УДК 519.816(045)

О.Є. ЛИТВИНЕНКО
Національний авіаційний університет, Київ, Україна, e-mail: *litvinen@nau.edu.ua*.

АЛГЕБРАЇЧНИЙ МЕТОД СИНТЕЗУ БЕЗПОМИЛКОВОЇ БІНАРНОЇ НЕЙРОННОЇ МЕРЕЖІ

Анотація. Наведено математичну модель задачі обчислення вагових коефіцієнтів бінарної нейронної мережі. Доведено, що у разі ступінчастих функцій активації нейронів такою моделлю є система лінійних нерівностей, яка у більшості практичних задач є несумісною. Запропоновано метод аналізу системи нерівностей, який дає змогу обчислити значення вагових коефіцієнтів та синтезувати структуру нейронної мережі, що забезпечує абсолютну точність вихідних сигналів. Наведено алгоритм та приклад реалізації запропонованого методу.

Ключові слова: нейронна мережа, математична модель, аналіз, синтез, помилка.

ВСТУП

Головним недоліком бінарних нейронних мереж є відсутність гарантії отримання точного розв'язку поставленої задачі для всіх можливих вхідних сигналів. Пояснюється це тим, що у переважній більшості практичних застосувань задача обчислення вагових коефіцієнтів зв'язків нейронної мережі у математичній постановці є суперечливою і не має розв'язку. У цьому нескладно переконатися, якщо побудувати та проаналізувати математичну модель обчислення вагових коефіцієнтів навіть для найпростіших задач класифікації. У таких випадках, використовуючи відомі методи навчання [1–7], можна лише мінімізувати відхилення фактичного вихідного сигналу нейронної мережі від точного, але унеможливлює усунення її помилки в принципі. Тож перспективним підходом до синтезу нейронних мереж, що працюють з абсолютною точністю, є методи, основані на побудові та аналізі математичних моделей задачі обчислення вагових коефіцієнтів за фіксованих функцій активації нейронів.

Один із таких методів для бінарних нейронних мереж з одиничними ступінчастими функціями активації нейронів запропоновано у цій статті.

Бівалентність функцій активації дає підставу стверджувати, що математичною моделлю задачі обчислення вагових коефіцієнтів є система лінійних нерівностей, кожна з яких зіставлена певному вектору вхідних сигналів навчальної вибірки. Задача полягає у відшуканні такого набору значень вагових коефіцієнтів, який забезпечуватиме отримання правильного вихідного сигналу мережі для будь-якого вектора вхідних сигналів.

Запропонований метод передбачає послідовний вибір за певними правилами та привласнення значень ваговим коефіцієнтам з подальшим аналізом часткових моделей, що утворені внаслідок підстановки цих значень у загальну вхідну модель. Під час виявлення суперечливих нерівностей до їхнього складу вводяться додаткові корегувальні змінні, які призначені для компенсації математичних суперечностей, що виникають. У фізичному сенсі кожна така корегувальна змінна відповідає включенню до структури нейронної мережі додаткового проміжного нейрона, для якого корегувальна змінна розглядається як ваговий коефіцієнт його вихідного зв'язку. У такий спосіб визначається структура нейронної мережі. Результатом реалізації запропонованого методу є нейронна мережа з одним проміжним шаром, здатна з абсолютною точністю генерувати вихідні сигнали для всіх вхідних векторів, передбачених навчальною вибіркою. За наявності критеріїв визначення правильних вихідних сигналів для довільних вхідних векторів метод може бути застосований для самонавчання нейронних мереж.

Використання математичних моделей задачі обчислення вагових коефіцієнтів дає змогу уникнути трудомістких і тривалих ітераційних процедур навчання нейронних мереж, що передбачають, наприклад, мінімізацію параболічної функції середньоквадратичної похибки. У цьому полягає наукова новизна запропонованого методу.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Припустимо, нейронна мережа, що синтезується, має m вхідних $(i=\overline{1, m})$ та n вихідних нейронів $(j=\overline{1, n})$. Передбачається, що нейронна мережа є бінарною, тобто вхідні і вихідні сигнали всіх нейронів можуть набувати значень з множини $\{0,1\}$. Нейрони вхідного шару отримують вхідні сигнали мережі та здійснюють їхню передачу на входи нейронів вихідного шару без будь-яких перетворень. Функції активації всіх нейронів вихідного шару є одиничними ступінчастими функціями з нульовими усуненнями: $f_j(s_j)=0$, якщо $s_j \leq 0$, та $f_j(s_j)=1$, якщо $s_j>0$, де s_j — зважена сума вхідних сигналів j-го вихідного нейрона, $s_j=\sum_{i=1}^{m} w_{ij} x_{ij}$, $j=\overline{1, n}$; x_{ij} — сигнал, що надходить від i-го нейрона вхідного шару на вхід j-го нейрона вихідного шару, $(\forall j=\overline{1, n})(x_{ij}=x_i)$; w_{ij} — ваговий коефіцієнт зв'язку між i-им та j-им нейроном, $i=\overline{1, m}$, $j=\overline{1, n}$.

