



НОВІ ЗАСОБИ КІБЕРНЕТИКИ, ІНФОРМАТИКИ, ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ ТЕХНІКИ ТА СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

УДК 519.6, 539.3

Б.Є. ПАНЧЕНКО

Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова, Одеса, Україна,
e-mail: pr-bob@ukr.net.

Ю.Д. КОВАЛЬОВ

Державний університет інтелектуальних технологій і зв'язку, Одеса, Україна,
e-mail: kovalev@ukr.net.

Т.О. КАЛІНІНА

Державний університет інтелектуальних технологій і зв'язку, Одеса, Україна,
e-mail: kalininat384@gmail.com.

І.М. САЙКО

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: igor.sayko1988@gmail.com.

Л.М. БУКАТА

Державний університет інтелектуальних технологій і зв'язку, Одеса, Україна,
e-mail: ygrikhuda@gmail.com.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИМЕТРИЧНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОСЛАБЛЕНОГО НАСКРІЗНИМ ОТВОРОМ ШАРУ З ПОКРИТИМИ ДІАФРАГМОЮ ТОРЦЯМИ

Анотація. Наведено нову математичну модель розв'язання статичної симетричної крайової задачі для послабленого наскрізним отвором шару з покритими діафрагмою торцями. Розроблено та чисельно апробовано новий метод, який базується на системі трьох сингулярних інтегральних рівнянь. За результатом високоточного чисельного дослідження виявлено, що зі збільшенням товщини шару відносно окружне напруження зростає. У разі зменшення одного з радіусів еліптичного отвору також спостерігається зростання відносного окружного напруження. У роботі наведено відповідні графіки.

Ключові слова: тривимірні крайові задачі, сингулярні інтегральні рівняння, чисельний експеримент, статичне розтягування–стискування, наскрізний отвір.

ВСТУП

Для сучасного стану інформаційних технологій характерною є потреба в накопиченні та систематизації математичних моделей, які в різних галузях науки коректно та ефективно розв'язують складні задачі. Створення та постійне поповнення бібліотеки математичних моделей дає змогу ширше застосовувати математичні методи та способи, що довели свою ефективність. У роботах [1, 2] підкреслено, що саме крайові задачі математичної фізики (в довільній інтерпретації — електро- чи гідродинаміки, механіки деформовного твердого тіла, астрономії тощо) є потужним полігоном для створення таких моделей.

Значного розвитку набувають на цей час математичні моделі, поєднання яких створило новий напрям інформаційних технологій, що отримав назву Data Mining (інтелектуальний аналіз даних) [3]. Ці методи охоплюють значну кількість інших, навіть некомп'ютерних галузей і, у свою чергу, суттєво прискорюють їхній розвиток. Математична фізика не є винятком [4, 5]. В окремих випадках для роз-

© Б.Є. Панченко, Ю.Д. Ковальов, Т.О. Калініна, І.М. Сайко, Л.М. Буката, 2024

в'язування, наприклад, обернених крайових задач для середовищ з ускладненими властивостями методи Data Mining є найефективнішими. Отже, побудова нових математичних моделей розв'язування крайових задач поповнює і Mining-моделі. Адже поєднання добре обумовлених аналітико-чисельних технік та методів інтелектуального аналізу даних дає змогу сподіватися на значні результати [5].

У роботі [2] наведено огляд методів розв'язування тривимірних статичних задач математичної фізики в інтерпретації механіки деформовного твердого тіла та окреслено декілька таких, які можуть мати подальший розвиток [6–9]. У цій роботі також використано аналітико-чисельний метод для розв'язання системи сингулярних інтегральних рівнянь (CIP) [10].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо пружний шар $-h \leq x_3 \leq h$, $-\infty < x_1, x_2 < \infty$, послаблений наскрізним отвором.

Нехай на поверхні порожнини задано вектор напружень (N, T, Z) . Припустимо, що компоненти заданого навантаження можна розвинути у ряд Фур'є за координатою x_3 на відрізок шару товщиною $[-h, h]$. Нехай на його торцях мають місце такі умови:

$$u_1(x_1, x_2, \pm h) = u_2(x_1, x_2, \pm h) = \sigma_{33}(x_1, x_2, \pm h) = 0. \quad (1)$$

