УДК 519.21

О.О. КУШНІР
Національний університет водного господарства та природокористування,
Рівне, Україна,
e-mail: *o.o.kushnir@nuwm.edu.ua; kuchniroo@gmail.com.*

В.П. КУШНІР
Національний університет водного господарства та природокористування,
Рівне, Україна,
e-mail: *v.p.kushnir@nuwm.edu.ua*.

ОЦІНКИ ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ НАПРАЦЮВАННЯ НА ВІДМОВУ ВИСОКОНАДІЙНОЇ СИСТЕМИ $N-1$ З N У ВИПАДКУ ПОКАЗНИКОВИХ РОЗПОДІЛІВ ІНТЕРВАЛІВ РОБОЧОГО СТАНУ УСІХ АЛЬТЕРНУВАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ

Анотація. Наведено кількісні оцінки швидкості збіжності функції розподілу напрацювання на відмову високонадійної мажоритарної відновлюваної системи $N-1$ з N до показникової за припущення, що інтервали робочого стану усіх альтернувальних процесів мають показниковий розподіл. Оцінено гарантований час безвідмовної роботи цієї системи.

Ключові слова: альтернувальний процес відновлення, мажоритарна відновлювана система, теорема Реньї, напівмарковський процес.

ВСТУП

Мажоритарна система K з N складається з N елементів, функціонування яких описується незалежними альтернувальними процесами відновлення. Система є справною, якщо принаймні K її елементів у робочому стані.

Математичне сподівання часу напрацювання на відмову такої системи за загальних припущень наведено в [1]. У [2] визначено показникову асимптотику функції розподілу часу безвідмовної роботи цієї системи у разі прямування до нуля ймовірності відмови на скінченному проміжку часу.

Метою запропонованої роботи є отримання кількісних оцінок швидкості збіжності цієї асимптотики для системи $N-1$ з N за умови показникових розподілів інтервалів робочого стану усіх альтернувальних процесів. Вона ґрунтується на результатах [3], де наведено рівномірні оцінки відхилення від функції показникового розподілу виразу

$$\theta L * \sum_{n=0}^{\infty} (1-\theta)^n K^{*n}.$$

Тут L, K — задані функції розподілу невід'ємних випадкових величин, $\theta \in (0,1)$, $*$ — згортка функцій розподілу, тобто

$$L * K(t) = \int_0^t L(t-x)\, dK(x).$$

Раніше таким методом у [4] було отримано оцінки функції розподілу часу безвідмовної роботи системи із захистом у випадку найпростішого потоку відновлення.

Подібні рівномірні оцінки було отримано в роботах О. Соловйова та О. Сахобова. Теорему Реньї та її застосування досліджував В. Калашніков.

ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ ТА РЕЗУЛЬТАТИ

Кожен з N незалежно працюючих елементів системи може бути в двох станах: робочому та відновлення. Тривалість перебування i-го елемента в робочому стані має показниковий розподіл з параметром u_i, $1 \le i \le N$.

У початковий момент часу система перебуває в стані S_0 (усі елементи у робочому стані). Позначимо S_i стан системи, коли тільки i-й її елемент у стані відновлення, $1 \le i \le N$.

Нехай τ — момент часу, в який виходить з ладу один із елементів системи, поки інший ще перебуває в стані відновлення. Тоді система переходить у поглинальний стан відмови S'.

Позначимо $\varphi_0(t) = P(\tau < t)$ функцію розподілу часу безвідмовної роботи системи, а t_γ — її квантиль рівня γ: $\varphi_0(t_\gamma) = 1 - \gamma$. Назвемо t_γ гарантованим напрацюванням на відмову системи з надійністю γ.

Нехай $u = \sum_{i=1}^{n} u_i$ — інтенсивність виходу системи зі стану S_0; $B_i(t)$ — функція розподілу часу перебування i-го елемента в стані відновлення, $1 \le i \le N$; $E_q(t) = 1 - \exp(-qt)$, $t \ge 0$, — функція показникового розподілу з параметром q.