Передбачається, що задана навчальна вибірка — скінченний набір вхідних сигналів у сукупності з правильними вихідними сигналами $A=\{[x^{(k)}, y^*(x^{(k)})], k=\overline{1, r}\}$, де k — номер пари «вхідний сигнал–еталонний вихідний сигнал», що включена до навчальної вибірки; r — кількість таких пар у навчальній вибірці; $x^{(k)}$ — вектор вхідних сигналів мережі, що належить навчальній вибірці, $x^{(k)}=(x_i^{(k)} \mid i=\overline{1, m})$, $k=\overline{1, r}$; $y^*(x^{(k)})$ — вектор вихідних сигналів мережі, що є еталонним для k-го вхідного вектора, $y^*(x^{(k)})=[y_j^*(x^{(k)}) \mid j=\overline{1, n}]$, $k=\overline{1, r}$.

Потрібно визначити структуру мережі та вектор значень вагових коефіцієнтів $w=(w_{ij} \mid i=\overline{1, m};\ j=\overline{1, n})$, за яких у разі надходження на вхід мережі будь-якого вектора вхідних сигналів $x^{(k)}$, $k=\overline{1, r}$, мережа генеруватиме вектор вихідних сигналів $y^{(k)}$, що збігається з еталонним з абсолютною точністю, $y^{(k)}=y^*(x^{(k)})$.

МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ ОБЧИСЛЕННЯ ВАГОВИХ КОЕФІЦІЄНТІВ

Запропонований метод передбачає обчислення вагових коефіцієнтів нейронної мережі на основі аналізу системи лінійних нерівностей, яка випливає з навчальної вибірки.

Нехай I_k^0 та I_k^1 — множини номерів елементів вхідного вектора $x^{(k)}$, які дорівнюють 0 та 1 відповідно:

$$I_k^0=\{i:(1 \leq i \leq m)\ \&\ (x_i^{(k)}=0)\},\ I_k^1=\{i:(1 \leq i \leq m)\ \&\ (x_i^{(k)}=1)\},\ k=\overline{1, r}.$$

Тоді зважену суму вхідних сигналів j-го вихідного нейрона у разі надходження на вхід мережі вектора $x^{(k)}$ визначатимемо так:

$$s_{jk} = \sum_{i \in I_k^1} w_{ij}, \ j = \overline{1, n}, \ k = \overline{1, r}. \qquad (1)$$

Нехай K_j^0 та K_j^1 — множини номерів елементів навчальної вибірки, для яких еталонне значення вихідного сигналу j-го нейрона дорівнює 0 та 1 відповідно:

$$K_j^0 = \{k : (1 \le k \le r) \,\&\, [\, y_j^* (x^{(k)}) = 0]\}, \ K_j^1 = \{k : (1 \le k \le r) \,\&\, [\, y_j^* (x^{(k)}) = 1]\}, \ j = \overline{1, n}.$$

Система нерівностей, яку мають задовольняти вагові коефіцієнти мережі для отримання еталонного вихідного сигналу, має такий вигляд:

$$\begin{cases} s_{jk} \le 0 \ \text{ для } \ k \in K_j^0, \\ s_{jk} > 0 \ \text{ для } \ k \in K_j^1, \end{cases} \ j = \overline{1, n}. \qquad (2)$$

Розв’язок системи нерівностей (2) визначає вектор значень вагових коефіцієнтів $(w_{ij} \,|\, i = \overline{1, m}; \, j = \overline{1, n})$, за яких нейронна мережа генерує правильні вихідні сигнали для всіх вхідних сигналів навчальної вибірки.

У переважній більшості практичних випадків система (2) є несумісною (суперечливою) навіть для найпростіших задач класифікації, що буде показано у наведеному далі прикладі. Це призводить до отримання помилкових вихідних сигналів, попри застосування відомих оптимізаційних методів навчання нейронних мереж, зокрема, методу зворотного поширення помилки.

Запропонований метод базується на перетворенні суперечливої системи (2) у сумісну введенням (за потреби) у нерівність додаткових корегувальних змінних v_{jk}, $1 \le j \le n$, $1 \le k \le r$, що компенсують відхилення зважених сум s_{jk} від значень, потрібних для отримання правильного вихідного сигналу нейронної мережі.

Процес аналізу системи нерівностей (2) передбачає виконання таких дій:

• послідовне привласнення змінним w_{ij}, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, значень, обчислених за певними правилами;

• виявлення конфліктних нерівностей, для яких привласнене значення чергової змінної w_{ij} є недопустимим;

• обчислення та введення у конфліктні нерівності корегувальних змінних v_{jk}, $1 \le j \le n$, $1 \le k \le r$.

Оскільки вагові коефіцієнти зв’язків між нейронами вхідного шару та різними вихідними нейронами є взаємонезалежними, система нерівностей (2) розв’язується для кожного j-го вихідного нейрона окремо, $j = \overline{1, n}$. Для цього нейронна мережа декомпозується на прості фрагменти (елементарні модулі), що містять усі вхідні нейрони та один вихідний [8].

Нехай S_j — система (множина) нерівностей, яку має задовольняти вектор вагових коефіцієнтів $w_j = (w_{ij} \,|\, i = \overline{1, m})$ для отримання правильного вихідного сигналу j-го нейрона вихідного шару, $j = \overline{1, n}$.

Оскільки, розв’язуючи систему S_j, використовуємо той факт, що параметр j є константою, перший індекс у позначенні шуканої змінної w_{ij}, $i = \overline{1, m}$, можна вважати її номером, а другий індекс у позначенні вагової суми s_{jk}, $k = \overline{1, r}$, — номером нерівності у цій системі.