Крайові умови (1) відповідають випадку, коли торці шару покриті діафрагмою, жорсткою у своїй площині та гнучкою у перпендикулярному напрямку. Запишемо компоненти вектора переміщення у вигляді

$$\begin{aligned} u_i &= \sum_{k=0}^{\infty} u_{ik}(x_1, x_2) \cos \gamma_k x_3 \quad (i=1, 2), \\ u_3 &= \sum_{k=0}^{\infty} u_{3k}(x_1, x_2) \sin \gamma_k x_3, \quad \gamma_k = \frac{2k+1}{2h} \pi. \end{aligned} \quad (2)$$

Подання компонентів вектора переміщення (2) автоматично задовольняють умови (1) на торцях шару. Після відокремлення змінних у рівняннях Ламе отримуємо систему рівнянь у частинних похідних:

$$\begin{aligned} \kappa_k u_{ik} + \sigma \partial_i \theta_k &= 0, \\ \kappa_k u_{3k} - \sigma \gamma_k \theta_k &= 0, \\ \kappa_k &= \nabla^2 - \gamma_k^2, \quad \nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad \theta_k = \partial_1 u_{1k} + \partial_2 u_{2k} + \gamma_k u_{3k}, \\ \partial_i &= \partial / \partial x_i \quad (i=1, 2), \quad \sigma = (1-2\nu)^{-1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Цю систему можна інтегрувати в такий спосіб. Врахувавши, що θ_k — метегармонійна функція, введемо довільний розв'язок рівняння $\kappa_k^2 \psi_k = 0$ та вважатимемо, що $\theta_k = \kappa_k \psi_k$. Тоді можна отримати такі вирази:

$$\begin{aligned} u_{1k} &= -\sigma \partial_1 \psi_k + \sigma \partial_2 \varphi_k, \\ u_{2k} &= -\sigma \partial_2 \psi_k - \sigma \partial_1 \varphi_k, \\ u_{3k} &= \gamma_k \sigma \psi_k + \Phi_k, \end{aligned} \quad (4)$$

де φ_k, Φ_k — довільні метегармонійні функції.

За умови, що співвідношення (4) задовольняють рівність $\theta_k = \kappa_k \psi_k$, матимемо

$$\begin{aligned} u_{1k} - iu_{2k} &= 2\sigma \frac{\partial}{\partial z} (i\varphi_k - \psi_k), \\ u_{3k} &= \left(\frac{1+\sigma}{\gamma_k} \kappa_k + \sigma\gamma_k \right) \psi_k, \end{aligned} \quad (5)$$

де $\kappa_k \varphi_k = 0$ та $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2)$.

Формули (2) та (5) задають вирази пружних перемішень у шарі через функції φ_k , ψ_k , причому φ_k (вихровий розв'язок) описує поворот елемента відносно осі Ox_3 , тобто $\partial_2 u_{1k} - \partial_1 u_{2k} = \sigma \nabla^2 \varphi_k$.

Інтегральні представлення функцій θ_k , φ_k і ψ_k мають вигляд

$$\begin{aligned} \theta_k(z) &= \int_L p_k(\xi) K_0(\gamma_k r) ds + \frac{2}{\gamma_k} \operatorname{Re} \int_L q_k(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} K_0(\gamma_k r) d\xi, \\ i\varphi_k(z) - \psi_k(z) &= \frac{2i}{\gamma_k} \int_L \bar{q}_k^*(\xi) \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} K_0(\gamma_k r) d\bar{\xi} + \\ &+ \frac{1}{2\gamma_k} \int_L p_k(\xi) r K_1(\gamma_k r) ds + \frac{1}{\gamma_k^2} \operatorname{Re} \int_L q_k(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} (r K_1(\gamma_k r)) d\xi, \\ r &= |\xi - z|, \quad \xi = \xi + i\eta \in L, \quad z = x_1 + ix_2, \end{aligned} \quad (6)$$

де $K_n(\gamma_k r)$ — функції Макдональда порядку n ; ds — елемент дуги контуру L ; невідомі функції $p_k(\xi)$, $q_k(\xi)$, $q_k^*(\xi)$ потрібно визначити.

Крайові умови на L запишемо в комплексному вигляді

$$\begin{aligned} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) - e^{2i\psi} (\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12}) &= 2(N - iT), \\ \operatorname{Re} [e^{-i\psi} (\sigma_{13} + i\sigma_{23})] &= Z, \end{aligned} \quad (7)$$

де ψ — кут між зовнішньою нормаллю до контуру отвору та віссю Ox_1 .