Позначимо θ_i ймовірність відмови системи впродовж періоду відновлення i-го її елемента, тобто

$$\theta_i = \int_0^{+\infty} E_{u-u_i}(x)\, dB_i(x) = 1 - \int_0^{+\infty} \exp(-(u-u_i)x)\, dB_i(x), 1 \le i \le N.$$

Уведемо ще два позначення для всіх i від 1 до N:

$$\varepsilon_i = \int_0^{+\infty} E^{*2}_{u-u_i}(x)\, dB_i(x) = \theta_i - (u-u_i) \int_0^{+\infty} x \cdot \exp(-(u-u_i)x)\, dB_i(x);$$

$$\delta_i = \int_0^{+\infty} E^{*3}_{u-u_i}(x)\, dB_i(x) = \varepsilon_i - \frac{(u-u_i)^2}{2} \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \exp(-(u-u_i)x)\, dB_i(x).$$

Нехай $\alpha_i = \frac{u_i}{u}$ — ймовірність переходу системи зі стану S_0 у стан S_i. Ймовірність переходу з S_0 у S' без повернення в S_0 становить $\theta = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \theta_i$.

Умовна функція розподілу тривалості відновлення i-го елемента за умови, що жоден інший елемент за цей час не відмовить (отже, система не перейде зі стану S_i у стан S'), має вигляд

$$G_i(t) = \frac{1}{1-\theta_i} \int_0^{t} \exp(-(u-u_i)x)\, dB_i(x),$$

її умовне математичне сподівання

$$m_i = \frac{1}{1-\theta_i} \int_0^{+\infty} x \cdot \exp(-(u-u_i)x)\, dB_i(x) = \frac{\theta_i - \varepsilon_i}{(1-\theta_i)(u-u_i)}$$

і умовний початковий момент 2-го порядку

$$v_i = \frac{1}{1-\theta_i} \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \exp(-(u-u_i)x)\, dB_i(x) = \frac{2(\varepsilon_i - \delta_i)}{(1-\theta_i)(u-u_i)^2}.$$

Умовна функція розподілу часу повернення системи, яка вийшла зі стану S_0, у стан S_0 за умови, що вона не перейде в S', має вигляд

$$K(t) = E_u * \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i (1-\theta_i)}{1-\theta} G_i(t),$$

її умовне математичне сподівання

$$m=\frac{1}{u}+\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha_i(\theta_i-\varepsilon_i)}{(1-\theta)(u-u_i)}\geq\frac{1}{u}$$

і умовний початковий момент 2-го порядку

$$v=\frac{2}{u^2}+\frac{2}{u}\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha_i(\theta_i-\varepsilon_i)}{(1-\theta)(u-u_i)}+v_G=\frac{2m}{u}+v_G,$$

де v_G — другий початковий момент випадкової величини з функцією розподілу

$$G(t)=\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha_i(1-\theta_i)}{1-\theta}G_i(t).$$

Позначимо

$$q=\frac{\theta}{m(1-\theta)},\;\; \kappa=\frac{v}{2m^2},\;\; \varepsilon=\sum_{i=1}^{N}\frac{u_i\varepsilon_i}{u-u_i}\;.$$

Теорема 1. Для функції розподілу часу безвідмовної роботи системи $N-1$ з N виконуються нерівності

$$-2\kappa\theta-\varepsilon\leq\varphi_0(t)-(1-\theta)E_q(t)\leq(2\kappa+1)\theta.$$

Доведення. Умовна функція розподілу тривалості перебування системи у стані S_i за умови переходу у стан S', а не в S_0, має вигляд

$$L_i(t)=\frac{1}{\theta_i}\int_0^t(1-B_i(x))\,dE_{u-u_i}(x),$$

а її умовне математичне сподівання

$$\mu_i=\frac{1}{\theta_i}\int_0^{+\infty}x(1-B_i(x))\,dE_{u-u_i}(x)=\frac{1}{\theta_i}\int_0^{+\infty}xdE_{u-u_i}(x)\int_x^{+\infty}dB_i(y)=$$

$$=\frac{1}{\theta_i}\int_0^{+\infty}dB_i(y)\int_0^{y}xdE_{u-u_i}(x)=\frac{\varepsilon_i}{\theta_i(u-u_i)}$$

(змінено порядок інтегрування та проінтегровано частинами).