Унаслідок послідовного привласнення змінним w_{ij}, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, конкретних значень система (2) поступово спрощується і перетворюється у часткову форму. Нерівності, які залишилися без незафіксованих змінних (тобто перетворилися у числові вирази), вилучаються із системи S_j.

Нехай I_j^C — множина номерів змінних w_{ij}, яким у системі нерівностей S_j уже привласнено значення, а I_j^V — множина номерів змінних, значення яких ще не зафіксовано.

На деякій (не першій) ітерації часткова форма системи S_j набуває такого вигляду:

$$\begin{cases} s_{jk} \le b_{jk} & \text{для } k \in K_j^{V0}, \\ s_{jk} > b_{jk} & \text{для } k \in K_j^{V1}, \end{cases} \tag{3}$$

де $s_{jk} = \sum_{i \in I_{jk}^V} w_{ij}$; $b_{jk} = -\sum_{i \in I_{jk}^C} w_{ij}$; I_{jk}^V та I_{jk}^C — множини номерів незафіксованих та зафіксованих змінних, що фігурують у k-й нерівності системи S_j, відповідно, $I_{jk}^V = I_k^1 \cap I_j^V$, $I_{jk}^C = I_k^1 \cap I_j^C$; K_j^{V0} та K_j^{V1} — множини номерів нерівностей системи S_j, що містять незафіксовані змінні та зіставлені вхідним векторам $x^{(k)}$, $1 \le k \le r$, для яких еталонне значення вихідного сигналу j-го нейрона дорівнює 0 та 1 відповідно, $K_j^{V0} = K_j^0 \setminus K_j^C$, $K_j^{V1} = K_j^1 \setminus K_j^C$, $K_j^V = K_j^{V0} \cup K_j^{V1}$; K_j^C — множина номерів нерівностей системи S_j, які не містять незафіксованих змінних, $K_j^C = \{k : (1 \le k \le r) \& (I_{jk}^V = \varnothing)\}$.

АЛГОРИТМ ОБЧИСЛЕННЯ ВАГОВИХ КОЕФІЦІЄНТІВ

Алгоритм обчислення вагових коефіцієнтів нейронної мережі, що синтезується, на основі системи нерівностей (3) полягає у послідовному виконанні таких дій.

1. Вибір нерівності $k^* \in K_j^V$ з мінімальною кількістю змінних

$$| I_{jk^*}^V | = \min \{ | I_{jk}^V |; k \in K_j^V \}.$$

2. Вибір змінної w_{i^*j}, $i^* \in I_{jk^*}^V$, для привласнення значення. Якщо вибрана k^*-та нерівність містить декілька змінних ($| I_{jk^*}^V | > 1$), то змінна w_{i^*j} вибирається довільно.

3. Привласнення значення вибраній змінній w_{i^*j} за такими правилами:

3.1) якщо $k^* \in K_j^{V0}$, то $w_{i^*j} = \min \{ b_{jk}; k \in K_j^{V0}(w_{i^*j}) \}$;

3.2) якщо $k^* \in K_j^{V1}$ то $w_{i^*j} = \max \{ b_{jk}; k \in K_j^{V1}(w_{i^*j}) \} + \delta_{jk}$, де $K_j^{V0}(w_{i^*j})$ та $K_j^{V1}(w_{i^*j})$ — підмножини номерів нерівностей системи S_j, що містять змінну w_{i^*j} та зіставлені вхідним векторам $x^{(k)}$, $1 \le k \le r$, для яких еталонне значення вихідного сигналу j-го нейрона дорівнює 0 та 1 відповідно,

$$K_j^{V0}(w_{i^*j}) = \{ k \in K_j^{V0} : i^* \in I_{jk}^V \}, \; K_j^{V1}(w_{i^*j}) = \{ k \in K_j^{V1} : i^* \in I_{jk}^V \},$$

$$K_j^V(w_{i^*j}) = K_j^{V0}(w_{i^*j}) \cup K_j^{V1}(w_{i^*j}),$$

δ_{jk} — довільне додатне число, $\delta_{jk} > 0$.

Такі правила вибору значення змінної w_{i^*j} забезпечують виконання всіх нерівностей $k \in K_j^{V0}$ (правило 3.1) або $k \in K_j^{V1}$ (правило 3.2), в яких фігурує тільки одна ця змінна, $|I_{jk}^V|=1$. Якщо вибрана k^*-та нерівність містить декілька змінних ($|I_{jk^*}^V|>1$), то повернення до п. 2 алгоритму, інакше виконується п. 4.

4. Виявлення конфліктних нерівностей системи S_j, для яких привласнене значення змінної w_{i^*j} є недопустимим. Якщо $k^* \in K_j^{V0}$, то значення змінної w_{i^*j} буде недопустимим для будь-якої нерівності з протилежним знаком $k \in K_j^{V1}$ за виконання двох умов: змінна w_{i^*j} є єдиною у нерівності, а значення w_{i^*j} не перевищує значення правої частини нерівності. У цьому випадку множина $K_j^{H1}(w_{i^*j})$ номерів конфліктних нерівностей визначається у такий спосіб:

$$K_j^{H1}(w_{i^*j}) = \{k \in K_j^{V1}\colon (i^* \in I_{jk}^V) \& (|I_{jk}^V|=1) \& (w_{i^*j} \le b_{jk})\}.$$

