СИСТЕМНИЙ
АНАЛІЗ

УДК 519.86

А.М. ГУПАЛ
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *gupalanatol@gmail.com*.

С.В. ПАШКО
Інститут програмних систем НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *pashko55@yahoo.com*.

ОПТИМІЗАЦІЯ РОЗПОДІЛУ КАПІТАЛЬНИХ ІНВЕСТИЦІЙ НА ОСНОВІ ДИНАМІЧНОЇ ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ

Анотація. Розглянуто динамічні економіко-математичні екстремальні задачі оптимізації розподілу інвестицій між галузями економіки країни. Використано модель «витрати–випуск» Леонтьєва та модель Солоу для побудови екстремальних задач, в яких максимізується приведений валовий внутрішній продукт за умов обмеженості обсягів інвестицій. Доведено, що побудована задача математичного програмування належить класу гладких та опуклих екстремальних задач. За допомогою методу умовного градієнта розраховано оптимальний розподіл інвестицій для економіки України.

Ключові слова: оптимізація, розподіл інвестицій, економіко-математична модель, виробнича функція, валовий внутрішній продукт, метод.

ВСТУП

Проблеми економічного зростання на ґрунті інвестицій широко висвітлюються в економіко-математичних публікаціях. Так, у [1, 2] розглянуто факторну модель Р. Солоу, що описує зростання випуску продукції внаслідок збільшення капіталу, кількості працюючих та підвищення рівня розвитку технологій. В. Леонтьєвим був розроблений метод міжгалузевого аналізу [3], в якому використано таблиці «витрати–випуск». У [4] описано задачі максимізації обсягу споживання на основі динамічного міжгалузевого балансу. В [5] досліджено моделі динаміки відкритої економіки, серед яких оптимізаційні моделі динамічного міжгалузевого балансу. В [6] введено поняття збалансованого зростання та доведено теорему про магістраль, в якій стверджується, що ефективна траєкторія економічного розвитку наближується до нейманівської траєкторії збалансованого зростання.

Строгі результати математичної теорії економічної динаміки мають важливе теоретичне значення, однак, як зазначено в [4], вони зазвичай досягаються ціною значного спрощення опису економічних процесів, тому ці результати не завжди безпосередньо застосовують на практиці. Наприклад, у задачах максимізації обсягу споживання оптимальним стратегіям економічного розвитку притаманно небажане явище «релейне перемикання» [4]. Через економічні та технологічні зміни не завжди є доцільним збалансоване зростання. В умовах відкритої економіки завдяки міжнародному розподілу праці немає потреби максимізувати приріст випуску продукції або споживчих благ у заданих пропорціях.

У [7] побудовано економіко-математичну модель оптимізації розподілу капітальних інвестицій, в якій максимізується приріст валового внутрішнього продукту (ВВП) країни. Екстремальну задачу сформульовано для одного планового періоду, майбутній приріст ВВП приведено до цього періоду за допомогою процентної ставки. У запропонованій статті з використанням моделі «витрати–випуск» Лєонтьєва та динамічної моделі Солоу побудовано економіко-математичні динамічні оптимізаційні моделі розподілу капітальних інвестицій між галузями економіки впродовж відрізку часу, що складається з кількох планових періодів. У задачах максимізується приведений приріст ВВП за обмежень на обсяги інвестицій. Побудовані екстремальні задачі є гладкими та належать класу задач опуклого програмування.

Економіка країни вважається ринковою та відкритою, а обсяг випуску продукції — відносно невеликим, тож допускається експорт товарів та послуг у потрібній кількості, а імпорт обмежено фінансовими спроможностями. Як одне з джерел капітальних інвестицій у розглядуваній статті пропонується використовувати пільги на податки. На основі побудованої моделі та даних, що регулярно публікуються Державною службою статистики України [8–11], обчислено оптимальні величини капітальних інвестицій в окремі галузі економіки України.

