УДК 519.21

В.К. ЯСИНСЬКИЙ
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна,
e-mail: *v.yasynskyy@chnu.edu.ua.*

І.В. ЮРЧЕНКО
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна,
e-mail: *i.yurchenko@chnu.edu.ua*.

ПРО ІСНУВАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПІД ДІЄЮ ЗОВНІШНІХ ЗБУРЕНЬ

Анотація. Розглянуто теорему порівняння для розв'язків стохастичних диференціально-функціональних рівнянь під дією зовнішніх збурень та її застосування для однієї задачі стохастичного керування.

Ключові слова: теорема порівняння, стохастичне керування, стохастичні функціонально-диференціальні рівняння.

Статтю присвячено пам'яті
Свердана Михайла Леоновича
(18.01.1940–19.11.2023)

ВСТУП

У межах теорії стохастичного керування досліджується управління в системах з випадковими параметрами. Ця теорія має широке застосування в багатьох галузях, включаючи фінанси, інженерію, економіку та ін.

Початки теорії стохастичного керування пов'язані з роботами, в яких вивчаються розв'язки стохастичних диференціальних рівнянь, що описують еволюцію системи в часі за умови випадкових збурень чи впливу випадкових факторів. Розвиток теорії стохастичного керування відбувався вдосконаленням методів розв'язання стохастичних диференціальних рівнянь, введенням нових підходів до аналізу випадкових процесів і застосуванням до таких областей, як фінанси, оптимальне керування портфелями, ризик-менеджмент і багато інших (див. праці [1–11]).

Сучасні дослідження в теорії стохастичного керування продовжують розширювати її застосування в нові галузі, розробляти більш ефективні методи розв'язання складних проблем і поширювати її теоретичну базу.

У цій статті розглянуто теорему порівняння для розв'язків стохастичних диференціально-функціональних рівнянь (СДФР) під дією зовнішніх збурень та її застосування для однієї задачі стохастичного керування, що є розвитком результатів, отриманих для одновимірних процесів Іто у працях [3, 5–7] та для випадку наявності пуассонових збурень у працях [12–15].

ТЕОРЕМА ПОРІВНЯННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СДФР

Нехай (Ω, F, P) — ймовірнісний простір з потоком σ-алгебр $\{F_t, t \ge 0\}$, $\mathbf{D}$ — простір неперервних справа функцій, що мають лівосторонні границі (НПЛГ) зі значеннями з $\mathbf{R}^1$ та з рівномірною метрикою [1–3].

Теорема 1. Нехай задані:

1) строго зростальна функція $\{\rho(x), x \in \mathbf{R}_+\}$ така, що

$$\rho(0) = 0, \ \int_0^\infty \rho^{-2}(x)dx = \infty;$$

2) неперервні функціонали $b: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{D} \to \mathbf{R}^1$; $c: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{D} \times \mathbf{V} \to \mathbf{R}^1$, $\mathbf{V} \subset \mathbf{R}^1$ такі, що для довільних $\varphi, \psi \in \mathbf{D}$

$$| b(t, \varphi) - b(t, \psi) | + \int_{\mathbf{V}} | c(t, \varphi, u) - c(t, \psi, u) | \Pi(du) \le \rho(\| \varphi - \psi \|), \ \ t \ge 0;$$

3) два неперервних функціонали $a_i: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{D} \to \mathbf{R}^1$, $i = 1, 2$, такі, що

$$a_1(t, \varphi) \le a_2(t, \varphi), \ \ t \ge 0, \ \ \varphi \in \mathbf{D};$$

4) $\{x_i(t) \equiv x_i(t, \omega), t \in \mathbf{R}_+, \omega \in \Omega, i = 1, 2\}$ — неперервні за t випадкові процеси, $\{F_t\}$-вимірні за ω;

5) стандартний вінерів процес $w(t) \equiv w(t, \omega)$: $[0, \infty) \times \Omega \subset \mathbf{R}^1$ такий, що $w(0) = 0 \ (\mathrm{mod}\, \mathbf{P})$;

6) $\{\tilde{\nu}(t, A) = \nu(t, A) - \Pi(A)t, A \in \mathbf{V} \subset \mathbf{R} \setminus \{0\}\}$ — центрована пуассонова міра, при цьому $\{w(t)\}$ і $\{\tilde{\nu}(t, A)\}$ незалежні один від одного;

7) $\{\alpha_i(t) \equiv \alpha_i(t, \omega), t \in \mathbf{R}, \omega \in \Omega\}$ — вимірні відносно $\{F_t, t \ge 0\}$ випадкові процеси.

Нехай також випадкові процеси з пп. 4–7 даної теореми з імовірністю 1 задовольняють умови:

$$x_i(t) - x_i(0) = \int_0^t \alpha_i(s) ds + \int_0^t b(s, x_i^s) dw(s) + \int_0^t \int_{\mathbf{V}} c(s, x_i^s, \upsilon) \tilde{\nu}(ds, d\upsilon), \tag{1}$$

$$x_1(\theta) \le x_2(\theta), \ \ \theta \in (-\infty, 0], \ \ \alpha_1(t) \le a_1(t, x_1^t), \ \ t \ge 0,$$

$$\alpha_2(t) \le a_2(t, x_2^t), \ \ t \ge 0, \tag{2}$$

де $\{x^t \equiv x(t + \theta), \theta \in (-\infty, 0]\}$.