Використавши закон Гука та формули (5), запишемо умови (7) так:

$$\begin{aligned} 2\sigma e^{2i\psi} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} (i\varphi_k - \psi_k) \right\} - \frac{1}{2} \theta_k - \frac{1}{2} \sigma \gamma_k^2 \psi_k &= \frac{1}{2\mu} (N_k - iT_k), \\ \operatorname{Re} \left\{ e^{i\psi} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma \gamma_k \psi_k + \frac{1+\sigma}{\gamma_k} \theta_k \right) - \sigma \gamma_k \frac{\partial}{\partial z} (i\varphi_k - \psi_k) \right] \right\} &= \frac{1}{2\mu} Z_k. \end{aligned} \quad (8)$$

СИСТЕМА ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Крайова задача (8) з урахуванням співвідношень (6) за допомогою відомої традиційної процедури зводиться до системи трьох СІР 2-го роду (для кожного фіксованого k):

$$\begin{aligned} \omega_{2k} a_k + \omega_{3k} b_k + \sum_{i=1}^3 \int_L \omega_{ik} G_{ik} ds &= \frac{1}{2\mu} (N_k - iT_k), \\ \omega_{1k} c_k + \sum_{i=1}^3 \int_L \omega_{ik} G_{ik}^* ds &= -\frac{1}{2\mu} Z_k, \\ a_k &= \frac{\pi i(1+\sigma)}{2\gamma_k}, \quad b_k = \frac{\pi(1+\sigma)}{2\gamma_k}, \quad c_k = -b_k, \end{aligned} \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned}
G_{1k}(\zeta, \xi_0) &= \frac{\sigma \gamma_k}{4} r K_1(\gamma_k r) (e^{2i(\psi_0 - \alpha_0)} + 1) - \frac{1}{2} K_0(\gamma_k r), \\
G_{2k}(\zeta, \xi_0) &= \frac{\sigma \gamma_k}{4} r K_0(\gamma_k r) \left[\sin(\psi - \alpha_0) - \frac{ie^{2i\psi_0}}{2} h_1(\psi, \alpha_0) \right] + \\
&+ K_1(\gamma_k r) \left\{ \frac{\sigma}{2} \sin(\psi - \alpha_0) + \frac{ie^{2i\psi_0}}{2} \left[(1 + \sigma) e^{-i(\psi + \alpha_0)} - \frac{\sigma}{2} h_2(\psi, \alpha_0) \right] \right\}, \\
G_{3k}(\zeta_j, \xi_0) &= \frac{\sigma \gamma_k}{4} r K_0(\gamma_k r) \left[\cos(\psi - \alpha_0) + \frac{e^{2i\psi_0}}{2} h_2(\psi, \alpha_0) \right] + \\
&+ K_1(\gamma_k r) \left\{ \frac{\sigma}{2} \cos(\psi - \alpha_0) + \frac{e^{2i\psi_0}}{2} \left[(1 + \sigma) e^{-i(\psi + \alpha_0)} + \frac{\sigma}{2} h_1(\psi, \alpha_0) \right] \right\}, \\
h_1(\psi, \alpha_0) &= e^{i(\psi - 3\alpha_0)} - e^{-i(\psi + \alpha_0)}, \\
h_2(\psi, \alpha_0) &= e^{i(\psi - 3\alpha_0)} + e^{-i(\psi + \alpha_0)}, \\
G_{1k}^*(\zeta, \xi_0) &= \frac{1}{2} [\sigma \gamma_k r K_0(\gamma_k r) - (1 + \sigma) K_1(\gamma_k r)] \cos(\psi_0 - \alpha_0), \\
G_{2k}^*(\zeta, \xi_0) &= \frac{\sigma \gamma_k}{4} r K_1(\gamma_k r) [\sin(\psi_0 + \psi - 2\alpha_0) - \sin(\psi_0 - \psi)] - \\
&- \frac{1}{2} K_0(\gamma_k r) \sin(\psi_0 - \psi), \\
G_{3k}^*(\zeta, \xi_0) &= \frac{\sigma \gamma_k}{4} r K_1(\gamma_k r) [\cos(\psi_0 + \psi - 2\alpha_0) + \cos(\psi_0 - \psi)] + \\
&+ \frac{1}{2} K_0(\gamma_k r) \cos(\psi_0 - \psi), \\
q_k^* &= \frac{i(1 + \sigma)}{\sigma \gamma_k^2} q_k, \quad \omega_{1k} = p_k, \quad \omega_{2k} = \operatorname{Re} q_k, \quad \omega_{3k} = \operatorname{Im} q_k, \\
\zeta - \xi_0 &= r e^{i\alpha_0}, \quad \xi_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in L.
\end{aligned}$$

Тут ω_{ik} — невідомі шукані функції.