Умовна функція розподілу часу безвідмовної роботи системи за умови, що вона, вийшовши із S_0, туди не повертатиметься, має вигляд

$$L(t)=E_u*\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha_i\theta_i}{\theta}L_i(t),$$

а її умовне математичне сподівання

$$\mu=\frac{1}{u}+\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha_i\varepsilon_i}{\theta(u-u_i)}=\frac{1}{u}+\frac{\varepsilon}{u\theta}=\frac{\theta+\varepsilon}{u\theta}.$$

Перейти із S_0 у S' можна без повернення і з поверненням у стан S_0. Тому за формулою повної ймовірності маємо

$$\varphi_0=\theta L+(1-\theta)K*\varphi_0. \tag{1}$$

Позначимо $\varphi(t)=\theta\sum_{i=1}^{N}(1-\theta)^{n-1}K^{*n}$. Для цієї функції згідно з [3, Theorem 2] виконуються рівномірні оцінки

$$|\varphi(t)-E_q(t)|\leq\frac{2\kappa\theta}{1-\theta}. \tag{2}$$

З (1) бачимо, що $\varphi_0(t)$ подається через $\varphi(t)$ у вигляді:

$$\varphi_0(t) = L*(\theta + (1-\theta)\varphi(t)). \tag{3}$$

З (2), (3) отримуємо верхню оцінку $\varphi_0(t)$:

$$\varphi_0(t) \le \theta + (1-\theta)\varphi(t) \le (1-\theta)E_q(t) + \theta(1+2\kappa). \tag{4}$$

Згідно з [4, лема 3.2] для будь-якої функції розподілу $L(t)$ виконується нерівність

$$E_q * L(t) \ge E_q(t) - q\int_0^t (1-L(x))\,dx.$$

Тоді, врахувавши очевидну нерівність $2\kappa \ge 1$, з (2), (3) отримаємо

$$\varphi_0(t) \ge L*\left(\theta + (1-\theta)\left(E_q(t) - \frac{2\kappa\theta}{1-\theta}\right)\right) \ge (1-\theta)(E_q(t) - q\mu) - \theta(2\kappa - 1). \tag{5}$$

Оцінимо

$$(1-\theta)q\mu = \frac{\theta\mu}{m} = \frac{\theta+\varepsilon}{um} \le \theta + \varepsilon. \tag{6}$$

Із (5), (6) отримуємо нижню оцінку $\varphi_0(t)$:

$$\varphi_0(t) \ge (1-\theta)E_q(t) - \varepsilon - 2\kappa\theta.$$

Теорему доведено.

Зауваження 1. Для величин q та κ виконуються такі співвідношення:

$$q = \theta u\left(1 + \sum_{\iota=1}^{\mathrm{N}} \frac{\alpha_i\theta_i u_i}{u-u_i} - \varepsilon\right)^{-1},$$

$$\kappa \le \left(1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{u_i(\theta_i - \varepsilon_i)}{(1-\theta)(u-u_i)}\right)^{-1} + \sum_{i=1}^{N} \frac{uu_i(\varepsilon_i - \delta_i)}{(1-\theta)(u-u_i)^2}.$$

Доведення. Перетворимо

$$q = \frac{\theta}{m(1-\theta)} = \frac{u\theta}{1-\theta + \sum_{i=1}^{N} \frac{u_i(\theta_i - \varepsilon_i)}{u-u_i}} =$$

$$= \frac{u\theta}{1 - \sum_{i=1}^{N} \frac{u_i\theta_i}{u} + \sum_{i=1}^{N} \frac{u_i\theta_i}{u-u_i} - \varepsilon} = \frac{u\theta}{1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^2\theta_i}{u(u-u_i)} - \varepsilon}.$$

Зазначимо, що $\frac{u_i}{u} = \alpha_i$.

