УДК 519.8

А.М. ШУТОВСЬКИЙ
Волинський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна,
e-mail: *sh93ar@gmail.com.*

ДЕЯКІ АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ТРИГАРМОНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Анотація. Розглянуто оптимізаційну задачу для тригармонійного рівняння за наявності певних граничних умов. Внаслідок цього було побудовано тригармонійний інтеграл Пуассона у декартових координатах для верхньої півплощини. Досліджено асимптотичні властивості цього оператора на класах Ліпшиця в рівномірній метриці. Знайдено точну рівність для верхньої межі відхилення функцій класу Ліпшиця від тригармонійного інтеграла Пуассона, визначеного в декартових координатах для верхньої півплощини в метриці простору C. Засвідчено наявність зв'язку між методами теорії наближень і принципами теорії оптимальних рішень.

Ключові слова: оптимізаційна задача, клас функцій Ліпшиця, рівномірна метрика, тригармонійний інтеграл Пуассона.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Для ефективного розв'язання задач теорії оптимальних рішень виникає потреба в розширенні класів функцій. Так, для пошуку глобального мінімуму довільної кривої методом побудови оптимального покриття вихідного інтервалу невизначеності [1] застосовують умову

$$|Q(x_1)-Q(x_2)|\le|x_1-x_2|, \tag{1}$$

де $Q(x)$ — функція, яка мінімізується. Множину таких функцій $Q(x)$, що задовольняє умова (1), називають класом функцій Ліпшиця, який у цій роботі позначатимемо $Lip1$.

Так, водночас тільки класів неперервних функцій не вистачає як для розв'язання багатовимірних варіаційних задач, так і для вивчення властивостей хвильових рівнянь і рівнянь гідродинаміки. Внаслідок цього почали розглядати деякі типи лінійних рівнянь у частинних похідних n-го порядку з інших класів функцій (див. [2–6]).

У своїй основоположній роботі [7] Соболєв С.Л. запровадив узагальнені розв'язки основних типів лінійних рівнянь у частинних похідних n-го порядку (хвильове рівняння, рівняння Лапласа, рівняння теплопровідності тощо). У цій роботі узагальнені розв'язки розглядаються як ліміти класичних рівнянь, до того ж ліміти запропоновано в класах інтегровних функцій [8]. Таке розширення понять дає змогу розв'язувати задачі з досить загальними правими частинами і коефіцієнтами рівнянь.

Поміж багатьох рівнянь такого типу особлива увага під час розв'язання задач оптимізації приділяється диференціальному рівнянню шостого порядку

$$(\nabla^2)^3 U = 0 \tag{2}$$

у частинних похідних, яке називатимемо тригармонійним рівнянням.

Ця стаття присвячена дослідженню апроксимативних властивостей розв'язків тригармонійних рівнянь (2) (за наявності певних граничних умов) на класах функцій Ліпшиця.

Диференціальний оператор ∇^2 у рівнянні (2) називатимемо оператором Лапласа (див. [9–11]). Вочевидь, що явний вигляд оператора ∇^2 залежить від того, в якій системі координат розв'язується задача. Так, наприклад, якщо поставлену задачу прикладного характеру моделювати за допомогою крайової задачі на півплощині, то зручно використовувати оператор Лапласа $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ саме в декартових координатах, що безпосередньо застосовують в теорії динамічних систем та теорії ігрових задач динаміки [12–14]. Поряд з тим у деяких сучасних дослідженнях використовують оператор Лапласа $\nabla^2 = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$ у комплексних змінних $z = x + iy$ та $\bar{z} = x - iy$ (наприклад, [15]), що значно спрощує процес розв'язування широкого спектра задач у теорії оптимальних рішень. Що ж стосується Лапласіана $\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\rho\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ в полярній системі координат, то він використовується з метою розв'язування цілого спектра задач прикладного характеру [16–22], які моделюють за допомогою крайових задач в одиничному крузі $(0 < \rho < 1)$.