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ОПТИМІЗАЦІЇ РОЗПОДІЛУ КАПІТАЛЬНИХ ІНВЕСТИЦІЙ

Припустимо, що економіка країни складається з n галузей. Економіко-математичну модель Солоу для кожної галузі $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ можна записати так [1, 2]:

$$x_i = \tau_i f_i(k_i, l_i), \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt} k_i = \rho_i x_i - \gamma_i k_i, \ \ k_i(t_0) = k_i^0 > 0, \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt} l_i = \mu_i l_i, \ \ l_i(t_0) = l_i^0 > 0. \tag{3}$$

Тут i — номер галузі; $x_i = x_i(t)$ — вартість випуску продукції за одиницю часу в момент t; $\tau_i = \tau_i(t)$ — рівень розвитку технології; $\tau_i f_i(k_i, l_i)$ — виробнича функція; $k_i = k_i(t)$ — кількість капіталу в галузі; $l_i = l_i(t)$ — кількість трудових ресурсів; $\rho_i, \gamma_i, \mu_i, k_i^0, l_i^0$ — задані константи, $0 < \rho_i, \gamma_i < 1$.

У кожний момент часу виконуються співвідношення міжгалузевого балансу Лєонтьєва

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i^1 + y_i^2 + p_i^1 - p_i^2, \ \ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

де a_{ij} — вартість i-ї продукції, що потрібна для виготовлення j-ї продукції одиничної вартості; y_i^1 — витрати продукції i-ї галузі для валового нагромадження капіталу в цій та інших галузях за одиницю часу; y_i^2 — обсяг продукції i-ї галузі для кінцевих споживчих витрат за одиницю часу; p_i^1, p_i^2 — відповідно експорт та імпорт продукції i-го типу. Величини a_{ij} обчислюються за формулою $a_{ij} = x_{ij} / x_j$, де x_{ij} — вартість i-ї продукції, що використовується для виробництва в j-й галузі. Величини $x_i, y_i^2, p_i^1, p_i^2, a_{ij}$ вважаються невід'ємними, $x_i, y_i^1, y_i^2, p_i^1, p_i^2$ — потоки (вимірюються як обсяг цінностей за одиницю часу [1]). Система рівнянь (4) разом з системами (1)–(3) для всіх галузей являє собою модель економіки країни, що об'єднує моделі Солоу та Лєонтьєва.

Позначимо $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y^1=(y_1^1, y_2^1, \ldots, y_n^1)$, $y^2=(y_1^2, y_2^2, \ldots, y_n^2)$, $p^1=(p_1^1, p_2^1, \ldots, p_n^1)$, $p^2=(p_1^2, p_2^2, \ldots, p_n^2)$, тут і далі всі вектори вважатимемо векторами-стовпцями. Нехай A – квадратна матриця порядку n з елементами a_{ij}. Система (4) у векторно-матричній формі записується так:

$$x = Ax + y^1 + y^2 + p^1 - p^2. \tag{5}$$

Величина $\hat{x}_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}$ становить обсяг проміжного споживання в j-й галузі. Справедливе співвідношення

$$x = \hat{x} + w^1 + w^2 + w^3, \tag{6}$$

де $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$; $w^\eta = (w_1^\eta, w_2^\eta, \ldots, w_n^\eta)$, $\eta = 1, 2, 3$; w_j^1 — оплата праці найманих працівників у j-й галузі; w_j^2 — податки на виробництво та імпорт за винятком субсидій; w_j^3 — валовий прибуток, змішаний дохід. Величини w_j^η залежать від часу та являють собою потоки.

Співвідношення (5), (6) відповідають таблицям «витрати–випуск» у цінах споживачів, які щорічно розробляються та публікуються в Україні [8]. Величина $\sum_{j=1}^{n}(x_j - \hat{x}_j)$, що дорівнює $\sum_{j=1}^{n}(w_j^1 + w_j^2 + w_j^3)$, являє собою ВВП [12]. Справедлива рівність

$$\sum_{j=1}^{n}((E-A)x)_i = \sum_{j=1}^{n}(x_j - \hat{x}_j), \tag{7}$$

де E — одинична матриця. Дійсно,

$$\sum_{i=1}^{n}((E-A)x)_i = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij},$$

$$\sum_{j=1}^{n}(x_j - \hat{x}_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij};$$

звідси випливає рівність (7). Отже, обсяг v валового внутрішнього продукту обчислюється так:

$$v = \sum_{i=1}^{n}((E-A)x)_i.$$

Обсяг ВВП, що створений, починаючи з моменту t_0, та приведений до t_0, становить

$$\int_{t_0}^{\infty}(1+\alpha)^{-(t-t_0)} v(t)\,dt = \int_{t_0}^{\infty}(1+\alpha)^{-(t-t_0)} \sum_{i=1}^{n}((E-A)x(t))_i\,dt,$$

де α — величина процентної ставки [1], $\alpha > 0$.

