

С.С. ЗУБ

Військова частина А7403, Україна, e-mail: *stah_z@yahoo.com*.

І.Г. ЯЛОВЕГА

Харківський національний економічний університет імені Семена Кузнеця,
Харків, Україна, e-mail: *yalovega.ira@gmail.com*.

С.І. ЛЯШКО

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *lyashko.serg@gmail.com*.

В.С. ЛЯШКО

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *Lyashko91@gmail.com*.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ МАГНІТНОГО НАДПРОВІДНОГО ПІДВІСУ

Анотація. З використанням отриманої у явному вигляді функції потенціальної енергії магнітної системи, що складається з надпровідного кільця та магнітного диполя в однорідному полі сили тяжіння, проведено повне дослідження стійкості статичної рівноваги в системі. Знайдено аналітичні умови існування рівноваги та побудовано область стійкості. Показано, що за знайдених умов в околі осі кільця має місце статична магнітна левітація у формі підвісу. Виконані обчислення демонструють стійкість рівноваги у формі підвісу на основі механізму магнітної левітації, запропонованого В. Козорізом.

Ключові слова: математична модель, магнітна левітація, магнітна потенціальна енергія, стійкість рівноваги, надпровідна котушка, постійний магніт.

Магнітна левітація відіграє помітну роль у сучасній науці та техніці — вона знаходить застосування у транспорті, машинобудуванні, енергетиці, вимірювальній техніці. Найбільшого поширення магнітна левітація набула в системах високошвидкісного наземного транспорту. Але натеper її частіше використовують у машинобудуванні для створення магнітного підшипника. Саме магнітна левітація є ключовою інноваційною складовою низки сучасних систем радіального магнітного підвісу ротора для компресорів природного газу, турбогенераторів, вакуумних насосів, високошвидкісних накопичувачів енергії, двигунів, центрифуг, а також навігаційних приладів: гіроскопів, гравіметрів, точних ваг. З'являються також і нові сфери застосування, наприклад виробництво напівпровідників та магнітні пастки.

Під магнітною левітацією в техніці зазвичай розуміють фізичні явища або технології утримання тіла з магнітним моментом чи плазми у полі сили тяжіння тільки силами електромагнітного поля без контакту між тілами. На відміну від виштовхувальної сили Архімеда, аеродинамічної сили та радіаційної сили акустичних хвиль магнітна левітація не залежить від властивостей середовища і може діяти як у середовищі, так і у вакуумі.

У статті розглянуто математичну модель магнітної левітації, що базується на фізичному ефекті, а не на системі автоматичного регулювання, яка наразі є значно поширеною в сучасній техніці.

Нестійкість статичної системи постійних магнітів є відомим фактом [1]. У той же час магнітна левітація можлива і у випадку, коли для цієї системи не виконуються умови теореми Ірншоу, на це вказав В. Томсон [2] і експериментально підтвердив В. Браунбек на прикладі системи з діамagnetиками [3]. Інший приклад — це системи з парним ступенем нестійкості, які можна динамічно стабілізувати [4].

У цій роботі наведено математичну модель, яка базується на фізичному механізмі реалізації магнітної левітації.

Проблема магнітної взаємодії двох ідеально тонких витків зі струмами, один з яких зберігає постійним магнітний потік у витку (модель надпровідного витка), а інший зберігає постійним струм у витку (модель малого постійного магніту), тісно пов'язана з магнітною левітацією, виявленою В. Козорізом.

Уперше оригінальну поведінку сили під час взаємодії надпровідного витка та постійного магніту виявили Б. Деніелс та П. Метьюз [5]. У 1966 р. вони експериментально досліджували поведінку осьової сили магнітної взаємодії між тонким надпровідним кільцем та постійним магнітом. У першому експерименті вивчали взаємодію постійного магніту та надпровідного кільця, яке попередньо було переведено у надпровідний стан за нульового магнітного потоку. Виявилося, що в цьому разі сила взаємодії має максимум на інтервалі взаємодії і дорівнює нулю в центрі надпровідного кільця. У другому експерименті в центрі на осі кільця використовували постійний магніт і потім переводили кільце в надпровідний стан, визначали силу магнітної взаємодії, переміщуючи магніт вздовж осі кільця. Поведінка сили у цих експериментах суттєво відрізнялася від сили діаманітного відштовхування.