СХЕМА ЧИСЕЛЬНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Для чисельного дослідження розглянемо шар, послаблений отвором еліптичного поперечного перерізу:

$$\xi_1 = R_1 \cos \varphi, \quad \xi_2 = R_2 \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

На поверхні отвору діє навантаження

$$N = -P(h^2 - x_3^2), \quad T = Z = 0, \quad P = \text{const.}$$

З використанням чисельної реалізації алгоритму інтегральні рівняння (9) методом механічних квадратур [11–13] зведено до системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Високоточну схему обчислень застосовано аналогічно до [1, 2].

Для характеристики напруженого стану поверхні отвору визначалися компоненти тензора напружень:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{11} \sin^2 \theta + \sigma_{22} \cos^2 \theta - 2\sigma_{12} \cos \theta \sin \theta, \\
\sigma_{\theta z} &= -\sigma_{13} \sin \theta + \sigma_{23} \cos \theta, \\
\sigma_{zz} &= \sigma_{33}, \\
\theta &= \psi - \pi.
\end{aligned} \tag{10}$$

Високоточна паралельно-конвеєрна схема обчислень, як і в [1, 2], полягає у виконанні чотирьох етапів, число процесів яких обернено пропорційне тривалості інтервалів часу обчислень. Це синтез масивів вихідних даних, синтез матриці СЛАР, розв'язування СЛАР (наприклад, методом Гауса), синтез масивів підсумкових розв'язків. На першому, другому та четвертому етапах макроконвеєра не потрібно виконувати пересилання даних, що означає незалежність обчислень: чим більша матриця, тим більшим буде число процесів для мінімізації загального часу обчислень. На третьому етапі для розв'язування СЛАР завжди існує оптимальне число процесів, що визначається властивостями самої матриці.

Так само, як в [1, 2], для алгоритму обчислення параметрів (10) оптимальне число процесів становило 150–200. Точність 10^{-6} було отримано для числа точок колокації контуру кожного отвору $N = 700$ та числа наближень ряду Фур'є (2) $k = 5$ (дослідження подальшого зростання точності результату не проводилося).

Оскільки для наведеної методики розв'язання крайової задачі основною операцією обчислення кожного елемента матриці є визначення різницевого аргументу циліндричних функцій Макдональда, заданого на множині значень параметричних координат отворів, а також обчислення саме цих функцій і їхніх коефіцієнтів, то на наступному кроці на кожному клоні хоста запускаються цикли процедур визначення цих коефіцієнтів. При цьому синхронізація процесів на четвертому етапі не потрібна, оскільки підсумкова матриця формується за фактом завершення останнього.

Послідовність обчислення напружень (10) така: спочатку чисельно знаходили наближений розв'язок системи (9), далі визначали коефіцієнти Фур'є тензора напружень $\sigma_{ij}^{(k)}$. Услід згідно з (10) обчислювали шукані напруження на поверхні порожнини.

РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЕЛЬНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

На рис. 1, а наведено епюри розподілу відносного окружного напруження $\sigma_{\theta\theta} / P$ уздовж координати за товщиною в точці $\varphi = 0$. Криві 1, 2 побудовано для кругового отвору ($R_1 = R_2 = 1$) за умови $h / R_1 = 2, 4$ відповідно. Точками зображено результати розв'язання осесиметричної задачі методом рядів. Збіг результатів, отриманих двома методами, підтверджує достовірність наведеного алгоритму.