Припустимо, що, починаючи з моменту часу t_0, в i-ту галузь економіки надходять додаткові капітальні інвестиції $u_i(t)$, які утворюються за рахунок податкових пільг або інших джерел. Позначимо $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t))$. Рівняння (2) набувають вигляд

$$\frac{d}{dt}k_i = \rho_i x_i + u_i - \gamma_i k_i,\ \ k_i(t_0) = k_i^0 > 0,\ \ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{8}$$

Функції $\tau_i(t), f_i(k_i, l_i), u_i(t)$ вважаємо такими, що диференціальні рівняння (8) мають єдиний розв'язок для заданих початкових умов на вибраному часовому проміжку $[t_0, t_1]$.

Для оптимізації розподілу капітальних інвестицій u можна використати задачу про оптимальне керування, в якій максимізується ВВП, що створений на часовому проміжку $[t_0, t_1]$ та приведений до моменту t_0:

$$\int_{t_0}^{t_1} (1+\alpha)^{-(t-t_0)} \sum_{i=1}^{n} ((E-A)x(t))_i \, dt \underset{u}{\rightarrow} \max, \tag{9}$$

$$x_i = \tau_i f_i(k_i, l_i), \; i = 1, 2, \ldots, n, \tag{10}$$

$$\frac{d}{dt} k_i = \rho_i x_i + u_i - \gamma_i k_i, \; k_i(t_0) = k_i^0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{11}$$

$$\frac{d}{dt} l_i = \mu_i l_i, \; l_i(t_0) = l_i^0 > 0, \; i = 1, 2, \ldots, n, \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(t) \le r_0(t), \; t \in [t_0, t_1], \tag{13}$$

$$0 \le u_i(t) \le r_i(t), \; i = 1, 2, \ldots, n, \; t \in [t_0, t_1]. \tag{14}$$

Для визначення $r_0(t)$ потрібно врахувати максимально допустиму величину, на яку може бути зменшено бюджет країни, а під час визначення $r_i(t), i = 1, 2, \ldots, n,$ — обмеженість людських ресурсів, банківських кредитів, ринків збуту, сировини та матеріалів.

Числа α, t_1 доцільно вибирати такими, щоб величина $\int_{t_1}^{\infty} (1+\alpha)^{-(t-t_0)} v(t) \, dt$ була малою порівняно з $\int_{t_0}^{\infty} (1+\alpha)^{-(t-t_0)} v(t) \, dt$. Зауважимо, що додаткові капітальні інвестиції в i-ту галузь, швидкість потоку яких дорівнює $u_i(t)$, становлять тільки частину загальних інвестицій, що надходять зі швидкістю $\rho_i x_i(t) + u_i(t)$.

Задачу (9)–(14) можна використовувати для теоретичних досліджень. Для розрахунку оптимального розподілу капітальних інвестицій числовим методом перейдемо до аналогічної задачі з дискретним часом. Зауважимо, що використання дискретного часу має економічний сенс, оскільки економіці притаманний річний цикл розвитку. Тому розглянемо задачу з дискретним часом, яка являє собою аналог задачі (9)–(14) та має часовий крок тривалістю в один рік:

$$\sum_{t=1}^{T} \left((1+\alpha)^{-t} \sum_{i=1}^{n} ((E-A)x^t)_i \right) \underset{u}{\rightarrow} \max, \tag{15}$$

$$x_i^t = \tau_i^t f_i(k_i^t, l_i^t), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad t = 1, 2, \ldots, T, \tag{16}$$

$$k_i^{t+1} = k_i^t + \rho_i^t x_i^t + u_i^t - \gamma_i^t k_i^t, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad t = 0, 1, \ldots, T-1, \tag{17}$$

$$l_i^{t+1} = (1+\mu_i^t) l_i^t, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad t = 0, 1, \ldots, T-1, \tag{18}$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^t \le r_0^t, \quad t = 0, 1, \ldots, T-1, \tag{19}$$

$$0 \le u_i^t \le r_i^t, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad t = 0, 1, \ldots, T-1. \tag{20}$$