І навпаки, якщо $k^* \in K_j^{V1}$, то значення змінної w_{i^*j} буде недопустимим для нерівностей з протилежним знаком $k \in K_j^{V0}$ за виконання двох умов: змінна w_{i^*j} є єдиною у нерівності, а значення w_{i^*j} перевищує значення правої частини нерівності. Тоді множина $K_j^{H0}(w_{i^*j})$ номерів конфліктних нерівностей визначатиметься так:

$$K_j^{H0}(w_{i^*j}) = \{k \in K_j^{V0}\colon (i^* \in I_{jk}^V) \& (|I_{jk}^V|=1) \& (w_{i^*j} > b_{jk})\}.$$

5. Обчислення корегувальних змінних υ_{jk}, що вводитимуться у конфліктні нерівності. Для конфліктних нерівностей $k \in K_j^{H1}(w_{i^*j})$ та $k \in K_j^{H0}(w_{i^*j})$ корегувальна змінна обчислюється відповідно $\upsilon_{jk} = b_{jk} - w_{i^*j} + \delta_{jk}$ та $\upsilon_{jk} = b_{jk} - w_{i^*j}$.

Корегувальні змінні вводяться у конфліктні нерівності системи (2), внаслідок чого останні мають вигляд

$$[\forall k \in K_j^{H1}(w_{i^*j})](w_{i^*j} + \upsilon_{jk} > b_{jk}),\ [\forall k \in K_j^{H0}(w_{i^*j})](w_{i^*j} + \upsilon_{jk} \le b_{jk}).$$

6. Корегування системи нерівностей (2), що полягає у підставленні в нерівності $k \in K_j^V(w_{i^*j})$ значення змінної w_{i^*j}, у вилученні елемента i^* із множини I_j^V номерів незафіксованих змінних, а також у вилученні із множини K_j^V підмножини $K_j^T(w_{i^*j})$ номерів нерівностей, які перетворилися у числові вирази, $K_j^T(w_{i^*j}) = \{k \in K_j^V(w_{i^*j})\colon |I_{jk}^V|=1\}$.

7. Перевірка умови завершення обчислювального процесу.

Наведений алгоритм послідовно реалізується для кожного j-го вихідного нейрона, $j=\overline{1,n}$. Для кожного з них обчислення завершуються, якщо отримано значення всіх вагових коефіцієнтів w_{ij}, $i=\overline{1,m}$: $I_j^V = \varnothing$.

Оскільки алгоритм не має циклів, а кількість ітерацій дорівнює числу шуканих змінних, його обчислювальна складність близька до лінійної.

СИНТЕЗ НЕЙРОННОЇ МЕРЕЖІ

На початковому етапі мережа складається з двох шарів: вхідного і вихідного. Надалі, щоб уникнути помилок, у мережу вводитимуться додаткові нейрони, що створюватимуть проміжний шар. Нехай N_i^X та N_j^Y — вхідні та вихідні нейрони відповідно, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Кожна корегувальна змінна υ_{jk} $(1 \le j \le n, 1 \le k \le r)$ асоціюється з ваговим коефіцієнтом нового зв'язку мережі, кінцевим пунктом якого є вихідний нейрон N_j^Y, а початковим — додатковий проміжний нейрон N_{jk}^{Π}, що має активізуватися лише у випадку надходження на вхід мережі вхідного вектора $x^{(k)}$ навчальної вибірки.

На вхід кожного проміжного нейрона N_{jk}^{Π} надсилаються вихідні сигнали всіх нейронів вхідного шару N_i^X, $i = \overline{1, m}$. Вагові коефіцієнти зв'язків між вхідними та проміжними нейронами дорівнюють одиниці. Тобто вхідними сигналами проміжного нейрона N_{jk}^{Π} є вхідні сигнали $x^{(k)}$, $k = \overline{1, r}$, з навчальної вибірки нейронної мережі.

Функції активації проміжних нейронів визначаються так:

$$f_{jk}(x) = \prod_{i \in I_k^1} x_i \prod_{i \in I_k^0} (1 - x_i), \; j \in J^H, \; k \in K_j^H,$$

де J^H — множина номерів вихідних нейронів, для яких система нерівностей S_j виявилася несумісною, $J^H = \{1 \le j \le n : K_j^H \ne \varnothing\}$; K_j^H — множина номерів конфліктних нерівностей системи S_j, $K_j^H = \bigcup_{i=1}^{m} [K_j^{H0}(w_{ij}) \cup K_j^{H1}(w_{ij})]$.

Кожен проміжний нейрон N_{jk}^{Π} активується лише тоді, коли зважена сума вагових коефіцієнтів s_{jk} недостатньо велика, щоб активувати вихідний нейрон N_j^Y (якщо еталонний вихідний сигнал $y_j^*(x^{(k)}) = 1$), або занадто велика, щоб залишити вихідний нейрон N_j^Y у неактивованому стані (якщо еталонний вихідний сигнал $y_j^*(x^{(k)}) = 0$).

Уведення у конфліктні нерівності корегувальних змінних еквівалентне включенню до структури нейронної мережі додаткових проміжних нейронів, які отримують вхідні сигнали від усіх нейронів вхідного шару N_i^X, $i = \overline{1, m}$, та генерують вихідні сигнали, спрямовані на один із нейронів вихідного шару N_j^Y, $1 \le j \le n$. Очевидно, що у найбільш несприятливому випадку кількість додаткових нейронів у будь-якому модулі нейронної мережі за наявності r елементів навчальної вибірки не може перевищувати $(r - 1)$.