Якщо йдеться про розв'язок тригармонійного рівняння (2) в одиничному крузі, то таке диференціальне рівняння шостого порядку в частинних похідних обов'язково потрібно доповнити трьома граничними умовами:

$$\lim_{\rho \to 1} U(\rho, x) = f(x), \quad \lim_{\rho \to 1} \frac{\partial U(\rho, x)}{\partial \rho} = 0, \quad \lim_{\rho \to 1} \frac{\partial^2 U(\rho, x)}{\partial \rho^2} = 0. \tag{3}$$

Розв'язком тригармонійного рівняння (2) в одиничному крузі за наявності граничних умов (3) буде тригармонійний інтеграл Пуассона

$$U(\rho, x) = \frac{(1-\rho^2)^3}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{6\rho^2 (\cos t)^2 - \rho(\rho^2 + 9)\cos t + 4}{(1 - 2\rho\cos t + \rho^2)^3} f(x+t)\, dt \tag{4}$$

в одиничному крузі. Визначення різного роду властивостей, які є актуальними для подальших прикладних застосувань тригармонійних інтегралів Пуассона саме в одиничному крузі, відображені в циклі робіт [23–26].

Якщо проаналізувати ядро тригармонійного інтеграла Пуассона (4)

$$K(\rho, t) = \frac{(1-\rho^2)^3}{8} \frac{6\rho^2 (\cos t)^2 - \rho(\rho^2 + 9)\cos t + 4}{(1 - 2\rho\cos t + \rho^2)^3}, \tag{5}$$

то легко переконатися в тому, що воно є знакозмінним на відміну від ядер гармонійного [27] та бігармонійного [28] інтегралів Пуассона (які є додатними). Такий факт стає на заваді прикладному застосуванню тригармонійного оператора (4) в теорії оптимальних рішень, яка може базуватися лише на найбільш оптимальних розв'язках крайових задач. Оскільки додатні оператори є більш оптимальними розв'язками у порівнянні зі знакозмінними операторами, то в цій роботі будуватимемо тригармонійний інтеграл Пуассона в декартових координатах у верхній півплощині. Розглядатимемо випадок граничних умов [29], які дають змогу отримати тригармонійний інтеграл Пуассона у верхній півплощині саме з додатним інтегральним ядром, що значно розширить спектр прикладних застосувань цього оператора. Основна мета розглядуваного дослідження — вивчення апроксимативних властивостей розв'язків тригармонійних рівнянь (2) в декартових координатах за наявності певних граничних умов на межі верхньої півплощини на класах функцій Ліпшиця в рівномірній метриці.

НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ТРИГАРМОНІЙНИМИ ІНТЕГРАЛАМИ ПУАССОНА У ВЕРХНІЙ ПІВПЛОЩИНІ

Нехай C — простір неперервних і сумовних функцій, в якому норма функції визначається за допомогою співвідношення $\|f\| = \max_x |f(x)|$. Тоді у встановлених вище позначеннях має місце твердження.

Теорема 1. Для функцій класу Ліпшиця $Lip1$ має місце точна рівність

$$\mathcal{E}(Lip1; P_3(y))_C = \sup_{f \in Lip1} \| f(x) - P_3(x, y) \|_C = \frac{4y}{3\pi}, \tag{6}$$

де величина

$$P_3(x, y) = \frac{8y^5}{3\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x+t)\,dt}{(t^2 + y^2)^3} \tag{7}$$

є тригармонійним інтегралом Пуассона на верхній півплощині у декартових координатах.

Доведення. Якщо представити функцію $f(x)$ у вигляді інтеграла Фур'є

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(q) e^{iqx} dq, \tag{8}$$

то для тригармонійного інтеграла Пуассона на верхній півплощині можна побудувати інтеграл

$$P_3(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(q, y) \tilde{f}(q) e^{iqx} dq. \tag{9}$$

Для верхньої півплощини виконується умова $y > 0$. Нехай тепер $y \to 0$. У такому випадку з інтегрального представлення (9) випливає, що

$$\lim_{y \to 0} P_3(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \{\lim_{y \to 0} A(q, y)\} \tilde{f}(q) e^{iqx} dq. \tag{10}$$