Тут t — номер року, часовий проміжок планування починається з нульового року та включає роки з номерами $0,1,\ldots,T$, де T — натуральне число; $x_i^t \geq 0$ — обсяг випуску продукції в i-й галузі впродовж t-го року, $x^t = (x_1^t, x_2^t, \ldots, x_n^t)$; $\tau_i^t > 0$ — число, що показує рівень розвитку технології; u_i^t — обсяг додаткових інвестицій в i-ту галузь у t-му році, $u = (u_1^0, u_2^0, \ldots, u_n^0, \ldots, u_1^{T-1}, u_2^{T-1}, \ldots, u_n^{T-1})$; k_i^t, l_i^t — кількість капіталу та кількість працюючих відповідно в i-й галузі на початку t-го року; $k_i^0 > 0$, $l_i^0 > 0$ — задані числа; $r_0^t \geq 0, r_i^t \geq 0$ — константи, що обмежують обсяги інвестицій. У задачі (15)–(20) величини $\rho_i^t, \gamma_i^t, \mu_i^t$ залежать від часу та номеру галузі, $0 < \rho_i^t, \gamma_i^t < 1$, $\mu_i^t > -1$. Функції $f_i(k,l)$ в області $\{(k,l): k>0, l>0\}$ набувають додатних значень.

Вважаючи елементи матриці прямих витрат A та коефіцієнти співвідношень (16)–(18) випадковими величинами, можна розглянути задачу стохастичного програмування, в якій максимізується математичне сподівання приведеного ВВП

$$M \sum_{t=1}^{T} \left((1+\alpha)^{-t} \sum_{i=1}^{n} ((E-A)x^t)_i \right) \to \max_u$$

за умов (16)–(20), де M — знак математичного сподівання. Далі, однак, параметри екстремальної задачі вважаються детермінованими.

ВЛАСТИВОСТІ ЕКСТРЕМАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ РОЗПОДІЛУ ІНВЕСТИЦІЙ ТА МЕТОД ЇЇ РОЗВ'ЯЗАННЯ

Розглянемо задачу (15)–(20). Нехай компоненти вектора u задовольняють умови (19), (20). Використовуючи співвідношення (16)–(18), послідовно обчислюємо величини $x_i^0, k_i^1, l_i^1, x_i^1, k_i^2, l_i^2, x_i^2, \ldots, k_i^T, l_i^T, x_i^T$, $i = 1,2,\ldots,n$, а також значення $g(u)$ цільової функції (15). Приходимо до задачі

$$g(u) = \sum_{t=1}^{T} \left((1+\alpha)^{-t} \sum_{i=1}^{n} ((E-A)x^t(u))_i \right) \to \max_u, \tag{21}$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^t \leq r_0^t, \quad t = 0,1,\ldots,T-1, \tag{22}$$

$$0 \leq u_i^t \leq r_i^t, \quad i = 1,2,\ldots,n, \quad t = 0,1,\ldots,T-1. \tag{23}$$

Припустимо, що в області $\{(k,l): k>0, l>0\}$ функції $f_i(k,l)$ визначені, додатні, неперервні та мають неперервні невід'ємні частинні похідні за k, увігнуті за k, коефіцієнти при змінних x_i^t у цільовій функції (21) невід'ємні. Доведемо, що за таких умов функція $g(u)$ гладка та увігнута.

Доведемо, що функція $g(u)$ є гладкою, тобто має неперервні частинні похідні за всіма змінними $u_1^0, u_2^0, \ldots, u_n^0, \ldots, u_1^{T-1}, u_2^{T-1}, \ldots, u_n^{T-1}$. Цільова функція (21) є лінійною функцією від величин x_i^t, які своєю чергою є функціями від u_j^q, тому достатньо довести, що існують неперервні частинні похідні $\partial x_i^t / \partial u_j^q$. Якщо $i \neq j$, то x_i^t не залежить від u_j^q, тому $\partial x_i^t / \partial u_j^q = 0$. Нехай $i = j$. Враховуючи незалежність величин k_i^0 від u_i^q та використовуючи (17), отримуємо

$$\frac{\partial k_i^0}{\partial u_i^q}=0,\ q=0,\dots,T-1,$$

$$\frac{\partial k_i^{t+1}}{\partial u_i^q}=0,\ t=0,\dots,T-2,\ q=t+1,\dots,T-1,$$

$$\frac{\partial k_i^{t+1}}{\partial u_i^q}=(1-\gamma_i^t)\frac{\partial k_i^t}{\partial u_i^q}+\rho_i^t\tau_i^t\frac{\partial f_i(k_i^t,l_i^t)}{\partial k_i^t}\cdot\frac{\partial k_i^t}{\partial u_i^q}+\frac{\partial u_i^t}{\partial u_i^q},\ t=0,\dots,T-1,\ q=0,\dots,t.$$