Оцінимо

$$\kappa = \frac{1}{um} + \frac{v_G}{2m^2} \le \frac{1}{um} + \frac{u^2 v_G}{2} = \frac{1}{um} + \frac{u^2}{2}\sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i(1-\theta_i)}{1-\theta} v_i =$$

$$= \left(1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{u_i(\theta_i - \varepsilon_i)}{(1-\theta)(u-u_i)}\right)^{-1} + \sum_{i=1}^{N} \frac{uu_i(\varepsilon_i - \delta_i)}{(1-\theta)(u-u_i)^2},$$

що й потрібно було довести.

Наслідок 1. Гарантоване із надійністю γ напрацювання на відмову

$$t_\gamma \ge \frac{1}{\theta}\left(\frac{1-\varepsilon}{u} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i^2\theta_i}{u-u_i}\right)\ln\frac{1-\theta}{\gamma + 2\kappa\theta}.$$

Доведення. З нерівності (4) отримуємо

$$P(\tau \geq t) = 1 - \varphi_0(t) \geq 1 - (1-\theta) E_q(t) - \theta(1 + 2\kappa). \tag{7}$$

Прирівняємо праву частину нерівності (7) до γ та знайдемо t:

$$(1-\theta)\exp(-qt) - 2\kappa\theta = \gamma,$$

$$t = \frac{1}{q} \ln \frac{1-\theta}{\gamma + 2\kappa\theta} = \frac{1}{\theta}\left(\frac{1-\varepsilon}{u} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i^2 \theta_i}{u - u_i}\right) \ln \frac{1-\theta}{\gamma + 2\kappa\theta},$$

що є правою частиною нерівності наслідку 1.

Наслідок 1 доведено.

Наслідок 2. Середнє напрацювання на відмову

$$T = E\tau = \frac{1}{\theta u}\left(1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{\theta_i u_i}{u - u_i}\right).$$

Доведення. З рівняння (1) знаходимо $T = \theta\mu + (1-\theta)(m + T)$, звідки

$$T = \mu + \frac{(1-\theta)m}{\theta} = \frac{\theta + \varepsilon}{u\theta} + \frac{1-\theta}{u\theta} + \frac{1}{u\theta} \sum_{i=1}^{N} \frac{u_i(\theta_i - \varepsilon_i)}{u - u_i} = \frac{1}{u\theta}\left(1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{u_i \theta_i}{u - u_i}\right).$$

Наслідок 2 доведено.

Зауваження 2. Нижня оцінка t_γ наслідку 1 є асимптотично рівною $-T\ln\gamma$ для $\theta \to 0$. Квантиль показникового розподілу з математичним сподіванням T також дорівнює $-T\ln\gamma$. Отже, ця оцінка є асимпотично точною для високонадійних систем.

Приклад 1. Нехай періоди відновлення всіх елементів системи мають однаковий рівномірний розподіл $B_i(t) = \min\{1, t/b\}$ і всі $u_i = 1$. Тоді всі θ_i також однакові і

$$\theta = \theta_i = 1 - \frac{1}{b}\int_0^b e^{-(N-1)x} dx = 1 - \frac{1}{b(N-1)}\left(1 - e^{-(N-1)b}\right),$$

а також

$$\theta = \theta_i = \frac{1}{b}\int_0^b \left(1 - e^{-(N-1)x}\right) dx \leq \frac{1}{b}\int_0^b (N-1)x\,dx = \frac{(N-1)b}{2}.$$

Далі (з наслідку 2) знаходимо $T = \dfrac{1}{N\theta} + \dfrac{1}{N-1}$.