Нехай для двовимірної функції $A(q, y)$ виконується гранична умова

$$\lim_{y \to 0} A(q, y) = 1. \tag{11}$$

Якщо підставити граничну умову (11) в інтегральне представлення (10), то з урахуванням інтеграла Фур'є (8) можна дійти висновку, що

$$\lim_{y \to 0} P_3(x, y) = f(x). \tag{12}$$

Аналогічно до [30] диференціюємо інтегральне представлення (9) за y та отримуємо інтегральне представлення

$$\frac{\partial P_3(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial A(q, y)}{\partial y} \tilde{f}(q) e^{iqx} dq. \tag{13}$$

Нехай тепер $y \to 0$. Тоді з інтегрального представлення (13) випливає, що

$$\lim_{y \to 0} \frac{\partial P_3(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \lim_{y \to 0} \frac{\partial A(q, y)}{\partial y} \right\} \tilde{f}(q) e^{iqx} dq. \tag{14}$$

Нехай також для двовимірної функції $\dfrac{\partial A(q, y)}{\partial y}$ виконана гранична умова

$$\lim_{y \to 0} \frac{\partial A(q, y)}{\partial y} = 0. \tag{15}$$

Якщо задіяти граничну умову (15), то інтегральне представлення (14) перетвориться на граничну умову

$$\lim_{y\to 0}\frac{\partial P_3(x,y)}{\partial y}=0. \tag{16}$$

Диференціюючи інтегральне представлення (13) за y, отримуємо інтегральне представлення

$$\frac{\partial^2 P_3(x,y)}{\partial y^2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2 A(q,y)}{\partial y^2}\tilde{f}(q)e^{iqx}dq. \tag{17}$$

Нехай тепер $y\to 0$. Тоді з інтегрального представлення (17) випливає, що

$$\lim_{y\to 0}\frac{\partial^2 P_3(x,y)}{\partial y^2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\lim_{y\to 0}\frac{\partial^2 A(q,y)}{\partial y^2}\right\}\tilde{f}(q)e^{iqx}dq. \tag{18}$$

Нехай для двовимірної функції $\dfrac{\partial^2 A(q,y)}{\partial y^2}$ виконана гранична умова

$$\lim_{y\to 0}\frac{\partial^2 A(q,y)}{\partial y^2}=-\frac{q^2}{3}. \tag{19}$$

Якщо підставити граничну умову (19) в інтегральне представлення (18) , то з урахуванням похідної другого порядку інтеграла Фур'є (8) можна дійти граничної умови

$$\lim_{y\to 0}\frac{\partial^2 P_3(x,y)}{\partial y^2}=\frac{f''(x)}{3}. \tag{20}$$

Якщо розглянути суму частинної похідної другого порядку (17) та частинної похідної другого порядку

$$\frac{\partial^2 P_3(x,y)}{\partial x^2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(iq)^2 A(q,y)\tilde{f}(q)e^{iqx}dq, \tag{21}$$

то можна дійти тотожності

$$\nabla^2 P_3(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}B(q,y)\tilde{f}(q)e^{iqx}dq, \tag{22}$$

де

$$B(q,y)=\frac{\partial^2 A(q,y)}{\partial y^2}-q^2 A(q,y). \tag{23}$$

Якщо впливати оператором $(\nabla^2)^2$ на інтегральне представлення (22) , то можна дійти результату

$$(\nabla^2)^3 P_3(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{\partial^2 D(q,y)}{\partial y^2}-q^2 D(q,y)\right\}\tilde{f}(q)e^{iqx}dq, \tag{24}$$

де

$$D(q,y)=\frac{\partial^2 B(q,y)}{\partial y^2}-q^2 B(q,y). \tag{25}$$

Якщо двовимірна функція $D(q,y)$ є розв'язком диференціального рівняння другого порядку

$$\frac{\partial^2 D(q,y)}{\partial y^2}-q^2 D(q,y)=0, \tag{26}$$

то інтегральне представлення (24) перетворюється на тригармонійне рівняння

$$(\nabla^2)^3 P_3(x, y) = 0 \tag{27}$$

з граничними умовами (12), (16) та (20).