Тут $\frac{\partial u_i^t}{\partial u_i^q}=\begin{cases}1, & q=t,\\ 0, & q<t.\end{cases}$ Із цих співвідношень послідовно виводимо існування неперервних частинних похідних $\partial k_i^t/\partial u_i^q$, $q=0,\dots,T-1$, $t=0,\dots,T$. Існування та неперервність частинних похідних $\partial x_i^t/\partial u_i^q$ випливає з формули $\frac{\partial x_i^t}{\partial u_i^q}=\tau_i^t\frac{\partial f_i(k_i^t,l_i^t)}{\partial k_i^t}\cdot\frac{\partial k_i^t}{\partial u_i^q}$. Тому цільова функція $g(u)$ має неперервні частинні похідні за всіма змінними $u_1^0,u_2^0,\dots,u_n^0,\dots,u_1^{T-1},u_2^{T-1},\dots,u_n^{T-1}$.

Доведемо, що цільова функція $g(u)$ увігнута за u. Запишемо співвідношення (17) так:

$$k_i^{t+1}=(1-\gamma_i^t)k_i^t+\rho_i^t\tau_i^t f_i(k_i^t,l_i^t)+u_i^t,\quad i=1,2,\dots,n,\quad t=0,1,\dots,T-1. \tag{24}$$

Легко довести, що з увігнутості за u функцій $k_i^t(u)$ випливає увігнутість за u функцій $f_i(k_i^t(u),l_i^t)$. Дійсно,

$$f_i(k_i^t(\lambda\tilde{u}+(1-\lambda)\hat{u}),l_i^t)\ge f_i(\lambda k_i^t(\tilde{u})+(1-\lambda)k_i^t(\hat{u}),l_i^t)\ge$$

$$\ge\lambda f_i(k_i^t(\tilde{u}),l_i^t)+(1-\lambda)f_i(k_i^t(\hat{u}),l_i^t),$$

де $0\le\lambda\le1$. Тут враховано, що функції $f_i(k,l)$ для кожного l неспадні та увігнуті, як функції від k. Тому, використовуючи (24), послідовно виводимо, що всі функції $k_i^t(u)$ та $f_i(k_i^t(u),l_i^t)$ увігнуті за u. Оскільки коефіцієнти при змінних $x_i^t=\tau_i^t f_i(k_i^t(u),l_i^t)$ у цільовій функції (21) невід'ємні, функція $g(u)$ увігнута за u.

Прикладом виробничої функції може бути функція Кобба–Дугласа–Тінбергена [13]

$$x=c_1e^{\omega t}k^{\sigma}l^{1-\sigma}, \tag{25}$$

де c_1,ω,σ – константи, $c_1>0$, $0\le\sigma\le1$. Якщо застосовується функція (25) і коефіцієнти при змінних x_i^t у цільовій функції (21) невід'ємні, то функція $g(u)$ гладка та увігнута за u.

Отже, за вказаних умов задача (21)–(23) є гладкою задачею опуклого програмування. Для розв'язання цієї задачі можна використати метод умовного градієнта [14, 15]. Позначивши U множину векторів u, що задовольняють умови (22), (23), задачу (21)–(23) запишемо у вигляді

$$g(u)\underset{u\in U}{\to}\max. \tag{26}$$

Метод умовного градієнта полягає в наступному. Виберемо початкову точку $u_0 \in U$. На m-му кроці обчислюємо

$$\bar{u}_m = \arg\max_{u \in U} \langle \nabla g(u_m), u \rangle, \qquad (27)$$

$$\delta_m = \arg\max_{0 \le \delta \le 1} g(u_m + \delta(\bar{u}_m - u_m)), \qquad (28)$$

$$u_{m+1} = u_m + \delta_m (\bar{u}_m - u_m). \qquad (29)$$

Тут $\langle a, b \rangle$ — скалярний добуток векторів a та b, ∇g — градієнт функції g.

Нехай u^* — оптимальний розв'язок задачі (26). Для метода умовного градієнта справедлива оцінка

$$g(u^*) - g(u_m) \le \langle \nabla g(u_m), \bar{u}_m - u_m \rangle. \qquad (30)$$

Дійсно, оскільки функція $g(u)$ увігнута, виконується нерівність

$$g(u^*) - g(u_m) \le \left\langle \nabla g(u_m), u^* - u_m \right\rangle.$$

Очевидно, справедлива нерівність

$$\left\langle \nabla g(u_m), u^* \right\rangle \le \langle \nabla g(u_m), \bar{u}_m \rangle.$$

З двох останніх співвідношень випливає (30).