Усі

$$\varepsilon_i = \frac{1}{b}\int_0^b \left(1 - e^{-(N-1)x} - (N-1)xe^{-(N-1)x}\right) dx \leq \frac{1}{2b}\int_0^b (N-1)^2 x^2 dx = \frac{(N-1)^2 b^2}{6},$$

а

$$\varepsilon = \frac{N\varepsilon_i}{N-1} \leq \frac{(N^2 - N)\, b^2}{6}.$$

Оцінимо (із зауваження 1)

$$\kappa \leq 1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{uu_i(\varepsilon_i - \delta_i)}{(1-\theta)(u - u_i)^2} \leq 1 + \frac{N^2 \varepsilon_i}{(N-1)^2(1-\theta)} \leq 1 + \frac{N^2 b^2}{6\left(1 - \dfrac{(N-1)b}{2}\right)}$$

та (з наслідку 1)

$$t_\gamma \geq \left(\frac{2}{(N^2 - N)\, b} - \frac{b}{3} + \frac{1}{N^2 - N}\right) \times$$

$$\times \ln \frac{1 - (N-1)b/2}{\gamma + (N-1)b + (N^3 - N^2)\, b^3 / (6(1 - (N-1)b/2))}.$$

Нехай $N=5, \gamma=0.95$. Тоді

$$t_\gamma \geq \left(\frac{1}{10b}-\frac{b}{3}+\frac{1}{20}\right)\ln\frac{1-2b}{0.95+4b+50b^3\ /\ (3(1-2b))}.$$

Обчислимо t_γ за різних значень b та порівняємо його з середнім значенням. Результати обчислень наведено в табл. 1.

В останньому рядку табл. 1 видно, як нижня оцінка t_γ з наслідку 1 асимптотично наближається до квантиля рівня γ показникового розподілу, що і стверджується в зауваженні 2.

Таблиця 1

b	$8{\cdot}10^{-3}$	$4{\cdot}10^{-3}$	$2{\cdot}10^{-3}$	10^{-3}	10^{-4}	10^{-6}
θ	0.015831	0.0079575	0.0039894	0.001997	$1.9997{\cdot}10^{-4}$	$1.999997{\cdot}10^{-6}$
T	12.88369	25.383511	50.383422	100.3834	1000.3833	100 000.3833
$t_\gamma \geq$	0.0254	0.6652	1.9468	4.511	50.67	5128.7
$T\ /\ t_\gamma \leq$	507	38.2	25.88	22.26	19.75	19.50

ВИСНОВКИ

У статті отримано кількісні оцінки швидкості збіжності показникової асимптотики функції розподілу часу безвідмовної роботи системи $N-1$ з N за умови показникових розподілів інтервалів робочого стану усіх альтернувальних процесів. Також наведено асимптотично точну для високонадійних систем нижню оцінку гарантованого напрацювання на відмову.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Корлат А.Н, Кузнецов В.Н., Новиков М.М., Турбин А.Ф. Полумарковские модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания. Кишинев: Штиинца, 1991. 276 с.
2. Кузнецов Н.Ю. Предельное распределение первого момента наступления редкого события в системе, описываемой m независимыми процессами восстановления. *Докл. АН УССР.* 1979. № 1. С. 329–334.
3. Kartashov N.V. Inequalities in the Renyi theorem. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*. 1992. N 45. P. 23–28.
4. Kushnir O.O., Kushnir V.P. Properties of highly reliable systems with protection in the case of Poisson renewal process. *Theory of Probability and Mathematical Statistics.* 2018. N 96. P. 127–132. https://doi.org/10.1090/tpms/1038.

O.O Kushnir, V.P. Kushnir

ESTIMATION OF THE TIME-TO0FAILURE DISTRIBUTION FUNCTION IN A HIGHLY RELIABLE $N-1$-OUT-OF-N: G REPAIRABLE SYSTEM IN THE CASE OF EXPONENTIAL DISTRIBUTIONS OF WORKING PERIODS OF ALL ALTERNATING RENEWAL PROCESSES

Abstract. Some quantitative bounds on a convergence rate of the time-to-failure distribution function to an exponential distribution function in a highly reliable $N-1$-out-of-N: G repairable system are obtained in the case of exponential working periods of alternating renewal processes. The confident time to failure of this system is also bounded.

Keywords: alternating renewal process, $N-1$-out-of-N: G repairable system, Renyi's theorem, semi-Markov process.

Надійшла до редакції 20.11.2023