У 1975 р. В. Козоріз теоретично досліджував взаємодію двох ідеально провідних кілець у співвісному положенні за умови, що магнітні потоки в них різні. Виявилося, що у цьому випадку магнітна сила змінює знак на інтервалі взаємодії, тобто на інтервалі взаємодії магнітна енергія як функція відстані має мінімум. Така поведінка сили була підтверджена в 1980 р. в експерименті М. Крюкова, І. Колодєєва та О. Чеборіна [6].

За наявності мінімуму магнітної енергії існує і максимум магнітної сили притягання — точка нульової жорсткості. Це очевидно, оскільки у разі невеликого віддалення від положення рівноваги вертальна сила зростатиме, тоді як з подальшим віддаленням вона буде зменшуватися внаслідок дипольного характеру взаємодії.

Покажемо, як постійний потік в ідеально провідному витку призводить до мінімуму магнітної потенціальної енергії взаємодії. Для визначеності вважатимемо, що повний магнітний потік через ідеальний виток дорівнює сумі спрямованих (вгору/вниз) силових ліній, що перетинають його площину. Динаміку взаємодії в системі зображено на рис. 1 і 2, які демонструють взаємне розташування кільця і магніту на осі системи та відповідну цьому положенню точку на графіку магнітної сили, що відповідає такому розташуванню. На рис. 1, а видно, що шість силових ліній спрямовано вгору, тому вважатимемо, що потік $\psi_1 = 6$. Цей потік проходив через обмежену кільцем площину у момент переходу в надпровідний стан і надалі він стає постійним. У початковому положенні кільце та магніт звернені один до одного різними полюсами, тобто вони притягуються. У подальшому русі магніту у бік кільця кількість силових ліній, що спрямовані вгору і перетинають площину, всередині витка збільшується на дві лінії (позначено забарвленими кружками). Тому для того, щоб потік залишався постійним, у кільці індукується струм, який створює дві спрямовані вниз силові лінії (позначено порожніми кружками), що компенсують додаткові дві силові лінії. У подальшому русі їхня кількість становитиме чотири (позначено зафарбованими кружками), що відповідає наближенню магніту до кільця. У разі подальшого наближення для збереження потоку постійним в контурі знову індукується додатковий струм, силові лінії якого спрямовані вниз (позначено порожніми кружками). Сумарна їхня кількість дорівнює чотирьом, як і кількість додаткових силових ліній, спрямованих угору.