Часткові границі послідовності $\{u_m\}$ є точками максимуму функції $g(u)$ на множині U та справедлива оцінка

$$g(u^*) - g(u_m) = O(1/m), \qquad (31)$$

яку неможливо покращити [14]. З результатів у [16] та із співвідношення (31) випливає, що метод умовного градієнта не субоптимальний. Цей метод використовується для розв'язування задачі (26) через його простоту та задовільну швидкість збіжності на практиці, а також через можливість застосування оцінки (30), яка дає змогу зупинити обчислювальний процес після досягнення потрібної точності. Метод максимізації лінійної функції на множині вигляду (22), (23) описано в [7].

РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЛОВИХ РОЗРАХУНКІВ

Для прикладу оптимізуємо додаткові інвестиції в економіку України за п'ять років, використавши задачу (15)–(20), яку також можна представити у вигляді (21)–(23) або (26). Задачу розв'язуватимемо методом (27)–(29) за таких умов.

Застосовуємо однофакторну виробничу функцію $x = c_2 k^{\sigma}$ (де $c_2 > 0$ — константа), яка утворюється з функції (25), якщо вибрати $\omega = 0$, $l = \text{const}$. Вибираємо $T = 40$, $\alpha = 1/10$. Матриця коефіцієнтів прямих витрат A обчислюється на основі таблиці «витрати–випуск» у цінах споживачів за 2021 р. Для визначення параметрів задачі використовуємо статистичні дані, опубліковані Державною службою статистики України [8–11], і застосовуємо метод найменших квадратів. Розрахунки виконуються за цінами 2021 р. та вважається, що індекси-дефлятори випуску продукції однакові для всіх галузей.

Моменти $t = 0, 1, \ldots$ відповідають 2021, 2022 рр. ... Додаткові інвестиції дозволяються тільки у 2021–2025 рр. і лише для групи галузей, що належать сфері матеріального виробництва, точніше для тих галузей, які у таблиці

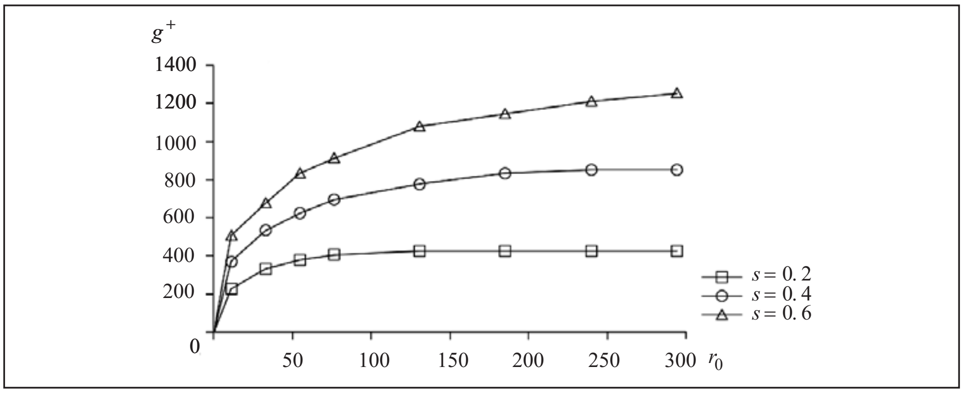

Рис. 1. Залежність приведеного додаткового приросту ВВП g^+ від r_0 та s, млрд грн

«витрати–випуск» за 2021 р. на позиціях від першої до тридцять першої [8]. Відповідно вибираємо $r_i^t = 0$, якщо $t > 4$ або $i > 31$. За умов $0 \le t \le 4$ та $1 \le i \le 31$ величини r_i^t у правих частинах (20) вважаються пропорційними величинам J_i чистих інвестицій за 2021 р., $r_i^t = sJ_i$, де s — задане число, $s > 0$. Вважаємо, що $\tau_i^t \equiv 1$, $\mu_i^t \equiv 0$, величини ρ_i^t, γ_i^t не залежать від t.