Тоді з імовірністю 1 виконується нерівність

$$x_1(t) \le x_2(t) \ \ \forall t \ge 0. \tag{3}$$

Якщо стверджується умова єдиності з імовірністю 1 сильних розв'язків хоча б для одного з таких СДФР:

$$dx_i(t) = a_i(t, x^t) dt + b(t, x^t) dw(t) + \int_{\mathbf{V}} c(t, x^t, \upsilon) \tilde{\nu}(dt, d\upsilon), \ \ i = 1, 2, \tag{4}$$

тоді (3) виконується й за слабкішої умови:

$$a_1(t, \varphi) \le a_2(t, \varphi), \ \ t \ge 0, \ \ \varphi \in \mathbf{D}.$$

Доведення. Вважатимемо, що a_i, $i = 1, 2$, b і c обмежені (з урахуванням міркувань локалізації [3, 7, 13]).

Етап 1. Припустимо, що для $a_1(t, x)$ виконується умова Ліпшиця:

$$| a_1(t, \varphi) - a_1(t, \psi) | \le K \| \varphi - \psi \| \ \ \forall \varphi, \psi \in \mathbf{D}. \tag{5}$$

Виберемо послідовність $\{\psi_n(t), t \in \mathbf{R}_+, n = 1, 2, \ldots\}$ неперервних функцій таких, що їхні носії містяться на інтервалах

$$(a_n, a_{n-1}), \ \ 1 > a_1 > \ldots > a_n > 0,$$

$$0 \le \psi_n(t) \le \frac{2\rho^{-2}(t)}{n}, \ \ \int_{a_n}^{a_{n-1}} \psi_n(t) dt = 1.$$

Нехай
$$\varphi_n(t)=\begin{cases}0, \ x\le 0,\\ \int\limits_0^x dy\int\limits_0^y \psi_n(t)dt, \ x>0.\end{cases}$$
Для $\varphi_n \in C(\mathbf{R}^1)$ виконуються співвідношення
$$\varphi_n(x)=0 \ \text{для} \ n\le 0,$$
$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=x^+ \ \text{для} \ n\to\infty;$$
$$\varphi'_n(x)=\psi_n(x), \ 0\le\varphi'_n(x)\le 1. \tag{6}$$
Застосовуючи узагальнену формулу Іто [3], одержимо
$$\varphi_n(x_1(t)-x_2(t))=\sum_{i=1}^{5} I_i(n),$$
де
$$I_1(n)\equiv\int\limits_0^t \varphi'_n(x_1(s)-x_2(s))\{b(s,x_1^s)-b(s,x_2^s)\}dw(s),$$
$$I_2(n)\equiv\int\limits_0^t \varphi'_n(x_1(s)-x_2(s))\{\alpha_1(s)-\alpha_2(s)\}ds,$$
$$I_3(n)\equiv\frac{1}{2}\int\limits_0^t \varphi'_n(x_1(s)-x_2(s))\{b(s,x_1^s)-b(s,x_2^s)\}^2 ds,$$
$$I_4(n)\equiv\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbf{V}}[\varphi_n(x_1(s)-x_2(s)+c(s,x_1^s,\upsilon)-c(s,x_2^s,\upsilon))-$$
$$-\varphi_n(x_1(s)-x_2(s))]\tilde{\nu}(ds,d\upsilon),$$
$$I_5(n)\equiv\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbf{V}}[\varphi_n(x_1(s)-x_2(s)+c(s,x_1^s,\upsilon)-c(s,x_2^s,\upsilon))-$$
$$-\varphi_n(x_1(s)-x_2(s))-\varphi'_n(x_1(s)-x_2(s))(c(s,x_1^s,\upsilon)-c(s,x_2^s,\upsilon))]\Pi(d\upsilon)ds.$$
Використовуючи властивості стохастичних інтегралів [3], отримаємо
$$E\{I_1(n)\}=0, \ E\{I_4(n)\}=0,$$
$$E\{I_3(n)\}\le\frac{1}{2}E\left\{\int\limits_0^t\varphi'_n(x_1(s)-x_2(s))\rho^2(|x_1(s)-x_2(s)|)ds\right\}\le$$
$$\le\frac{1}{2}E\left\{\int\limits_0^t\psi_n(x_1(s)-x_2(s))\rho^2(|x_1(s)-x_2(s)|)ds\right\}\le$$
$$\le\frac{1}{2}E\left\{\int\limits_0^t\frac{2}{n}\rho^{-2}(|x_1(s)-x_2(s)|)\rho^2(|x_1(s)-x_2(s)|)\,ds\right\}\le\frac{t}{n}.$$

З урахуванням умов (1), (2), (5), (6) отримаємо

$$I_2(n) \le \int_0^t \varphi'_n(x_1(s)-x_2(s))\{a_1(s, x_1^s)-a_2(s, x_2^s)\}ds \le$$

$$\le K\int_0^t \chi_{x_1(s)>x_2(s)} \| x_1^s - x_2^s \| ds \le K\int_0^t (x_1^s - x_2^s)^+ ds .$$

З (6) випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} E\{I_5(n)\} = E\left\{\int_0^t \int_V \lim_{n\to\infty} [\varphi_n(x_1(s)-x_2(s)+c(s, x_1^s, \upsilon)-\right.$$

$$-c(s, x_2^s, \upsilon))] - \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x_1(s)-x_2(s)) - \lim_{n\to\infty} \varphi'_n(x_1(s)-x_2(s)) \times$$

$$\left.\times(c(s, x_1^s, \upsilon)-c(s, x_2^s, \upsilon))\right\}\Pi(d\upsilon)ds = \int_0^t \int_{\mathbf{V}} \lim_{n\to\infty} (c(s, x_1^s, \upsilon)-c(s, x_2^s, \upsilon)) \times$$

$$\times[1-\varphi'_n(x_1(s)-x_2(s))]\Pi(d\upsilon)ds = 0 .$$

З граничної рівності

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_n(x_1(t)-x_2(t))}{x_1(t)-x_2(t)} = 1$$

випливає нерівність

$$E\{(x_1(t)-x_2(t))^+\} \le K\int_0^t E\{(x_1(s)-x_2(s))^+\}ds .$$

Звідси одержимо, що $E\{(x_1(t)-x_2(t))^+\}=0\ \forall t \ge 0$, тобто $P\{(x_1(t) \le x_2(t))^+\}=1$ $\forall t \ge 0$.