ПРИКЛАД РЕАЛІЗАЦІЇ МЕТОДУ

Припустимо, що нейронна мережа створюється для розв'язання задачі класифікації об'єктів, характеристики яких описуються 4-вимірними бівалентними векторами. Задача полягає у визначені класу об'єкта за кількістю одиничних елементів вхідного вектора.

Навчальна вибірка передбачає наявність трьох класів об’єктів. Об’єкти, що належать першому класу, описуються векторами $x^{(1)} = (1, 0, 0, 0)$, $x^{(2)} = (0, 0, 0, 1)$, $x^{(3)} = (0, 0, 1, 0)$; другому класу — векторами $x^{(4)} = (0, 0, 1, 1)$, $x^{(5)} = (1, 1, 0, 0)$, $x^{(6)} = (1, 0, 0, 1)$, $x^{(7)} = (0, 1, 0, 1)$; третьому класу — векторами $x^{(8)} = (0, 1, 1, 1)$ та $x^{(9)} = (1, 1, 1, 0)$. Еталонні вектори вихідних сигналів для об’єктів першого класу $y^* (x^{(k)}) = (1, 0, 0)$, $k = \overline{1, 3}$; для об’єктів другого класу $y^* (x^{(k)}) = (0, 1, 0)$, $k = \overline{4, 7}$; для об’єктів третього класу $y^* (x^{(k)}) = (0, 0, 1)$, $k = \overline{8, 9}$.

Отже, нейронна мережа повинна мати чотири вхідні нейрони N_i^X, $i = \overline{1, 4}$, та три вихідні N_j^Y, $j = \overline{1, 3}$.

Система нерівностей, що відповідає вихідному нейрону N_1^Y:

$$S_1 = \{s_{11} = w_{11} > 0;\ s_{12} = w_{41} > 0;\ s_{13} = w_{31} > 0;\ s_{14} = w_{31} + w_{41} \le 0;$$
$$s_{15} = w_{11} + w_{21} \le 0;\ s_{16} = w_{11} + w_{41} \le 0;\ s_{17} = w_{21} + w_{41} \le 0;$$
$$s_{18} = w_{21} + w_{31} + w_{41} \le 0;\ s_{19} = w_{11} + w_{21} + w_{31} \le 0\}.$$

Система нерівностей, що відповідає вихідному нейрону N_2^Y:

$$S_2 = \{s_{21} = w_{12} \le 0;\ s_{22} = w_{42} \le 0;\ s_{23} = w_{32} \le 0;\ s_{24} = w_{32} + w_{42} > 0;$$
$$s_{25} = w_{12} + w_{22} > 0;\ s_{26} = w_{12} + w_{42} > 0;\ s_{27} = w_{22} + w_{42} > 0;$$
$$s_{28} = w_{22} + w_{32} + w_{42} \le 0;\ s_{29} = w_{12} + w_{22} + w_{32} \le 0\}.$$

Система нерівностей, що відповідає вихідному нейрону N_3^Y:

$$S_3 = \{s_{31} = w_{13} \le 0;\ s_{32} = w_{43} \le 0;\ s_{33} = w_{33} \le 0;\ s_{34} = w_{33} + w_{43} \le 0;$$
$$s_{35} = w_{13} + w_{23} \le 0;\ s_{36} = w_{13} + w_{43} \le 0;\ s_{37} = w_{23} + w_{43} \le 0;$$
$$s_{38} = w_{23} + w_{33} + w_{43} > 0;\ s_{39} = w_{13} + w_{23} + w_{33} > 0\}.$$

Розв’язання задачі починається з розгляду системи нерівностей S_1, яка описується такими множинами та параметрами: $K_1^{V0} = \{4, 5, \ldots, 9\}$; $K_1^{V1} = \{1, 2, 3\}$; $I_{11}^V = \{1\}$; $I_{12}^V = \{4\}$; $I_{13}^V = \{3\}$; $I_{14}^V = \{3, 4\}$; $I_{15}^V = \{1, 2\}$; $I_{16}^V = \{1, 4\}$; $I_{17}^V = \{2, 4\}$; $I_{18}^V = \{2, 3, 4\}$; $I_{19}^V = \{1, 2, 3\}$; $(\forall k = \overline{1, 9})(b_{1k} = 0)$. Нехай $(\forall k = \overline{1, 9})(\delta_{1k} = 1)$.

Обчислення вагових коефіцієнтів w_{i1}, $i = \overline{1, 4}$, для фрагмента нейронної мережі, що відповідає вихідному нейрону N_1^Y, здійснюється за таким алгоритмом.

Крок 1:

• вибір нерівності $k^* \in K_1^V = \{1, 2, \ldots, 9\}$ з мінімальною кількістю змінних, $k^* = 1$;

• вибір змінної для привласнення значення w_{11};

• привласнення вибраній змінній значення $w_{11} = 1$;

• виявлення множини номерів конфліктних нерівностей системи S_1, для яких значення змінної $w_{11} = 1$ є недопустимим, $K_1^{H0}(w_{11}) = \varnothing$;

• обчислення корегувальної змінної v_{11} не виконується, оскільки конфліктних нерівностей не виявлено;

• корегування системи нерівностей S_1 (підставлення у нерівність $k \in K_1^V(w_{11}) = \{1, 5, 6, 9\}$ значення змінної $w_{11} = 1$, вилучення елемента 1 із множини $I_1^V = \{1, 2, 3, 4\}$, вилучення елемента 1 із множини $K_1^V = \{1, 2, \ldots, 9\}$);

• перевірка умови завершення обчислювального процесу (умова не виконується, оскільки $I_1^V = \{2, 3, 4\} \neq \varnothing$).