З урахуванням позначення (25) диференціальне рівняння другого порядку (26) перетвориться на диференціальне рівняння четвертого порядку

$$\frac{\partial^4 B(q, y)}{\partial y^4} - 2q^2 \frac{\partial^2 B(q, y)}{\partial y^2} + q^4 B(q, y) = 0. \tag{28}$$

Якщо врахувати позначення (23), то диференціальне рівняння четвертого порядку (28) перетвориться на диференціальне рівняння шостого порядку

$$\frac{\partial^6 A(q, y)}{\partial y^6} - 3q^2 \frac{\partial^4 A(q, y)}{\partial y^4} + 3q^4 \frac{\partial^2 A(q, y)}{\partial y^2} - q^6 A(q, y) = 0. \tag{29}$$

Диференціальне рівняння шостого порядку (29) разом з граничними умовами (11), (15) та (19) утворюють задачу Коші, розв'язок якої має такий вигляд:

$$A(q, y) = \left(1 + y|q| + \frac{y^2 q^2}{3}\right) e^{-y|q|}. \tag{30}$$

Якщо інтеграл Фур'є для функції $f(x)$ обчислювати за формулою (8), то Фур'є-образ $\tilde{f}(q)$ визначаємо так:

$$\tilde{f}(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') e^{-iqx'} dx'. \tag{31}$$

Підставляючи Фур'є-образ (31) в інтегральне представлення (9), отримуємо подвійний інтеграл

$$P_3(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} A(q, y) e^{iq(x-x')} dq \right\} f(x') dx'. \tag{32}$$

Оскільки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A(q, y) e^{iq(x-x')} dq = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + y|q| + \frac{y^2 q^2}{3}\right) e^{-y|q|} e^{iq(x-x')} dq =$$

$$= \frac{16 y^5}{3\{(x-x')^2 + y^2\}^3}, \tag{33}$$

то подвійний інтеграл (32) набуде такого вигляду:

$$P_3(x, y) = \frac{8y^5}{3\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x') dx'}{\{(x-x')^2 + y^2\}^3}. \tag{34}$$

Якщо запровадити нову змінну інтегрування $t = x' - x$, то замість інтеграла (34) матимемо вже інтеграл (7). Використовуючи методи робіт [31, 32], на основі співвідношення (7) отримуємо інтегральне представлення

$$P_3(x, y) - f(x) = \frac{8y^5}{3\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\{f(x+t) - f(x)\} dt}{(t^2 + y^2)^3} \tag{35}$$

для величини $P_3(x, y) - f(x)$. Оскільки для функцій класу Ліпшиця $Lip1$ виконується умова

$$|f(x+t) - f(x)| \le |t|, \tag{36}$$

то аналогічно до [33, 34] з інтегрального представлення (35) випливає оцінка

$$\mathcal{E}\,(Lip1; P_3\,(y))_C = \sup_{f \in Lip1} ||\, f(x) - P_3\,(x, y)||_C \le \frac{16y^5}{3\pi} \int_0^{+\infty} \frac{tdt}{(t^2 + y^2)^3}. \qquad (37)$$

Оскільки в класі $Lip1$ існує функція $f\,(t) = |\,t\,|$, для якої нерівність (37) перетворюється в рівність, то

$$\mathcal{E}\,(Lip\,1; P_3\,(y))_C = \frac{16y^5}{3\pi} \int_0^{+\infty} \frac{tdt}{(t^2 + y^2)^3}. \qquad (38)$$

Якщо взяти до уваги інтеграл

$$4\int_0^{+\infty} \frac{tdt}{(t^2 + y^2)^3} = -\left.\frac{1}{(t^2 + y^2)^2}\right|_0^{+\infty} = \frac{1}{y^4},$$

то тотожність (38) перетвориться на результат (6). Теорему доведено.

Отже, у процесі дослідження цієї роботи розв'язано оптимізаційну задачу тригармонійного рівняння в декартових координатах у верхній півплощині з граничними умовами (12), (16) та (20) на класах функцій Ліпшиця в рівномірній метриці. Отримано точну рівність для верхньої межі відхилення функцій класу Ліпшиця від тригармонійного інтеграла Пуассона, визначеного у верхній півплощині. Визначені апроксимативні властивості тригармонійного оператора Пуассона у верхній півплощині на класах Ліпшиця в рівномірній метриці підтверджують актуальність широкого спектра вже розв'язаних задач прикладного характеру [35–37], що можуть сприяти на подальші дослідження.