Внаслідок виконання умов теорем про існування та єдиності розв'язку з [3, 7, 13] отримуємо НПЛГ траєкторії й дійдемо висновку, що (3) виконується. Зауважимо, що у випадку виконання умови Ліпшиця (5) для $a_2(t, \varphi)$ і з аналогічного міркування щодо етапу 1 можна одержати (3).

Етап 2. У загальному випадку вибираємо $a(t, \varphi)$ у такий спосіб, щоб

$$a_1(t, \varphi) < a(t, \varphi) < a_2(t, \varphi),\ t \ge 0,\ \varphi \in \mathbf{D},$$

і для $a(t, \varphi)$ виконувалася умова (3).

Нехай $\{x(t)\}$ — єдиний розв'язок СДФР:

$$dx(t) = a(t, x^t)dt + b(t, x^t)dw(t) + \int_{\mathbf{V}} c(t, x^t, \upsilon)\tilde{\nu}(dt, d\upsilon),\ t \ge 0 ,$$

з початковими умовами

$$x(\theta) = \varphi_2(\theta),\ -\infty < \theta \le 0 .$$

Тоді за результатами етапу 1 маємо $x(t) \le x_2(t)$ і $x_1(t) \le x(t)$ для $t \ge 0$ майже напевно. Отже, (3) виконується.

Етап 3. Нехай існує єдиний з точністю до стохастичної еквівалентності розв'язок $\{x(t)\}$ рівняння (4) за умови, що $i=1$:

$$dx(t)=a_1(t,x^t)dt+b(t,x^t)dw(t)+\int_{\mathbf{V}} c(t,x^t,v)\widetilde{\nu}(dt,dv)\ , \tag{7}$$

$$x(\theta)=\varphi_1(\theta),\ -\infty<\theta\le 0\,.$$

Для $\varepsilon>0$ матимемо $x^{(\pm\varepsilon)}(t)$ — два розв'язки рівнянь:

$$dx(t)=(a_1(t,x^t)\pm\varepsilon)dt+b(t,x^t)dw(t)+\int_{\mathbf{V}} c(t,x^t,v)\widetilde{\nu}(dt,dv)\,,$$

$$x(\theta)=\varphi_1(t),\ -\infty<t\le 0\,,$$

для яких з етапів 1, 2 випливає, що

$$x^{(-\varepsilon)}(t)\le x(t)\le x^{(+\varepsilon)}(t)\ \ \forall t\ge 0\,.$$

Якщо $0<\varepsilon_2<\varepsilon_1$, тоді

$$x^{(-\varepsilon_1)}(t)\le x^{(-\varepsilon_2)}(t),\ \ x^{(+\varepsilon_2)}(t)\le x^{(+\varepsilon_1)}(t)\ \ \forall t\ge 0\,.$$

Отже, внаслідок неперервності $a_1(t,\varphi)$ і єдиності розв'язку для (7) отримаємо

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} x^{(-\varepsilon)}(t)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0} x^{(+\varepsilon)}(t)=x(t)\ \ \forall t\ge 0\,.$$

Враховуючи нерівності $\alpha_1\le a_1(t,x_1^t)$, $a_1(t,x_1^t)\le a_1(t,x_1^t)+\varepsilon$ і застосовуючи вище доведені результати для $x_2(t)$ і $x^{(+\varepsilon)}(t)$, запишемо

$$x_1(t)\le x^{(+\varepsilon)}(t)\ \ \forall t\ge 0\,.$$

Для $\varepsilon\downarrow 0^+$ одержимо

$$x_1(t)\le x(t)\ \ \forall t\ge 0\,. \tag{8}$$

З аналогічного міркування у випадку $\alpha_2(t)\ge a_2(t,x_2^t)$, $a_2(t,x^t)>a_1(t,x^t)-\varepsilon$ дійдемо нерівності $x^{(-\varepsilon)}(t)\le x_2(t)$ з імовірністю 1. За умов $\varepsilon\downarrow 0^+$ маємо, що

$$x(t)\le x_2(t)\ \ \ \forall t\ge 0\,. \tag{9}$$

Порівнюючи нерівності (8) і (9), запишемо

$$x_1(t)\le x(t)\le x_2(t)\ \ \forall t\ge 0\,,$$

що й завершує доведення теореми. ■

Зауваження 1. Теорема 1 має місце і для нелінійних СДФР вигляду

$$\begin{aligned} dx(t,\omega)=x(\theta)+\sum_{j=1}^{r}\alpha_j(t,\omega)a_j(t,x(t+\theta,\omega))dt+\\ +\sum_{j=r+1}^{2r+1}\alpha_j(t,\omega)b_j(s,x(t+\theta,\omega))dw_j(t,\omega)+\\ +\sum_{j=2r+2}^{3r+2}\int_{\mathbf{V}}\alpha_j(t,\omega)c_j(t,x(s+\theta,\omega),v)\widetilde{\nu}_j(dt,dv,\omega) \end{aligned} \tag{10}$$

за умови

$$x(t+\theta,\omega)\Big|_{t=0}=\varphi(\theta);\ \ \alpha_j(t,\omega)\Big|_{t=0}=\beta(\theta),\ j=\overline{1,3r+2}\,, \tag{11}$$

де $\alpha_j(t,\omega):[0,T]\times\Omega\to\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ – зовнішні попарно незалежні між собою та з вінеровими процесами випадкові процеси; коефіцієнти a_j, b_j, c_j задовольняють умови Ліпшиця та умови теореми 1.