Крок 2. На початку другого кроку часткова система нерівностей S_1 описується такими множинами та параметрами: $K_1^{V0} = \{4, 5, \ldots, 9\}$; $K_1^{V1} = \{2, 3\}$; $I_{12}^V = \{4\}$; $I_{13}^V = \{3\}$; $I_{14}^V = \{3, 4\}$; $I_{15}^V = \{2\}$; $I_{16}^V = \{4\}$; $I_{17}^V = \{2, 4\}$; $I_{18}^V = \{2, 3, 4\}$; $I_{19}^V = \{2, 3\}$; $(\forall k \in \{2, 3, 4, 7, 8\})(b_{1k} = 0)$; $(\forall k \in \{5, 6, 9\})(b_{1k} = -1)$. Далі виконуються такі дії:

• вибір нерівності $k^* \in K_1^V = \{2, 3, \ldots, 9\}$ з мінімальною кількістю змінних, $k^* = 2$;

• вибір змінної для привласнення значення w_{41};

• привласнення вибраній змінній значення $w_{41} = 1$;

• виявлення множини номерів конфліктних нерівностей системи S_1, для яких значення змінної $w_{41} = 1$ є недопустимим, $K_1^{H0}(w_{41}) = \{6\}$;

• обчислення корегувальної змінної $\upsilon_{16} = -2$;

• корегування системи нерівностей S_1 (підставлення у нерівність $k \in K_1^V(w_{41}) = \{2, 4, 6, 7, 8\}$ значення змінної $w_{41} = 1$, вилучення елемента 4 із множини $I_1^V = \{2, 3, 4\}$, вилучення елементів 2 та 6 із множини $K_1^V = \{2, 3, \ldots, 9\}$);

• перевірка умови завершення обчислювального процесу (умова не виконується, оскільки $I_1^V = \{2, 3\} \neq \varnothing$).

Крок 3. На початку третього кроку часткова система нерівностей S_1 описується такими множинами та параметрами: $K_1^{V0} = \{4, 5, 7, 8, 9\}$; $K_1^{V1} = \{3\}$; $I_{13}^V = \{3\}$; $I_{14}^V = \{3\}$; $I_{15}^V = \{2\}$; $I_{17}^V = \{2\}$; $I_{18}^V = \{2, 3\}$; $I_{19}^V = \{2, 3\}$; $b_{13} = 0$; $(\forall k \in \{4, 5, 7, 9\})(b_{1k} = -1)$; $b_{18} = -2$. Далі виконуються такі дії:

• вибір нерівності $k^* \in K_1^V = \{3, 4, 5, 7, 8, 9\}$ з мінімальною кількістю змінних, $k^* = 3$;

• вибір змінної для привласнення значення w_{31};

• привласнення вибраній змінній значення $w_{31} = 1$;

• виявлення множини номерів конфліктних нерівностей системи S_1, для яких значення змінної $w_{31} = 1$ є недопустимим, $K_1^{H0}(w_{31}) = \{4\}$;

• обчислення корегувальної змінної $\upsilon_{14} = -2$;

• корегування системи нерівностей S_1 (підставлення у нерівність $k \in K_1^V(w_{31}) = \{3, 4, 8, 9\}$ значення змінної $w_{31} = 1$, вилучення елемента 3 із множини $I_1^V = \{2, 3\}$, вилучення елементів 3 та 4 із множини $K_1^V = \{3, 4, 5, 7, 8, 9\}$);

• перевірка умови завершення обчислювального процесу (умова не виконується, оскільки $I_1^V = \{2\} \neq \varnothing$).

Крок 4. На початку четвертого кроку часткова система нерівностей S_1 описується такими множинами та параметрами: $K_1^{V0} = \{5, 7, 8, 9\}$; $K_1^{V1} = \varnothing$; $I_{15}^V = \{2\}$; $I_{17}^V = \{2\}$; $I_{18}^V = \{2\}$; $I_{19}^V = \{2\}$; $b_{15} = b_{17} = -1$; $b_{18} = b_{19} = -2$. Далі виконуються такі дії:

• вибір нерівності $k^* \in K_1^V = \{5, 7, 8, 9\}$ з мінімальною кількістю змінних, $k^* = 5$;

- вибір змінної для привласнення значення w_{21};
- привласнення вибраній змінній значення $w_{21} = -2$;
- виявлення множини номерів конфліктних нерівностей системи S_1, для яких значення змінної $w_{21} = -2$ є недопустимим, $K_1^{H0}(w_{21}) = \varnothing$;
- обчислення корегувальної змінної v_{15} не виконується, оскільки конфліктних нерівностей не виявлено;
- корегування системи нерівностей S_1 (підставлення у нерівність $k \in K_1^V(w_{21}) = \{5, 7, 8, 9\}$ значення змінної $w_{21} = -2$, вилучення елемента 2 із множини $I_1^V = \{2\}$ номерів незафіксованих змінних, вилучення елементів 5, 7, 8, 9 із множини $K_1^V = \{5, 7, 8, 9\}$);
- перевірка умови завершення обчислювального процесу.