Тригармонійний інтеграл Пуассона в одиничному крузі (4) є оператором зі знакозмінним ядром, тоді як побудований у цьому дослідженні тригармонійний оператор Пуассона (7) на верхній півплощині є вже додатним оператором. Отриманий результат безпосередньо пов'язаний зі специфікою граничних умов (12), (16) та (20) на межі верхньої півплощини, які застосовували для розв'язання тригармонійного рівняння (2) в декартових координатах.

Оскільки введений у цій роботі тригармонійний інтеграл Пуассона у верхній півплощині є лінійним додатним оператором із дельта-подібним ядром [38, 39], то він є одним із найкращих математичних інструментів для розв'язування задач оптимізаційного характеру. З практики сучасних прикладних досліджень [40–43] випливає, що оператори з дельта-подібними ядрами мають значно ширший спектр застосування у порівнянні з операторами інших типів. Проаналізований підхід у побудові додатного тригармонійного оператора може стати поштовхом для побудови багатьох інших полігармонійних інтегралів Пуассона з додатними інтегральними ядрами. А це зможе значно розширити список математичних об'єктів, придатних для застосування у теорії оптимальних рішень і для розв'язування багатьох оптимізаційних задач у теорії динамічних систем, теорії ігрових задач динаміки тощо.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Батищев Д.И. Методы оптимального проектирования. Москва: Радио и связь, 1984. 248 с.

2. Chikrii A.A., Eidelman S.D. Game problems for fractional quasilinear systems. *Computers & Mathematics with Applications*. 2002. Vol. 44, Iss. 7. P. 835–851. https://doi.org/10.1016/S0898-1221(02)00197-9.

3. Pilipenko Yu.V., Chikrij A.A. The oscillation processes of conflict control. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*. 1993. Vol. 57, Iss. 3. P. 3–14.

4. Kharkevych Yu.I. On some asymptotic properties of solutions to biharmonic equations. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2022. Vol. 58, N 2. P. 251–258. https://doi.org/10.1007/s10559-022-00457-y.

5. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Approximation of (ψ,β) - differentiable functions by Poisson integrals in the uniform metric. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2009. Vol. 61, N 11. P. 1757–1779. https://doi.org/10.1007/s11253-010-0311-0.

6. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of conjugate differentiable functions by their Abel–Poisson integrals. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2009. Vol. 61, N 1. P. 86–98. https://doi.org/10.1007/s11253-009-0196-y.

7. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. Москва: Рипол Классик, 2013. 450 с.

8. Hrabova U.Z. Uniform approximations by the Poisson threeharmonic integrals on the Sobolev classes. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2019. Vol. 51, Iss. 12. P. 46–55. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v51.i12.50.

9. Shutovskyi A.M. Some applied aspects of the Dirac delta function. *Journal of Mathematical Sciences (United States)*. 2023. Vol. 276, N 5. P. 685–694. https://doi.org/10.1007/s10958-023-06790-7.

10. Bushev D.N., Kharkevich Yu.I. Finding solution subspaces of the Laplace and heat equations isometric to spaces of real functions, and some of their applications. *Mathematical Notes*. 2018. Vol. 103, N 5-6. P. 869–880. https://doi.org/10.1134/S0001434618050231.

11. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Some asymptotic properties of the solutions of Laplace equations in a unit disk. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2023. Vol. 59, N 3. P. 449–456. https://doi.org/10.1007/s10559-023-00579-x.

12. Chikrii A., Matychyn I. Riemann–Liouville, Caputo, and sequential fractional derivatives in differential games. *Annals of the International Society of Dynamic Games*. 2011. Vol. 11. P. 61–81. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8089-3_4.

13. Chikrii A.A., Belousov A.A. On linear differential games with integral constraints. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 2010. Vol. 269, Iss. 1. P. 69–80. https://doi.org/10.1134/S0081543810060076.

14. Kharkevych Yu. Approximation theory and related applications. *Axioms*. 2022. Vol. 11, Iss. 12. P. 736. https://doi.org/10.3390/axioms11120736.