ЗАДАЧА ІСНУВАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СДФР СЕРЕД ДОПУСТИМИХ КЕРУВАНЬ

Розглянемо задачу стохастичної оптимізації, яку можна розв'язати за допомогою теореми 1. Ця оптимізаційна задача є прикладом доведення існування стохастичного керування для класу СДФР під дією зовнішніх збурень типу випадкових процесів. Отримані результати є розвитком досліджень, проведених у працях [7, 13, 15], на випадок дії зовнішніх збурень типу випадкових процесів.

Нехай $k(z)$ — неспадна невід'ємна функція, визначена на $[0,\infty)$.

Означення 1. Систему випадкових процесів

$$\{\alpha_j(t,\omega),\ j=\overline{1,3r+1},\ w_l(t,\omega),\ l=\overline{r+1,2r+1},\ \tilde{\nu}_k(t,\upsilon,\omega)\,, \tag{12}$$

$$k=\overline{2r+2,3r+2},\ \ u(t,\omega),\ \ t\ge 0\}$$

назвемо допустимою системою або допустимим керуванням, якщо:

1) вона визначена на просторі $(\Omega,F,\{F_t,\,t\ge 0\},\mathfrak{R}_y(\mathbf{Y}),P)$, де $\{F_t,\,t\ge 0\}$ – потік σ-алгебр, $\mathfrak{R}_y(\mathbf{Y})$ – σ-алгебра множини $\mathbf{Y}\equiv\{y_1,\,y_2,\ldots,\,y_r\}\subset\mathbf{R}^r$;

2) $\alpha_j(t,\omega):[0,T]\times\Omega\to\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$– діагональні матриці, вимірні відносно мінімальної σ-алгебри $F_t\cap\mathfrak{R}_y(\mathbf{Y})$, попарно незалежні одна від одної та від n-вимірних вінерових процесів $w_j(t,\omega)$ і центрованих пуассонових мір $\tilde{\nu}_j(t,\upsilon,\omega)$, при цьому $\alpha_j(t,\omega)\in\mathbf{C}([-\Delta,\infty])$;

3) $u(t)$ — n-вимірний $F_t\cap\mathfrak{R}_y(\mathbf{Y})$ випадковий процес такий, що $|u(t,\omega)|\le 1$ для всіх $t\ge 0$ з імовірністю 1 (майже скрізь);

4) $x(t,\omega)\in\mathbf{C}([-\Delta,\infty])$ заданий та фіксований випадковий процес $x(t,\omega)$: $[-\Delta,\infty]\times\Omega\to\mathbf{R}^n$.

Для допустимої системи (12) та її коефіцієнтів виконано умови теореми 1 (теореми порівняння). Ризик $x^u(t,\omega)$ для (12) визначається рівністю

$$x^u(t,\omega)=x(\theta)+\int_0^t\sum_{j=r+1}^{2r+1}\alpha_j(s,\omega)b(s,\,y,\,x^u(s+\theta))dw_j(s)+ \tag{13}$$

$$+\int_0^t\int_{\mathbf{V}}\sum_{j=2r+2}^{3r+2}\alpha_j(s,\omega)\,c(s,x^u(s+\theta,\omega),\upsilon)\tilde{\nu}(ds,d\upsilon,\omega)+\int_0^t u(s)ds$$

за початковими умовами

$$x^u(t+\theta,\omega)\Big|_{t=0}=x_0^u(\theta)\,,$$

$$\alpha_j(t,\omega)\Big|_{t=0}=\alpha_j^0(\omega),\ \ j=\overline{1,3r+2}\,. \tag{14}$$

Далі для скорочення доведення будемо вважати, що $\alpha_j(t,\omega)\equiv 0$, $j=\overline{1,r}$, $x_t^u\equiv\{x^u(t+\theta,\omega),\theta\in[-\Delta,0],\Delta>0\}$.

Постановка задачі мінімізації математичного сподівання $E\{k\|x_t^u\|\}$ виконується за всіма можливими системами (12). Будемо розв'язувати цю задачу згідно з методикою, викладеною в [7, 13].

Нехай $U(l)$ визначено в такий спосіб:

$$U(l)=\begin{cases}\dfrac{-l}{|l|}, & l\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\},\\ 0, & l=0.\end{cases}$$

Розглянемо СДФР вигляду

$$dx(t,\omega)=\sum_{j=r+1}^{2r+1}\alpha_j(t,\omega)b(t,x_t)dw_j(t,\omega)+ \tag{15}$$

$$+\int_{\mathbf{V}}\sum_{j=2r+1}^{3r+2}\alpha_j(t,\omega)\,c(t,x_t,\upsilon)\widetilde{\nu}(dt,d\upsilon,\omega)+U(x(t,\omega))dt$$

з початковими умовами

$$x(t+\theta,\omega)\big|_{t=0}=\varphi(\theta),\ \ \theta\in[-\Delta,0),\,\Delta>0\,; \tag{16}$$

$$x(t+\theta,\omega)\big|_{\substack{t=0\\ \theta=0}}=x,\ \ \alpha_j(t,\omega)\big|_{t=0}=\alpha_j,\ \ j=1,2\,. \tag{17}$$

Відомо [7, 13], що розв'язок (15)–(17) існує та єдиний з імовірністю 1 за умовами теореми 1.