Нехай g^* — оптимальне значення цільової функції задачі (15)–(20), g_0 — її значення за умови $u_i^t = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $t = 0, 1, \ldots, T-1$, тобто за умови відсутності додаткових інвестицій. Позначимо $r_0 = r_0^0$, $g^+ = g^* - g_0$. На рис. 1 показано залежність величини g^+ (тобто максимуму приведеного додаткового приросту ВВП) від величин r_0 та s. Для кожного значення s графік такої залежності визначає увігнуту функцію, оскільки у разі збільшення величини r_0 в оптимальному плані мають місце інвестиції в галузі, що забезпечують меншу віддачу.

ВИСНОВКИ

У запропонованій статті на основі моделей Лєонтьєва та Солоу побудовано динамічні економіко-математичні екстремальні задачі, в яких потрібно знайти оптимальний розподіл додаткових інвестицій між галузями економіки країни. Критерієм є приведений додатковий приріст ВВП. Доведено, що сформульована задача математичного програмування є гладкою та опуклою екстремальною задачею. За допомогою методу умовного градієнта оптимізовано розподіл інвестицій в економіку України. Результати розрахунків будуть більш якісними, якщо точніше визначити параметри задач, врахувати те, що деякі параметри є випадковими величинами, а також врахувати лаги освоєння інвестицій.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Sachs J.D., Larrain B.F. Macroeconomics in the global economy. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1993. 848 p.
2. Грисенко М.В., Шворак Л.О. Економіко-математичне моделювання світогосподарських процесів. Ч. 1. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2016. 271 с.
3. Leontief W. Input-Output Economics. New York: Oxford University Press, 1986. 436 p.
4. Гранберг А.Г. Динамические модели народного хозяйства. Москва: Экономика, 1985. 198 с.

5. Ляшенко О.І. Математичне моделювання динаміки відкритої економіки. Рівне: Волинські обереги, 2005. 360 с.

6. Morishima M. Equilibrium, stability and growth: A multi-sectoral analysis. London: Oxford University Press, 1964. 279 p. https://doi.org/10.1093/0198281455.001.0001.

7. Pashko S.V. Optimization of capital investment distribution in an open economy on the basis of the «input-output» model. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2022. Vol. 58, N 2. P. 225–232. https://doi.org/10.1007/s10559-022-00454-1.

8. Таблиці «витрати–випуск» України за 2010–2021 рр. у цінах споживачів. Київ: Державна служба статистики України, 2012–2023 рр. URL: www.ukrstat.gov.ua.

9. Капітальні інвестиції України за видами економічної діяльності за 2010–2021 рр. Київ: Державна служба статистики України, 2012–2023 рр. URL: www.ukrstat.gov.ua.

10. Наявність і рух необоротних активів України за видами економічної діяльності за 2010–2021 рр. Київ: Державна служба статистики України, 2012–2023 рр. URL: www.ukrstat.gov.ua.

11. Національні рахунки України 2021. Статистичний збірник. Київ: Державна служба статистики України, 2023. 227 с.

12. Методологічні положення з організації державного статистичного спостереження «Таблиця «витрати–випуск». Київ: Державна служба статистики України, 2018. 46 с.

13. Момот В.Є. Використання виробничих CES-функцій при розробці заходів технологічної політики вітчизняних підприємств. *Вісник соціально-економічних досліджень*. 2019. № 2–3. С. 92–104.

14. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. Москва: Наука, 1979. 384 с.

15. Михалевич В.С., Гупал А.М., Норкин В.И. Методы невыпуклой оптимизации. Москва: Наука, 1987. 280 с.

16. Немировский А.С., Юдин Д.Б. Сложность задач и эффективность методов оптимизации. Москва: Наука, 1979. 383 с.

A.M. Gupal, S.V. Pashko

OPTIMIZATION OF CAPITAL INVESTMENT DISTRIBUTION BASED ON A DYNAMIC MATHEMATICAL MODEL

Abstract. The article considers dynamic optimization problems for the distribution of investments between sectors of the country's economy. Leontiev's «input-output» and Solow's models were used to construct extremum problems. The objective is to maximize the gross domestic product under limited investment volumes. The constructed mathematical programming problem is proved to belong to the class of smooth and convex extremum problems. By using the conditional gradient method, the optimal distribution of investments for the Ukrainian economy was calculated.

Keywords: optimization, investment distribution, mathematical model, production function, gross domestic product, method.

Надійшла до редакції 28.11.2023