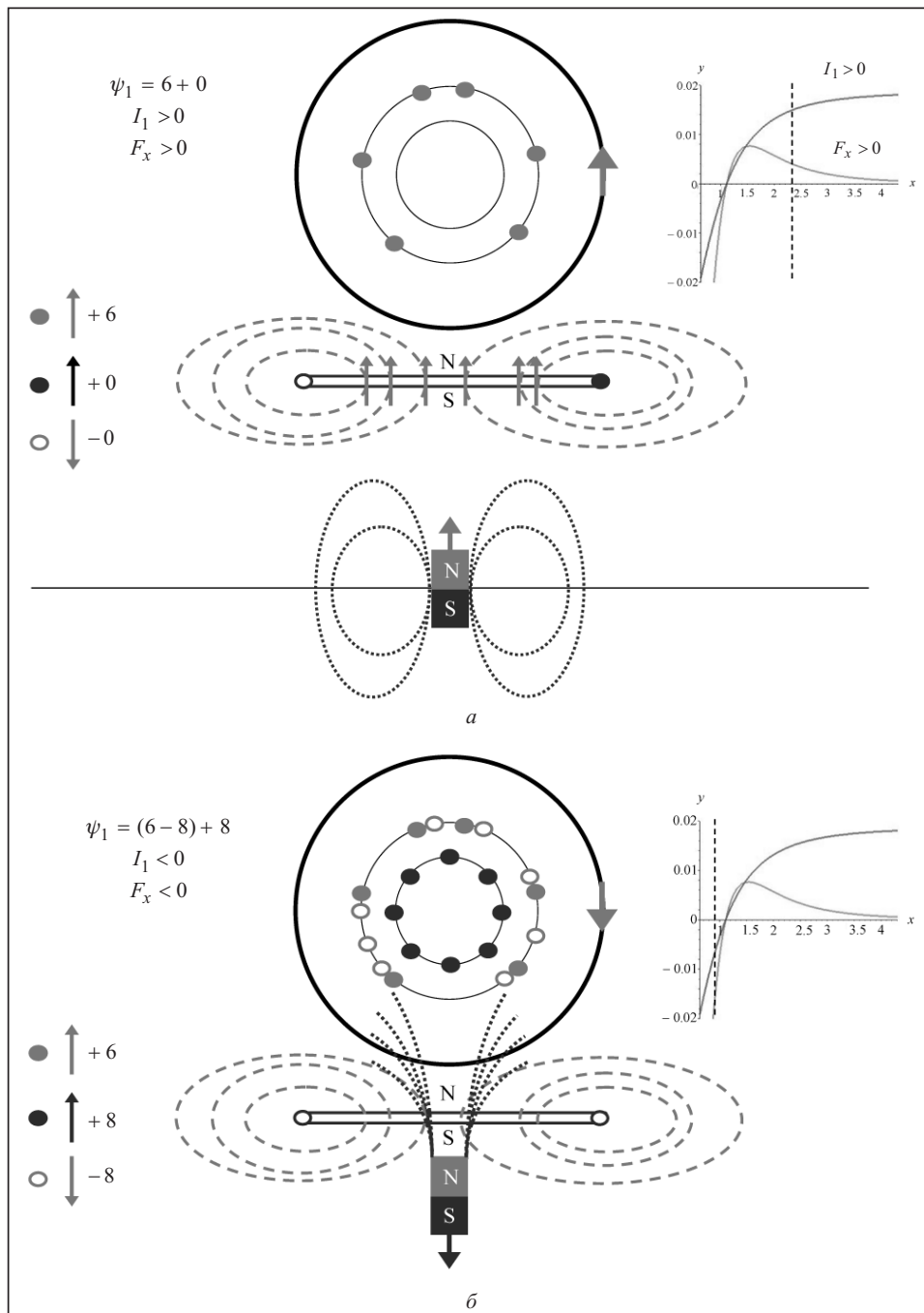


Рис. 1. Динаміка взаємодії надпровідного кільця та постійного магніту під час магнітної взаємодії із замороженим потоком ($\psi_1 = 6$) у разі притягання (а) та відштовхування (б)

На цих рисунках індукований для компенсації надлишкового потоку струм протилежно напрямлений до вихідного струму, який відповідає потоку. Цей струм вилучатиметься з вихідного струму доти, поки за деякого положення магніту сума струмів не буде дорівнювати нулю. У цій точці сила взаємодії, яка пропорційна струму кільця, дорівнює нулю (рис. 2).

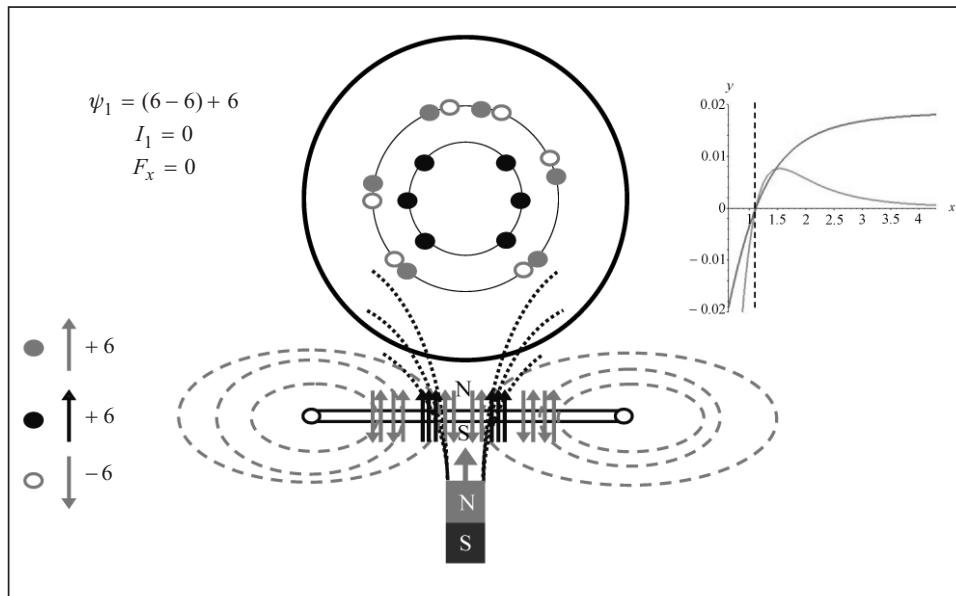


Рис. 2. Надпровідне кільце та постійний магніт для нульової сили

У подальшому зближенні магніту з кільцем додаткові силові лінії, спрямовані вгору, індукують додатковий струм і відповідні лінії поля, спрямовані вниз. Тоді сумарний струм матиме протилежний напрям, тобто кільце та магніт тепер звернені один до одного однойменними полюсами, а отже, вони відштовхуються. На рис. 1, б струм та сила мають знак мінус (відображено на графіку струму та сили). Значить, магнітне притягання змінилося на магнітне відштовхування.