Процес обчислення вагових коефіцієнтів для фрагмента нейронної мережі, що відповідає вихідному нейрону N_1^Y, завершується, оскільки $I_1^V = \varnothing$.

Результати обчислень: значення вагових коефіцієнтів $w_{11} = 1$, $w_{21} = -2$, $w_{31} = 1$, $w_{41} = 1$; множина номерів конфліктних нерівностей $K_1^H = \{4, 6\}$; значення корегувальних змінних $v_{14} = -2$, $v_{16} = -2$.

З огляду на викладене для отримання безпомилкового вихідного сигналу нейрона N_1^Y для всіх векторів вхідних сигналів, передбачених навчальною вибіркою, до структури нейронної мережі потрібно включити два проміжні нейрони N_{14}^{Π} та N_{16}^{Π} з функціями активації $f_{14}(x) = (1 - x_1)(1 - x_2)x_3x_4$ та $f_{16}(x) = x_1(1 - x_2)(1 - x_3)x_4$ і ваговими коефіцієнтами вихідних зв'язків v_{14} та v_{16} відповідно.

Структуру фрагмента нейронної мережі, що відповідає вихідному нейрону N_1^Y, наведено на рис. 1, де додатково введено проміжні нейрони, їхні зв'язки позначено штриховими лініями.

Аналогічно обчислюються вагові коефіцієнти та синтезуються фрагменти нейронної мережі для вихідних нейронів N_2^Y та N_3^Y.

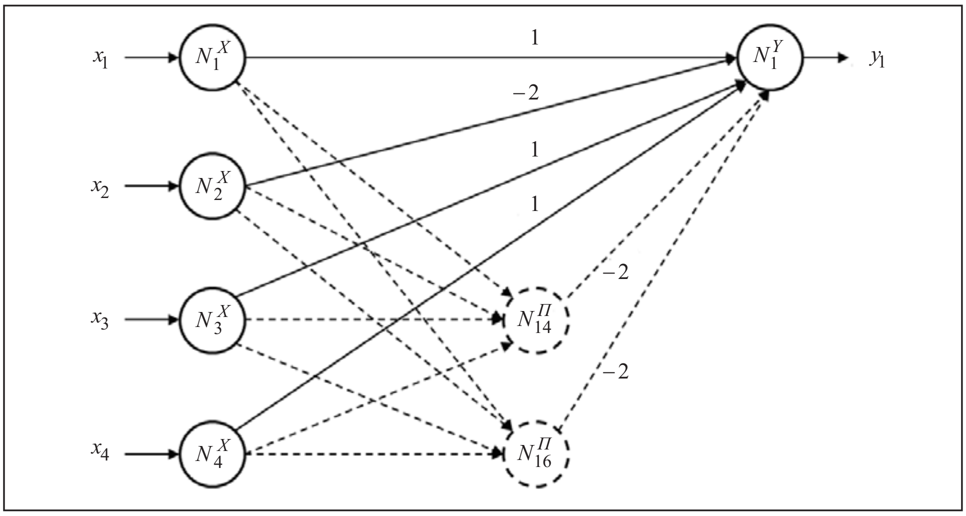

Рис. 1. Фрагмент нейронної мережі (приклад)

Результати обчислень для вихідного нейрона N_2^Y такі: значення вагових коефіцієнтів $w_{12}=0$, $w_{22}=1$, $w_{32}=w_{42}=0$; множина номерів конфліктних нерівностей $K_2^H=\{4,6,8,9\}$; значення корегувальних змінних $\upsilon_{24}=\upsilon_{26}=1$, $\upsilon_{28}=\upsilon_{29}=-1$. Отже, для отримання безпомилкового вихідного сигналу нейрона N_2^Y для всіх векторів вхідних сигналів, передбачених навчальною вибіркою, до структури нейронної мережі потрібно включити чотири проміжні нейрони $N_{24}^{П}$, $N_{26}^{П}$, $N_{28}^{П}$ та $N_{29}^{П}$ з функціями активації

$$f_{24}(x)=(1-x_1)(1-x_2)x_3x_4,\ f_{26}(x)=x_1(1-x_2)(1-x_3)x_4,$$
$$f_{28}(x)=(1-x_1)x_2x_3x_4,\ f_{29}(x)=x_1x_2x_3(1-x_4)$$

і ваговими коефіцієнтами вихідних зв'язків υ_{24}, υ_{26}, υ_{28} та υ_{29} відповідно.

Результати обчислень для вихідного нейрона N_3^Y: значення вагових коефіцієнтів $w_{13}=w_{23}=w_{33}=w_{43}=0$; множина номерів конфліктних нерівностей $K_3^H=\{8,9\}$; значення корегувальних змінних $\upsilon_{38}=\upsilon_{39}=1$. Отже, для отримання безпомилкового вихідного сигналу нейрона N_3^Y для всіх векторів вхідних сигналів, передбачених навчальною вибіркою, до структури нейронної мережі необхідно включити два проміжні нейрони $N_{38}^{П}$ та $N_{39}^{П}$ з функціями активації

$$f_{38}(x)=(1-x_1)x_2x_3x_4,\ f_{39}(x)=x_1x_2x_3(1-x_4)$$

і ваговими коефіцієнтами вихідних зв'язків υ_{38} та υ_{39} відповідно.