15. Hrabova U., Tovkach R. On a boundary properties of functions from a class $H_p (p \geq 1)$. *Journal of Mathematical Sciences (United States)*. 2022. Vol. 264, N 4. P. 389–395. https://doi.org/ 10.1007/s10958-022-06006-4.

16. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Fourier transform of the summatory Abel–Poisson function. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2022. Vol. 58, N 6. P. 957–965. https://doi.org/10.1007/s10559-023-00530-0.

17. Chikrii A.A., Prokopovich P.V. Simple pursuit of one evader by a group. *Cybernetics and Systems Analysis*. 1992. Vol. 28, N 3. P. 438–444. https://doi.org/10.1007/BF01125424.

18. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Semenets V., Chikrii A.A. On the optimal impulse control in descriptor systems. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2019. Vol. 51, Iss. 5. P. 1–15. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v51.i5.10.

19. Kal'chuk I., Kharkevych Yu. Approximation properties of the generalized Abel–Poisson integrals on the Weyl–Nagy classes. *Axioms*. 2022. Vol. 11, Iss. 4. P. 161. https://doi.org/10.3390/axioms11040161.

20. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. On approximation of functions from the class $L^{\psi}_{\beta,1}$ by the Abel–Poisson integrals in the integral metric. *Carpathian Mathematical Publications*. 2022. Vol. 14, Iss. 1. P. 223–229. https://doi.org/10.15330/cmp.14.1.223-229.

21. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Approximation of functions from the class $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ by Poisson integrals in the uniform metric. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2009. Vol. 61, N 12. P. 1893–1914. https://doi.org/10.1007/s11253-010-0321-y.

22. Kharkevych Yu.I., Pozharska K.V. Asymptotics of approximation of conjugate functions by Poisson integrals. *Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica*. 2018. Vol. 22, Iss. 2. P. 235–243. https://doi.org/10.12697/ACUTM.2018.22.19.

23. Hrabova U.Z. Approximation of conjugate periodic functions by their threeharmonic Poisson integrals. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2020. Vol. 52, Iss. 10. P. 42–51. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v52.i10.30.

24. Hrabova U.Z., Kal'chuk I.V. Approximation of continuous functions given on the real axis by three-harmonic Poisson operators. *Journal of Mathematical Sciences (United States)*. 2023. Vol. 274, N 3. P. 327–339. https://doi.org/10.1007/s10958-023-06603-x.

25. Kharkevych Yu.I. Exact values of the approximations of differentiable functions by Poisson-type integrals. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2023. Vol. 59, N 2. P. 274–282. https://doi.org/10.1007/s10559-023-00561-7.

26. Hrabova U.Z., Kal'chuk I.V. Approximation of classes $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ by three-harmonic Poisson integrals in uniform Metric (Low Smoothness). *Journal of Mathematical Sciences (United States)*. 2022. Vol. 268, N 2. P. 178–191. https://doi.org/10.1007/s10958-022-06190-3.

27. Kal'chuk I.V., Kharkevych Yu.I. Approximation of the classes $W^{R}_{\beta,\infty}$ by generalized Abel–Poisson integrals. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2022. Vol. 74, N 4. P. 575–585. https://doi.org/10.1007/s11253-022-02084-4.

28. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Approximating properties of biharmonic Poisson operators in the classes $\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}$. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2017. Vol. 69, N 5. P. 757–765. https://doi.org/10.1007/s11253-017-1393-8.

29. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of conjugate differentiable functions by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2009. Vol. 61, N 3. P. 399–413. https://doi.org/10.1007/s11253-009-0217-x.

30. Shutovskyi A.M., Sakhnyuk V.Ye. Taylor series of biharmonic Poisson integral for upper half-plane. *Journal of Mathematical Sciences (United States)*. 2022. Vol. 268, N 2. P. 239–246. https://doi.org/10.1007/s10958-022-06195-y.

31. Kharkevych Yu.I. Approximative properties of the generalized poissin integrals on the classes of functions determined by a modulus of continuity. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2019. Vol. 51, Iss. 4. P. 43–54. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v51.i4.40.