На рис. 2 зображено випадок, коли сила взаємодії кільця і магніту дорівнює нулю, що відповідає мінімуму потенціальної магнітної енергії за координатою x .

Магнітна левітація з ефектом заморожування магнітного потоку в короткозамкненому ідеально провідному контурі або під котушкою зі стабілізованим магнітним потоком — це ефект, який виявив В. Козоріз [6, 7].

Рівняння для квазістаціонарних ланцюгів можна розглядати, використовуючи Лагранжів підхід до динаміки [8, с. 783–787]. У рівняннях Лагранжа в незалежних координатах [8, с. 47–66] використовують подання кінетичної енергії через незалежні змінні та проєктування сил на простір, обмежений зв'язками. Проте для визначення функції Лагранжа розглянутої системи потрібно, щоб зв'язки були склерономними. Як показано далі, у розглянутій моделі електричні змінні явно підпорядковані зв'язкам, які залежать від часу. Отже, можна безпосередньо використовувати формули, отримані в [8, с. 47–66].

У загальному вигляді всі етапи зведення системи з урахуванням голономності зв'язків виконано в [9, 10], де розглянуто систему, яка має n контурів, з яких кількість ідеально провідних контурів становить ν , а кількість контурів із постійною величиною струму становить $n - \nu$. Механічну кінетичну енергію руху контурів без урахування магнітної взаємодії, тобто за нульових значень струмів, описано набором механічних змінних x і швидкостей $\dot{x}$. Позначимо $q_1 = \int I_1 dt$ заряд, що проходить через деякий фіксований переріз надпровідного контуру, а $q_2 = \int I_2 dt$ — такий самий заряд у котушці із постійним струмом, де I_1 , I_2 — відповідні швидкості (струм) зміни заряду електричних координат q_1 , q_2 системи котушок.

Вибираємо систему координат так, щоб повна енергія збігалася з кінетичною: $T = T_m + T_e$, де T_m — механічна кінетична енергія руху котушок, $T_e = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^2 L_{\alpha\beta} I_\alpha I_\beta$ — аналог кінетичної енергії в електричних координатах, $L_{\alpha\beta}$ — матриця взаємних індуктивностей, I_α, I_β — струм у відповідних контурах.

Електричні змінні q_2 і I_2 явно підпорядковуються зв'язкам, які залежать від часу. Постійність струму в другому контурі можна розглядати як залежний від часу голономний зв'язок:

$$q_2 = I_2 \cdot t. \quad (1)$$

Узагальненими координатами розглядуваної системи вважатимемо механічні координати x та електричні координати q_1 , при цьому функція Лагранжа має вигляд

$$L = T_m(x, \dot{x}) + \frac{1}{2} L_{11} \dot{q}_1^2 + L_{12}(x) I_2 \dot{q}_1 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2. \quad (2)$$

Зі співвідношення (2) очевидно, що за узагальненою швидкістю $\dot{q}_2 = I_2 = \text{const}$, тобто q_2 не є динамічною змінною, а саме функція Лагранжа не є квадратичною за $\dot{q}_2$. І оскільки L не залежить від змінних q_1 та q_2 , то вони є циклічними координатами. Позаяк q_1 є циклічною координатою, то для всіх рухів вихідної системи потік магнітного поля становить $\psi_1 = \text{const}$, тобто в надпровідній котушці потокове зчеплення є постійним.

Оскільки узагальненими координатами досліджуваної системи є механічні узагальнені координати x , кінетична енергія наведеної системи матиме вигляд $T^* = T_m(x, \dot{x})$.

Представимо узагальнений потенціал з [9, формула (24)] у вигляді

$$V = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} L_{\alpha\beta}^{-1} \left(\psi_\alpha - \sum_a L_{\alpha a} I_a \right) \left(\psi_\beta - \sum_b L_{\beta b} I_b \right) - \frac{1}{2} \sum_{a, b} L_{ab} I_a I_b. \quad (3)$$

Застосуємо цю формулу для системи з n контурів, які пронумеровано малими літерами латинського алфавіту $i, k = 1, \dots, n$. З них ν контурів ідеально провідні, а $n - \nu$ контурів із сталою величиною струму. Контури першого типу нумеруємо малими літерами грецького алфавіту $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, \nu$, а контури другого типу — першими малими літерами латинського алфавіту $a, b, c = \nu + 1, \dots, n$. Оскільки контури поділяються на два типи, матрицю індуктивностей L_{ik} можна розбити на чотири блоки. Отже, $L_{\alpha\beta}$ — квадратна симетрична матриця індуктивностей ідеально провідних контурів, L_{ab} — квадратна симетрична матриця індуктивностей контурів із заданим струмом, $L_{\alpha a}$ — прямокутна матриця індуктивностей, яка описує взаємодію контурів різного типу і відповідає правому верхньому блоку вихідної матриці індуктивностей. Величини I_a не є динамічними змінними, а являють собою параметри зв'язків.