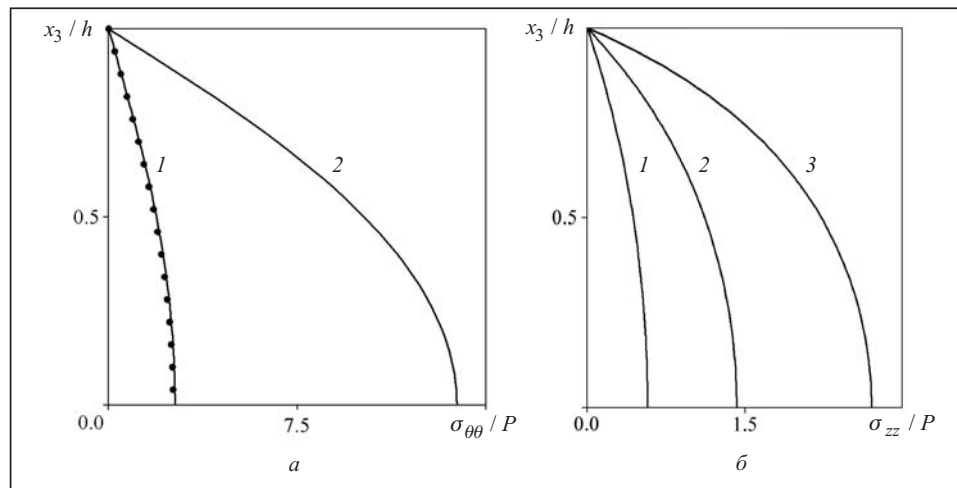


Рис. 1

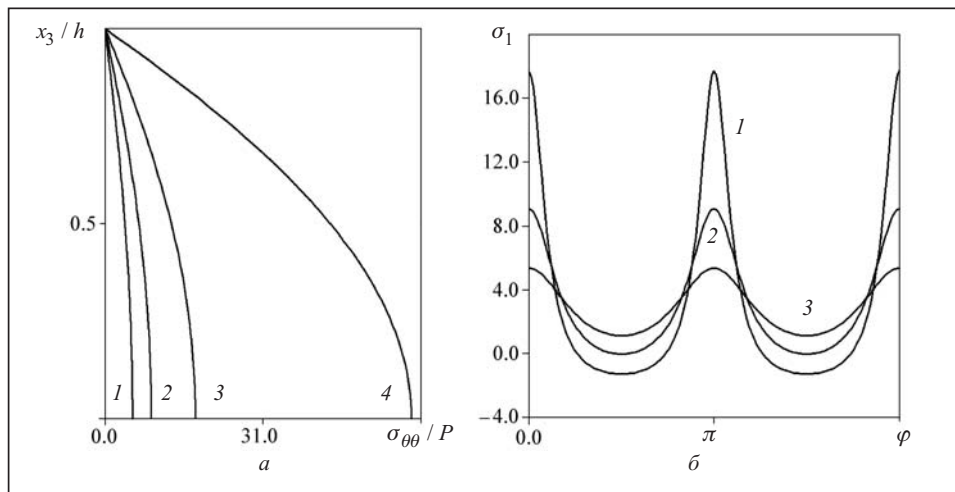


Рис. 2

Епюри розподілу відносного напруження σ_{zz}/P уздовж координати за товщиною в точці $\varphi=0$ наведено на рис. 1, б. Криві 1, 2, 3 також побудовано для кругового отвору ($R_1 = R_2 = 1$) за значень $h/R_1 = 1, 2, 4$ відповідно.

На рис. 2, а наведено епюри розподілу відносного окружного напруження $\sigma_{\theta\theta}/P$ для еліптичного отвору уздовж координати за товщиною в точці $\varphi=0$ у випадку $h/R_1 = 2$ ($R_1 = 1$). Криві 1, 2, 3, 4 побудовано для $R_2 = 0.7, 0.5, 0.3, 0.1$ відповідно.

На рис. 2, б наведено епюри розподілу відносного окружного напруження σ_{zz}/P уздовж контуру еліптичного отвору $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ в площині $x_3/h = 0$ у випадку ($R_1 = 1$) для $h/R_1 = 1, 2, 4$ відповідно. Криві 1, 2, 3 також побудовано для $R_2 = 0.3, 0.5, 0.7$ відповідно.

Чисельні результати одержано для значення коефіцієнта Пуассона $\nu = 1/3$.

ВИСНОВКИ

Аналітико-чисельне розв'язання тривимірних статичних крайових задач для шару з наскрізним отвором довільної форми потребує математичних моделей, що адекватно та ефективно описують вплив саме форми контуру неоднорідності на параметри фізичних полів. Запропонована нова математична модель, в якій використовуються СІР, відповідає саме цьому критерію. Алгоритм добре масштабується та ефективно керує ресурсами — співвідношення оптимального числа процесів та точності обчислень є ефективним.

Для дослідженої крайової задачі, враховуючи результати чисельного дослідження, можна висувати таке.

— Зі збільшенням товщини шару відбувається зростання відносного окружного напруження.

— Зі зменшенням R_2 також спостерігається зростання відносного окружного напруження.

— На відміну від [2] не спостерігається якісних відмінностей у характері максимумів відносного окружного напруження від торців до глибини шару залежно від форми отвору.