32. Zhigallo K.M., Kharkevych Yu.I. On the approximation of functions of the Hölder class by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2000. Vol. 52, N 7. P. 1113–1117. https://doi.org/10.1023/A:1005285818550.

33. Kharkevych Yu.I., Stepaniuk T.A. Approximate properties of Abel–Poisson integrals on classes of differentiable functions defined by moduli of continuity. *Carpathian Mathematical Publications*. 2023. Vol. 15, Iss. 1. P. 286–294. https://doi.org/10.15330/cmp.15.1.286-294.

34. Kharkevych Yu.I., Khanin O.G. Asymptotic properties of the solutions of higher-order differential equations on generalized Hölder classes. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2023. Vol. 59, N 4. P. 633–639. https://doi.org/10.1007/s10559-023-00598-8.

35. Chikrii A.A., Rappoport I.S., Chikrii K.A. Multivalued mappings and their selectors in the theory of conflict-controlled processes. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2007. Vol. 43, N 5. P. 719–730. https://doi.org/10.1007/s10559-007-0097-8.

36. Chikrij A.A., Dzyubenko K.G. Bilinear markovian processes of search for moving objects. *Problemy Upravleniya i Informatiki (Avtomatika)*. 1997. Iss. 1. P. 92–106.

37. Prokopovich P.V., Chikrii A.A. A linear evasion problem for interacting groups of objects. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1994. Vol. 58, Iss. 4. P. 583–591. https://doi.org/10.1016/0021-8928(94)90135-X.

38. Bushev D.M., Kharkevych Yu.I. Conditions of convergence almost everywhere for the convolution of a function with delta-shaped kernel to this function. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2016. Vol. 67, N 11. P. 1643–1661. https://doi.org/10.1007/s11253-016-1180-y.

39. Bushev D.M., Abdullayev F.G., Kal'chuk I.V., Imashkyzy M. The use of the isometry of function spaces with different numbers of variables in the theory of approximation of functions. *Carpathian Mathematical Publications*. 2021. Vol. 13, Iss. 3. P. 805–817. https://doi.org/10.15330/cmp.13.3.805-817.

40. Zajac J., Korenkov M.E., Kharkevych Yu.I. On the asymptotics of some Weierstrass functions. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2015. Vol. 67, N 1. P. 154–158. https://doi.org/10.1007/s11253-015-1070-8.

41. Serdyuk A.S., Hrabova U.Z. Order estimates of the uniform approximations by zygmund sums on the classes of convolutions of periodic functions. *Carpathian Mathematical Publications*. 2021. Vol. 13, Iss. 1. P. 68–80. https://doi/org/10.15330/cmp.13.1.68-80.

42. Abdullayev F.G., Bushev D.M., Imashkyzy M., Kharkevych Yu.I. Isometry of the subspaces of solutions of systems of differential equations to the spaces of real functions. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2020. Vol. 71, N 8. P. 1153–1172. https://doi.org/10.1007/s11253-019-01705-9.

43. Shutovskyi A.M., Sakhnyuk V.Ye. Representation of Weierstrass integral via Poisson integrals. *Journal of Mathematical Sciences (United States)*. 2021. Vol. 259, N 1. P. 97–103. https://doi.org/10.1007/s10958-021-05602-0.

A.M. Shutovskyi

ON SOME ASYMPTOTIC PROPERTIES OF SOLUTIONS OF TRIHARMONIC EQUATIONS

Abstract. The author considers the optimization problem for the triharmonic equation in the presence of specific boundary conditions. As a result, the triharmonic Poisson integral was constructed in Cartesian coordinates for the upper half-plane. The asymptotic properties of this operator on Lipschitz classes in a uniform metric were studied. An exact equality was found for the upper bound of the deviation of the Lipschitz class functions from the triharmonic Poisson integral defined in Cartesian coordinates for the upper half-plane in the metric space. The results obtained in the article demonstrate the connection between the methods of approximation theory and the principles of optimal decision theory.

Keywords: optimization problem, class of Lipschitz functions, uniform metric, triharmonic Poisson integral.

Надійшла до редакції 15.12.2023