Нехай

$$u^0(s)\equiv U^0(x(t,\omega))\,,$$

тоді допустима система

$$\{\alpha_j^0(t,\omega),\ j=\overline{1,3r+1},\ w_l^0(t,\omega),\ l=\overline{r+1,2r+1},$$
$$\widetilde{\nu}_k^0(t,\upsilon,\omega),\ k=\overline{2r+2,3r+2},\ u^0(t,\omega),\,t\ge 0\}$$

задає оптимальне керування, тобто для довільної допустимої системи (12) матимемо, що

$$E\{k(|x(t,\omega)|)\}\le E\{k(|x^u(t,\omega)|)\}\,.$$

Лема 1. Нехай система (12) — сукупність n-вимірних $\{F_t,\mathfrak{R}_y(\mathbf{Y})\}$-узгоджених процесів, визначених на модифікованому просторі $(\Omega,F\cap\mathfrak{R},P)$ з потоком $\{F_t\cap\mathfrak{R}(x)\}$; подібна сукупність

$$\{\widetilde{\alpha}_j(t,\omega),\,j=\overline{1,3r+1},\,\widetilde{w}_l(t,\omega),\,l=\overline{r+1,2r+1},\,\widetilde{\widetilde{\nu}}_k(t,\upsilon,\omega),\,k=\overline{2r+2,3r+2},\,\widetilde{u}(t,\omega)\}$$

визначена на іншому модифікованому просторі $(\widetilde{\Omega},\widetilde{F}\cap\widetilde{\mathfrak{R}},\widetilde{P})$ з потоком $\{\widetilde{F}_t\cap\widetilde{\mathfrak{R}}(x)\}$.

Тоді існує модифікований простір $(\hat{\Omega},\hat{F}\cap\hat{\mathfrak{R}},\hat{P})$ з потоком $\{\hat{F}_t\cap\hat{\mathfrak{R}}(x)\}$ і сукупність

$$\{\hat{\alpha}_j(t,\omega),\,j=\overline{1,3r+1},\,\hat{w}_l(t,\omega),\,l=\overline{r+1,2r+1},\,\hat{\widetilde{\nu}}_k(t,\upsilon,\omega),\,k=\overline{2r+2,3r+2},\,\hat{u}(t,\omega)\}$$

n-вимірних $\{\widetilde{F}_t\cap\widetilde{\mathfrak{R}}(x)\}$-узгоджених процесів таких, що:

1) $\{x(t,\omega)$, $\alpha_j(t,\omega)$, $j=\overline{1,3r+1}$, $w_k(t,\omega)$, $k=\overline{r+1,2r+1}$, $\widetilde{\nu}_l(t,A,\omega)$, $l=\overline{2r+2,3r+2}$, $A\in\mathfrak{R}\}\overset{L}{\approx}\{\hat{x}(t,\omega)$; $\hat{\alpha}_j(t,\omega)$, $j=\overline{1,3r+1}$, $\hat{w}_l(t,\omega)$, $l=\overline{r+1,2r+1}$, $\hat{\widetilde{\nu}}_k(t,A,\omega)$, $k=\overline{2r+2,3r+2}$, $A\in\hat{\mathfrak{R}}\}$;

2) $\{\widetilde{x}(t,\omega)$, $\widetilde{\alpha}_j(t,\omega)$, $j=\overline{1,3r+1}$, $\widetilde{w}_k(t,\omega)$, $k=\overline{r+1,2r+1}$, $\widetilde{\widetilde{\nu}}_l(t,A,\omega)$, $l=\overline{2r+2,3r+2}$, $A\in\widetilde{\mathfrak{R}}\}\overset{L}{\approx}\{\hat{x}(t,\omega)$; $\hat{\alpha}_j(t,\omega)$, $j=\overline{1,3r+1}$, $\hat{w}_l(t,\omega)$, $l=\overline{r+1,2r+1}$, $\hat{\widetilde{\nu}}_k(t,v,\omega)$, $k=\overline{2r+2,3r+2}$, $A\in\hat{\mathfrak{R}}\}$;

3) $\{\hat{w}_k(t,\omega), k=\overline{r+1,2r+1}\}$ — n-вимірні вінерові процеси;

4) $\{\hat{\widetilde{\nu}}_k(t,v,\omega), k=\overline{2r+2,3r+2}, A\in\hat{\mathfrak{R}}\}$ — $n\times n$-вимірні центровані пуассонові міри.

Тут символ $\overset{L}{\approx}$ означає, що процеси мають однакові закони розподілу.

Доведення леми 1 аналогічно до доведення леми VI–2.1 [7].

За наведеними припущеннями справджується наступна теорема.

Теорема 2. Нехай (12) — довільна задана допустима система та для заданого $x\in\mathbf{R}^n$ розв'язок $\{x^u(t,\omega)\}$ визначається СДФР (13). Тоді на деякому модифікованому ймовірнісному просторі можна побудувати $\mathbf{R}^n$-вимірні процеси $\{\widetilde{x}^u(t,\omega)\}$, $\{\widetilde{x}^0(t,\omega)\}$ та $\{\widetilde{\alpha}_j^u(t,\omega), j=\overline{1,3r+2}\}$, $\{\widetilde{\alpha}_j^0(t,\omega), j=\overline{1,3r+2}\}$ такі, що:

1) $\{x^u(t,\omega)\}\overset{L}{\approx}\{\widetilde{x}^u(t,\omega)\}$;

2) $\{x^0(t,\omega)\}\overset{L}{\approx}\{\widetilde{x}^0(t,\omega)\}$;

3) $|\widetilde{x}^0(t,\omega)|\le|\widetilde{x}^u(t,\omega)|$ для довільного $t\ge 0$ з імовірністю 1;

4) $\{\widetilde{\alpha}_j^0(t,\omega), j=\overline{1,3r+2}\}\overset{L}{\approx}\{\widetilde{\alpha}_j^u(t,\omega), j=\overline{1,3r+2}\}$ з імовірністю 1.

