb.* 2019. Vol. 45, N 2. P. 222–233. <https://doi.org/10.29228/proc.6>.
5. Abdullayev V.M., Aida-zade K.R. Approach to the numerical solution of optimal control problems for loaded differential equations with nonlocal conditions. *Comput. Math. Math. Phys.* 2019. Vol. 59, N 5. P. 696–707. <https://doi.org/10.1134/S0965542519050026>.
6. Abdullayev V.M. Identification of the functions of response to loading for stationary systems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. Vol. 53, N 3. P. 417–425. <https://doi.org/10.1007/s10559-017-9942-6>.
7. Aida-zade K.R., Abdullayev V.M. Control synthesis for temperature maintaining process in a heat supply problem. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2020. Vol. 56, N 3. P. 380–391. <https://doi.org/10.1007/s10559-020-00254-5>.
8. Sergienko I.V., Deineka V.S. Optimal Control of Distributed Systems with Conjugation Conditions. New York: Kluwer Acad. Publ., 2005. 383 p.
9. Ray W.H. Advanced Process Control. New York: McGraw-Hill, 1981. 376 p.
10. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. Москва: Наука, 1984. 568 с.
11. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б. Математическая теория автоматического управления. Москва: ЛЕНАНД, 2019. 504 с.
12. Егоров А.И. Основы теории управления. Москва: Физматлит, 2004. 504 с.
13. Ayda-zade K.R., Bagirov A.G. On the problem of spacing of oil wells and control of their production rates. *Autom. Remote Control*. 2006. Vol. 67, N 1. P. 44–53. <https://doi.org/10.1134/S0005117906010024>.
14. Afifi L., Lasri K., Joundi M., Amimi N. Feedback controls for exact remediability in disturbed dynamical systems. *IMA J. of Mathematical Control and Information*. 2018. Vol. 35, Iss. 2. P. 411–425. <https://doi.org/10.1093/imamci/dnw054>.
15. Coron J.M., Wang Zh. Output feedback stabilization for a scalar conservation law with a nonlocal velocity. *SIAM J. Math. Anal.* 2013. Vol. 45, N 5. P. 2646–2665. <https://doi.org/10.1137/120902203>.
16. Abdullayev V.M., Aida-zade K.R. Numerical solution of the problem of determining the number and locations of state observation points in feedback control of a heating process. *Comput. Math. Math. Phys.* 2018. Vol. 58, N 1. P. 78–89. <https://doi.org/10.1134/S0965542518010025>.
17. Aida-zade K.R., Abdullayev V.M. Controlling the heating of a rod using the current and preceding time feedback. *Autom. Remote Control*. 2022. Vol. 83, N 1. P. 106–122. <https://doi.org/10.1134/S0005117922010088>.

18. Aida-zade K.R., Hashimov V.A. Optimizing the arrangement of lumped sources and measurement points of plate heating. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019. Vol. 55, N 4. P. 605–615. <https://doi.org/10.1007/s10559-019-00169-w>.
19. Aida-zade K.R., Bagirov A.H., Hashimov V.A. Feedback control of the power of moving sources in bar heating. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2021. Vol. 57, N 4. P. 592–604. <https://doi.org/10.1007/s10559-021-00384-4>.
20. Aida-zade K.R., Hashimov V.A. Feedback control of the plate heating process with optimization of the locations of sources and control. *Autom. Remote Control*. Vol. 81, N 4. P. 670–685. <https://doi.org/10.1134/S0005117920040098>.
21. Asanova A.T., Kadirbaeva Zh.M., Bakirova É.A. On the unique solvability of a nonlocal boundary value problem for systems of loaded hyperbolic equations with impulsive actions. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2018. Vol. 69, N 8. P. 1175–1195. <https://doi.org/10.1007/s11253-017-1424-5>.
22. Assanova A.T., Imanchiyev A.E., Kadirbayeva Zh.M. A nonlocal problem for loaded partial differential equations of fourth order. *Vestnik Karagandinskogo Universiteta. Ser. Matematika*. 2020. Vol. 97, N 1. P. 6–16. <https://doi.org/10.31489/2020M1/6-16>.
23. Alikhanov A.A., Berezgov A.M., Shkhanukov-Lafishev M.X. Boundary value problems for certain classes of loaded differential equations and solving them by finite difference methods. *Comp. Math. Math. Phys.* 2008. Vol. 48, N 9. P. 1581–1590. <https://doi.org/10.1134/S096554250809008X>.
24. Abdullayev V.M., Aida-zade K.R. Finite-difference methods for solving loaded parabolic equations. *Comp. Math. Math. Phys.* 2016. Vol. 56, N 1. P. 93–105. <https://doi.org/10.1134/S0965542516010036>.
25. Shkhanukov-Lafishev M.Kh. Locally one-dimensional scheme for a loaded heat equation with Robin boundary conditions. *Comput. Math. Math. Phys.* 2009. Vol. 49, N 7. P. 1167–1174. <https://doi.org/10.1134/S0965542509070094>.
26. Abdullaev V.M., Aida-Zade K.R. Numerical solution of optimal control problems for loaded lumped parameter systems. *Comput. Math. Math. Phys.* 2006. Vol. 46, N 9. P. 1487–1502. <https://doi.org/10.1134/S096554250609003X>.
27. Шор Н.З. Методы минимизации негладких функций и матричные задачи оптимизации: Сб. избр. тр. Кишинэу: Эврика, 2009. 272 с.
28. Шор Н.З. Алгоритмы последовательной и негладкой оптимизации: Сб. избр. тр. Кишинэу: Эврика, 2012. 270 с.
29. Стецюк П.И. Методы эллипсоидов и r -алгоритмы. Кишинэу: Эврика, 2014. 488 с.
30. Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. Москва: Наука, 1975. 320 с.
31. Самарский А.А. Теория разностных схем. Москва: Наука, 1983. 616 с.
32. Waldén J. On the approximation of singular source terms in differential equations. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. 1999. Vol. 15, N 4. P. 503–520. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1098-2426\(199907\)15:4<503::AID-NUM6>3.0.CO;2-Q](https://doi.org/10.1002/(SICI)1098-2426(199907)15:4<503::AID-NUM6>3.0.CO;2-Q).

V.M. Abdullayev, V.A. Hashimov

A PROBLEM OF OPTIMAL CONTROL OF LOADING POINTS AND THEIR REACTION FUNCTIONS FOR A PARABOLIC EQUATION

Abstract. We consider the problem of optimal control of loading points and the corresponding reaction functions described by a loaded parabolic equation. Optimality conditions for control actions are obtained. The objective functional gradient formulas contained in these conditions are used in the algorithm for numerically solving the problem of optimization of loading points and reaction functions based on first-order optimization methods. The results of numerical experiments are provided.

Keywords: distributed-parameter system, loaded differential equation, necessary optimality condition, functional gradient.

Надійшла до редакції 28.11.2023