Отже, із зіставлення результатів розв'язання розглянутої крайової задачі та задачі в [2] випливає, що більшість якісних висновків збігаються. Проте існують й суттєві відмінності. Цей результат зумовлений симетрією та асиметрією крайових умов та навантажень.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Панченко Б.Є., Ковальов Ю.Д., Буката Л.М., Жиронкіна О.С. Математичне моделювання симетричної крайової задачі для шару з покритими діафрагмою торцями, послабленого двома наскрізними отворами. *Проблеми керування та інформатики*. 2023. № 2. С. 18–29. <https://doi.org/10.34229/1028-0979-2023-2-2>.
2. Панченко Б.Є., Ковальов Ю.Д., Калініна Т.О., Сайко І.М., Буката Л.М. Математичне моделювання в статичних тривимірних крайових задачах — кососиметрична задача для шару, послабленого наскрізним отвором і ковзним защемленням торців. *Кибернетика та системний аналіз*. 2024. Т. 60, № 1. С. 182–195. <https://doi.org/10.34229/KCA2522-9664.24.1.16>.
3. Data Mining. https://en.wikipedia.org/wiki/Data_mining.
4. Bock F.E., Aydin R.C., Cyron C.J., Huber N., Kalidindi S.R., Klusemann B.A. Review of the application of machine learning and data mining approaches in continuum materials mechanics. *Frontiers Materials*. 2019. Vol. 6. <https://doi.org/10.3389/fmats.2019.00110>.
5. Karapiperis K., Stainier L., Ortiz M., Andrade J.E. Data-driven multiscale modeling in mechanics. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2021. Vol. 147. 104239. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2020.104239>.
6. Farid A.F., Rashed Y.F. BEM for thick plates on unilateral Winkler springs. *Innov. Infrastruct. Solut.* 2018. Vol. 3. 26. <https://doi.org/10.1007/s41062-018-0128-5>.
7. Katsikadelis J.T., Baboukos N.G. Flutter instability of laminated thick anisotropic plates using BEM. *Acta Mechanica*. 2018. Vol. 229. P. 613–628. <https://doi.org/10.1007/s00707-017-1988-z>.
8. Карпиловский В.С. Метод конечных элементов и задачи теории упругости. Киев: Софія А, 2022. 275 с.
9. Jiang W., Woo W., Wan Y., Luo Y., Xie X., Tu S.T. Evaluation of through-thickness residual stresses by neutron diffraction and finite-element method in thick weld plates. *J. Pressure Vessel Technol.* 2017. Vol. 139, N 3. 031401. <https://doi.org/10.1115/1.4034676>.
10. Фильштинский Л.А. Ковалев Ю.Д., Хворост В.А. Исследование влияния граничной поверхности на распределение КИН в окрестности концентраторов напряжений в упругом полуслое. *Прикладные проблемы математического моделирования: Спец. вып. Вестника Херсонского государственного технического университета*. Херсон: ХГТУ, 1999. С. 81–83.
11. Александров А.Я., Соловьев Ю.И. Об обобщении способа решения осесимметричных задач теории упругости с помощью аналитических функций на пространственные задачи без осевой симметрии. *ДАН СССР*. 1964. Т. 154, № 2. С. 294–297.
12. Александрович А.И. Применение теории функций двух комплексных переменных для решения пространственных задач теории упругости. *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. 1977. № 2. С. 164–168.
13. Панченко Б.Е., Ковалев Ю.Д., Сайко И.Н. Численное исследование систем сингулярных интегральных уравнений первого рода и с неопределяемым индексом в задаче о дифракции плоских волн на неподвижном включении. *Кибернетика и системный анализ*. 2020. Т. 56, № 4. С. 3–17.

B.E. Panchenko, Yu.D. Kovalev, T.O. Kalinina, I.N. Saiko, L.M. Bukata

MATHEMATICAL MODELING OF A SYMMETRIC BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR A LAYER WEAKENED BY A THROUGH HOLE WITH THE ENDS COVERED WITH A DIAPHRAGM

Abstract. The paper presents a new mathematical model for the solution of a static symmetric boundary-value problem for a layer weakened by a through hole with ends covered with a diaphragm. A new method based on a system of three singular integral equations has been developed and tested numerically. As a result of a high-precision numerical study, it was found that with an increase in the thickness of the layer, an increase in the relative circumferential stress occurs. With a decrease in one of the radii of the elliptical hole, an increase in the relative circumferential stress is also observed. The paper presents the respective dependency graphs.

Keywords: three-dimensional boundary-value problems, singular integral equations, numerical experiment, static stretching–compression, a through hole.

Надійшла до редакції 13.11.2023