Доведення. Нехай (12) — задана допустима система, для якої (13), (14) є розв'язком рівняння (15)–(17).

Позначимо $\{x^0(t),\alpha^0(t),w^0(t),\widetilde{\nu}^0(t,A)\}$ розв'язок рівняння (15)–(17) та випустимо для зручності відповідні індекси.

Виберемо $o(n)$-значну борелеву функцію $\{p_{ij}(x)\}$ таку, що

$$p_{ij}(x)=\begin{cases}\dfrac{x^i}{|x|}, & x\equiv(x^1,x^2,\dots,x^n)\ne 0,\\ \delta_{1j}, & x=0.\end{cases}$$

Нехай

$$\overline{\alpha}^0(t,\omega)=\int_0^t p(x^0(s))ds,\ \ \overline{w}(t)=\int_0^t p(x^u(s))dw(s),\ \ \overline{w}^0(t)=\int_0^t p(x^0(s))dw^0(s),$$

$$\overline{\widetilde{\nu}}(t,\omega)=\int_0^t\int_{\mathbf{V}} p(x^u(s,\omega))\,\widetilde{\nu}^0(dv,ds,\omega),\ \ \overline{\widetilde{\nu}}^0(t,\omega)=\int_0^t\int_{\mathbf{V}} p(x^0(s,\omega))\widetilde{\nu}^0(dv,ds,\omega).$$

Тоді отримаємо

$$x_u(t)=x+\int_0^t\sum_{j=r+1}^{2r+1}\alpha_j^{-1}(s,\omega)p^{-1}(x^u(s,\omega))d\,\overline{w}(t,\omega)+$$

$$+\int_0^t \int_{\mathbf{V}} \sum_{k=2r+2}^{3r+2} \alpha_k^{-1}(s,\omega) p^{-1}(x^u(s,\omega)) \widetilde{\nu}(dv, ds, \omega) + \int_0^t u(s) ds,$$

$$x^0(t,\omega) = x + \int_0^t \sum_{j=r+1}^{2r+1} \alpha_j^{-1}(s,\omega) p^{-1}(x^0(s,\omega)) d\overline{w}^0(t,\omega) +$$

$$+\int_0^t \int_{\mathbf{V}} \sum_{k=2r+2}^{3r+2} \alpha_k^{-1}(s,\omega)\, p^{-1}(x^0(s,\omega)) \overline{\widetilde{\nu}}^0(dv, ds, \omega) + \int_0^t U(x^0(s,\omega)) ds.$$

Застосовуючи лему 1 до $\{x^u(t,\omega), \overline{w}(t,\omega), \overline{\widetilde{\nu}}(t, A, \omega)\}$ та $\{x^0(t,\omega),\ \overline{w}^0(t,\omega),$ $\overline{\widetilde{\nu}}^0(t, A, \omega)\}$, одержимо сукупність $\{\hat{x}^u(t,\omega), \hat{x}^0(t,\omega), \hat{w}(t,\omega), \hat{\widetilde{\nu}}(t, A, \omega)\}$ відповідних процесів на ймовірнісному просторі з потоком $\{\hat{F}_t \cap \hat{\mathfrak{R}}(x)\}$ таких, що $\{\hat{w}(t,\omega)\}$ – $n \times r$-вимірний $\hat{F}_t \cap \hat{\mathfrak{R}}(x)$ вінеровий процес, $\{\hat{\widetilde{\nu}}(t, A, \omega)\} \in \hat{F}_t \cap \hat{\mathfrak{R}}(x)$ – $n \times r$-вимірна центрована пуассонова міра і для множини $A \in \mathfrak{R}$ виконуються співвідношення

$$\{x^u(t,\omega), \overline{w}(t,\omega), \overline{\widetilde{\nu}}(t, A, \omega)\} \overset{L}{\approx} \{\hat{x}_u^t(t,\omega), \overline{w}(t,\omega), \hat{\widetilde{\nu}}(t, A, \omega)\},$$

$$\{x^0(t,\omega), w^0(t,\omega), \overline{\widetilde{\nu}}^0(t, A, \omega)\} \overset{L}{\approx} \{\hat{x}^0(t,\omega), w^0(t,\omega), \hat{\overline{\widetilde{\nu}}}^0(t, A, \omega)\}.$$

Вочевидь, що існує $\hat{F}_t \cap \hat{\mathfrak{R}}(x)$-вимірний n-вимірний процес $\{u(t)\}$ такий, що $|\hat{u}(t)| \le 1$ для довільного $t \ge 0$ і

$$\hat{x}_u(t,\omega) = x + \int_0^t \sum_{j=r+1}^{2r+1} \alpha_j^{-1}(s,\omega) p^{-1}(\hat{x}^u(s,\omega)) d\hat{w}(s,\omega) +$$

$$+\int_0^t \int_{\mathbf{V}} \sum_{k=2r+2}^{3r+2} \alpha_k^{-1}(s,\omega) p^{-1}(\hat{x}_u(s,\omega)) \hat{\widetilde{\nu}}(dv, ds, \omega) + \int_0^t \hat{u}(s,\omega) ds.$$

Для спрощення викладок покладемо, що $\sum_{j=r+1}^{2r+1} \alpha_j^{-1}(t,\omega) = 1$, $\sum_{k=2r+2}^{3r+2} \alpha_k^{-1}(t,\omega) = 1$.