Для розв'язання поставленої задачі було синтезовано нейронну мережу з єдиним проміжним шаром, що містить вісім нейронів. Синтезована мережа з абсолютною точністю генерує правильні вихідні сигнали для всіх вхідних векторів навчальної вибірки. Розв'язок задачі було отримано за 48 лінійних ітерацій наведеного алгоритму.

Для порівняння з наявними методами задачу, що розглядалася, було розв'язано за допомогою функції Neuralnet відомої мови машинного навчання R. Програма синтезувала нейронну мережу з чотирма прихованими шарами, здійснила 76 циклів навчання та згенерувала результат із середньоквадратичною похибкою класифікації 0.025072 [8].

ВИСНОВКИ

Відомо, що навчання нейронної мережі за заданих функцій активації нейронів полягає у встановленні значень вагових коефіцієнтів, що забезпечують максимальну точність вихідних сигналів. Для цього зазвичай застосовують трудомісткі ітераційні обчислювальні методи (найчастіше — метод зворотного поширення помилки), які дають змогу максимально наблизитися до розв'язку задачі, але не можуть усунути помилок. Пояснюється це тим, що у більшості практичних випадків задача обчислення вагових коефіцієнтів є суперечливою у математичному сенсі.

Тому є доцільним алгебраїчний підхід до її розв'язання, що полягає у побудові математичної моделі задачі обчислення вагових коефіцієнтів, подальший аналіз цієї моделі та усунення формальних суперечностей.

Запропонований метод є однією з можливих реалізацій такого підходу, поширеною на бінарні нейронні мережі зі ступінчастими функціями активації нейронів. Такі властивості визначають представлення математичної моделі задачі обчислення вагових коефіцієнтів у вигляді системи лінійних нерівностей.

Усунення формальних суперечностей системи нерівностей здійснюється введенням корегувальних змінних, що зумовлює необхідність включення до структури нейронної мережі додаткових нейронів, які у сукупності утворюють єдиний проміжний шар. У такий спосіб паралельно синтезується нейронна мережа, здатна генерувати вихідні сигнали з абсолютною точністю.

Подальшим розвитком запропонованого методу є його поширення на нейронні мережі інших класів та їхнє самонавчання.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Kazantsev A.V. Visual data processing and action control using binary neural network. *Eight International Workshop on Image Analysis for Multimedia Interactive Services (WIAMIS'07)* (Santorini, Greece, 6–8 June 2007). IEEE, 2007. P. 23. https://doi.org//10.1109/WIAMIS.2007.90.
2. Liang S., Sun R., Li Y., Srikant R. Understanding the loss surface of neural networks for binary classification. *Proc. of the 35th International Conference on Machine Learning*. 2018. P. 2835–2843. URL: https://proceedings.mlr.press/v80/liang18a/liang18a.pdf.
3. Krinitskiy M., Verezemskaya P., Grashchenkov K., Tilinina N., Gulev S., Lazzara M. Deep convolutional neural networks capabilities for binary classification of polar mesocyclones in satellite mosaics. *Atmosphere*. 2018. Vol. 9, N 11. Article number 426. https://doi.org/10.3390/atmos9110426.
4. Dunnmon J.A., Yi D., Langlotz C.P., Re C., Rubin D.L., Lungren M.P. Assessment of convolutional neural networks for automated classification of chest radiographs. *Radiology*. 2019. Vol. 290, N 2. P. 537–544.
5. Korolev S., Safiullin A., Belyaev M., Dodonova Y. Residual and plain convolutional neural networks for 3D brain mri classification. arXiv:1701.06643v1 [cs.CV] 23 Jan 2017. URL: https://arxiv.org/pdf/1701.06643.pdf.
6. Menon A.K., Williamson R.C. The cost of fairness in binary classification. *Proc. of the 1st Conference on Fairness, Accountability and Transparency. PMLR.* 2018. Vol. 81. P. 107–118.
7. Ferreyra-Ramirez A., Rodriguez-Martinez E., Aviles-Cruz C., Lopez-Saca F. Image retrieval system based on a binary auto-encoder and a convolutional neural network. *IEEE Latin America Transactions*. 2020. Vol. 18, Iss. 11. P. 1925–1932. https://doi.org//10.1109/TLA.2020.9398634.
8. Литвиненко О.Є., Кучеров Д.П., Глибовець М.М. Декомпозиційний метод обчислення вагових коефіцієнтів бінарної нейронної мережі. *Кібернетика та системний аналіз*. 2022. Т. 58, № 6. С. 45–53.

A. Litvinenko

AN ALGEBRAIC METHOD FOR SYNTHESIZING ERROR-FREE BINARY NEURAL NETWORK

Abstract. A mathematical model of the problem of calculating the weighting coefficients of a binary neural network is given. It is proved that in the case of step functions of neuron activation, this model is a system of linear inequalities, which is incompatible for most practical problems. A method of analyzing the system of inequalities is proposed, which allows calculating the values of the weighting coefficients and synthesizing the structure of the neural network, which ensures the absolute accuracy of the output signals. The algorithm and an implementation example are given.

Keywords: neural network, mathematical model, analysis, synthesis, error.

Надійшла до редакції 11.10.2023