Застосовуючи формулу Іто–Скорохода до $x_1(t,\omega) = |\hat{x}^0(t,\omega)|^2$ та $x_2(t,\omega) = |\hat{x}^u(t,\omega)|^2$, одержимо

$$dx_2(t) = 2\hat{x}^u(t,\omega) p^{-1}(\hat{x}^u(t,\omega)) dw(t,\omega) + \int_{\mathbf{V}} [|\hat{x}^u(t,\omega) + p^{-1}(\hat{x}^u(t,\omega))|^2 -$$

$$-|\hat{x}^u(t,\omega)|^2\,]_1 \widetilde{\nu}(dv, dt) + \{2\hat{x}^u(t,\omega)\hat{u}(t,\omega) + n + \int_{\mathbf{V}} [|\hat{x}^u(t,\omega) +$$

$$+p^{-1}(\hat{x}^u(t,\omega))|^2 - |\hat{x}^u(t,\omega)|^2 - 2\hat{x}^u(t,\omega) p^{-1}(\hat{x}^u(t,\omega))]_2\, \Pi(du)\} dt =$$

$$= 2|\hat{x}^u(t,\omega)|\, d\hat{w}^1(t,\omega) + \int_{\mathbf{V}} [|\hat{x}^u(t,\omega) + p^{-1}(\hat{x}^u(t,\omega))|^2 - |\hat{x}^u(t,\omega)|^2\,]_1 \widetilde{\nu}(dv, dt) +$$

$$+\{2\hat{x}^u(t,\omega)\, \hat{u}(t,\omega) + n + \int_{\mathbf{V}} [|\hat{x}^u(t,\omega) + p^{-1}(\hat{x}^u(t,\omega))|^2 -$$

$$-|\hat{x}^u(t,\omega)|^2 - 2\hat{x}^u(t,\omega) p^{-1}(\hat{x}^u(t,\omega))]_2\, \Pi(dv)\} dt = 2\sqrt{x_2(t,\omega)}\, d\hat{w}^1(t,\omega) +$$

$$+\int_{\mathbf{V}} [|\hat{x}^u(t,\omega) + p^{-1}(\hat{x}^u(t,\omega))|^2 - |\hat{x}^u(t,\omega)|^2\,]_1 \widetilde{\nu}(dv, dt) +$$

$$+\{2\hat{x}^u(t,\omega)\,\hat{u}(t,\omega)+n+\int_{\mathbf{V}}[|\hat{x}^u(t,\omega)+p^{-1}(\hat{x}^u(t,\omega))|^2-|\hat{x}^u(t,\omega)|^2-$$

$$-2\hat{x}^u(t,\omega)\,p^{-1}(\hat{x}^u(t,\omega))]_2\,\Pi(dv)dt\,,$$

$$dx_1(t,\omega)=2\hat{x}^0(t,\omega)\,p^{-1}(\hat{x}^0(t,\omega))d\hat{w}(t,\omega)+$$

$$+\int_{\mathbf{V}}[|\hat{x}^0(t,\omega)+p^{-1}(\hat{x}^0(t,\omega))|^2-|\hat{x}^0(t,\omega)|^2\,]_1\,\widetilde{\nu}^0(dv,dt)+$$

$$+\{2\hat{x}^0(t,\omega)U(x^0(t,\omega))+n+\int_{\mathbf{V}}[|\hat{x}^0(t,\omega)+p^{-1}(\hat{x}^0(t,\omega))|^2-$$

$$-|\hat{x}^0(t,\omega)|^2-2\hat{x}^0(t,\omega)\,p^{-1}(\hat{x}^0(t,\omega))]_2\,\Pi(dv)dt=$$

$$=2|\hat{x}^0(t,\omega)|\,d\hat{w}^1(t,\omega)+\int_{\mathbf{V}}[|\hat{x}^0(t,\omega)+p^{-1}(\hat{x}^0(t,\omega))|^2-$$

$$-|\hat{x}^0(t,\omega)|^2\,]_1\,\hat{\widetilde{\nu}}^0(dv,dt)+\{-2|\hat{x}^0(t,\omega)|+n+\int_{\mathbf{V}}[|\hat{x}^0(t,\omega)+p^{-1}(\hat{x}^0(t,\omega))|^2-$$

$$-|\hat{x}^0(t,\omega)|^2-2\hat{x}^0(t,\omega)\,p^{-1}(\hat{x}^0(t,\omega))]_2\,\Pi(dv)\}dt=2\sqrt{x_1(t,\omega)}d\hat{w}^1(t,\omega)+$$

$$+\int_{\mathbf{V}}[|\hat{x}^0(t,\omega)+p^{-1}(\hat{x}^0(t,\omega))|^2-|\hat{x}^0(t,\omega)|^2\,]_1\,\overline{\widetilde{\nu}}^0(dv,dt)+\{-2\sqrt{x_1(t,\omega)}+n+$$

$$+\int_{\mathbf{V}}[|\hat{x}^0(t,\omega)+p^{-1}(\hat{x}^0(t,\omega))|^2-|\hat{x}^0(t,\omega)|^2-2\hat{x}^0(t,\omega)\,p^{-1}(\hat{x}^0(t,\omega))]_2\,\Pi(dv)\}\,dt\,,$$

де $\hat{w}(t)=(\hat{w}^1(t),\hat{w}^2(t),\ldots,\hat{w}^n(t))$.

Зауважимо, що

$$[xp^{-1}(x)]_i=\sum_j x_j\,(p^{-1}(x_j))_1=\sum_j x_j\,p_{ij}(x)=\delta_{i1}|x|\,.$$

Нехай

$$b(t,n)=2\sqrt{x\vee 0};$$

$$b_1(t,x)=b_2(t,x)=-2\sqrt{x\vee 0}+n+$$

$$+\int_{\mathbf{V}}[|\hat{x}^u(t,\omega)+p^{-1}(\hat{x}^u(t,\omega))|^2-|\hat{x}^u(t,\omega)|^2-2\hat{x}^u(t,\omega)\,p^{-1}(\hat{x}^u(t,\omega))]_2\,\Pi(dv)\,,$$

$$\beta_2(t,\omega)=2\hat{x}^u(t,\omega)\,\hat{u}(t,\omega)+n+\int_{\mathbf{V}}[|\hat{x}^u(t,\omega)+p^{-1}(\hat{x}^u(t,\omega))|^2-$$

$$-|\hat{x}^u(t,\omega)|^2-2\hat{x}^u(t,\omega)\,p^{-1}(\hat{x}^u(t,\omega))]_2\,\Pi(dv)\,.$$

Тоді вочевидь, що $\beta_1(t,\omega)=b_1(t,x_1(t,\omega))$ і

$$\beta_2(t,\omega)\geq -2|\hat{x}^u(t,\omega)|+n+\int_{\mathbf{V}}[|\hat{x}^u(t,\omega)+p^{-1}(\hat{x}^u(t,\omega))|^2-$$

$$-|\hat{x}^u(t,\omega)|^2-2\hat{x}^u(t,\omega)\,p^{-1}(\hat{x}^u(t,\omega))]_2\,\Pi(dv)=b_2(t,x_2(t,\omega))\,.$$

Має місце [7, 13, 15] потраєкторна єдиність розв'язку для СДФР (10), (11). Отже, можна застосувати друге твердження теореми 1 і отримати нерівність $x_1(t,\omega)\leq x_2(t,\omega)\pmod P$ для довільного $t\geq 0$. Теорему 2 доведено.

ВИСНОВКИ

У роботі доведено, що для допустимих систем вигляду (12) існує мінімальне значення математичного сподівання $E\{||x_t^u||\}$. Розглянуто теорему порівняння для СДФР під дією зовнішніх збурень типу випадкових процесів, встановлено факт існування оптимального керування для цього класу систем.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Bellman R. Dynamic programming and stochastic control processes. *Information and Control.* 1958. Vol. 1, Iss. 3. P. 228–239. https://doi.org/10.1016/S0019-9958(58)80003-0.
2. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. Київ: Наук. думка, 1968. 354 с.
3. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их применение. Київ: Наук. думка, 1982. 612 с.
4. Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. Об одном методе построения приближенного синтеза оптимального управления. *Доповіді АН УРСР. Сер. А*. 1978. № 8. С. 32–36.
5. Toshio Yamada. On a comparison theorem for solutions of stochastic differential equations and its applications. *Journal Math. Kyoto Univ*. 1973. Vol. 13(3). P. 497–512. https://doi.org/10.1215/kjm/1250523321.
6. Tokuzo Shiga. Diffusion processes in population genetics. *Journal Math. Kyoto Univ*. 1981. Vol. 21(1). P. 133–151.
7. Ikeda N., Watanabe S. Stochastic differential equations and diffusion processes. Amsterdam: North-Holland Mathematical Library, 1989. 568 p.
8. Knopov P.S. Optimization and identification of stochastic systems. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2023. Vol. 59, N 3. P. 375–384. https://doi.org/10.1007/s10559-023-00572-4.
9. Царьков Е.Ф., Ясинский В.К. Квазилинейные стохастические дифференциальные уравнения. Рига: Ориентир, 1992. 328 с.
10. Oksendal B. Stochastic differential equations an introduction with applications. Sixth edition. Heidelberg; New York; Dordrecht; London: Springer Science + Business Media, 2013. https://doi.org/10.1007/978-3-642-14394-6.
11. Aström K.J. Introduction to stochastic control theory. Dover Publications, 2006. 320 p.
12. Yurchenko I.V. The comparison theorem for the solution of the stochastic differential functional equations. Міжнародна математична конференція, присвячена пам’яті Ганса Гана. Матеріали. Чернівці: Рута, 1995. С. 322–332.
13. Yasyns’kyi V.K., Sverdan M.L., Yurchenko I.V. On one problem of stochastic control. *Ukrainian Mathematical Journal*. 1995. Vol. 47, N 11. P. 1788–1797. https://doi.org/10.1007/BF01057927.
14. Свердан М.Л., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Стійкість у стохастичному моделюванні складних динамічних систем. Снятин: Над Прутом, 1996. 448 с.
15. Ясинський В.К., Юрченко І.В. Стійкість та оптимальне керування в стохастичних динамічних системах з випадковими операторами. Видання друге, доповнене. Чернівці: Технодрук, 2019. 258 с.

V.K. Yasynskyy, I.V. Yurchenko

ON THE EXISTENCE OF OPTIMAL CONTROL FOR STOCHASTIC FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS UNDER THE INFLUENCE OF EXTERNAL DISTURBANCES

Abstract. The article discusses the comparison theorem for solutions of stochastic functional differential equations under the influence of external disturbances and its application to one stochastic control problem.

Keywords: comparison theorem, stochastic control, stochastic functional differential equations.

Надійшла до редакції 30.01.2024