Розглянемо випадок, коли $n - \nu = 1$, тобто коли всі контури, крім одного, надпровідні, а один контур із фіксованим струмом моделює постійний магніт. У цьому разі останній член у формулі (3) не залежить від узагальнених координат і його можна випустити.

Таким чином, потенціальну енергію представлено у вигляді додатно визначеної квадратичної форми від потоків $\psi_\alpha - M_\alpha I$, де M_α — взаємна індуктивність, тобто потік заморожений в α -контурі за винятком потоку, наведеного в кільці від постійного магніту. Додатна визначеність матриці $L_{\alpha\beta}$ та оберненої

матриці $L_{\alpha\beta}^{-1}$ впливає з обмежень, що накладаються на коефіцієнти самоіндукції та взаємної індукції.

Якщо надпровідній котушці відповідає номер 1, а котушці з постійним струмом — номер 2, то функція Лагранжа розглядуваної системи має вигляд

$$T^* - \frac{(\psi_1 - I_2 L_{12}(x))^2}{2L_{11}} + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2. \quad (4)$$

Як зазначалося вище, постійний доданок у (4) можна випустити. Тоді узагальнений потенціал системи визначають співвідношенням

$$V = \frac{(\psi_1 - I_2 L_{12}(x))^2}{2L_{11}}, \quad (5)$$

а магнітну силу, що діє між котушками, можна обчислити так:

$$F_x = -\frac{\partial V(x)}{\partial x} = -L_{11} I_1 \frac{\partial I_1(x)}{\partial x} = I_1 I_2 \frac{\partial L_{12}(x)}{\partial x}, \quad (6)$$

де $I_1 = \frac{\psi_1 - M(x)I_2}{L_{11}}$ — струм у надпровідному кільці, який можна предста-

вити через магнітний потік, використовуючи формулу з теорії електричних ланцюгів [6].

Отриманий вираз (6) збігається з відомим співвідношенням для магнітної сили [11, 12]. Згідно з (6) сила змінює знак за умови $I_1(x) = 0$, тоді $L_{12}(x) = \frac{\psi_1}{I_2}$. Цей

ефект відкрив В. Козоріз [6], розглядаючи приклад взаємодії двох надпровідних кілець з різними за величиною замороженими потоками. Однак у формалізмі [13], який використано в цій роботі, існує неоднозначність в інтерпретації змісту магнітної енергії, оскільки у вихідній системі магнітна енергія є кінетичною, а в наведеній системі вона стає потенціальною.

З використанням формалізму, що базується на методі Рауса, у цій статті знайдено функцію Лагранжа взаємодії двох різнотипних елементів. Цей приклад демонструє всі особливості формалізму Рауса. Отримана модель у випадку однорідного поля тяжіння дає змогу пояснити магнітну левітацію в такій системі.

Щоб знайти умови реалізації магнітної левітації в аналітичному вигляді, замінюємо надпровідну котушку ідеально провідним кільцем з нульовим опором. Вважатимемо, що розміри магніту набагато менші діаметра кільця, це дає змогу представити його як магнітний диполь. Центр кільця збігається з центром нерухомої системи координат, а його площа перпендикулярна силі тяжіння. Розташування диполя в циліндричній системі координат задано змінними ρ , φ , z , а орієнтацію — кутами θ , ψ , які визначають напрямок магнітного моменту в сферичних координатах з тим самим напрямком осі z . Сила тяжіння напрямлена протилежно до осі z . Тоді вираз для потенціальної енергії з урахуванням однорідного поля сили тяжіння має вигляд

$$V_\Sigma = \frac{L_{11} I_1^2}{2} + mgz, \quad (7)$$

де I_1 — струм у надпровідному кільці, mg — вага магніту.

Вираз $M \cdot I_2$ для кільця та диполя отримуємо з формули $L_{em} I_m = (S_m I_m) \times \vec{n} \left(\frac{\vec{B}_e}{I_e} \right) = (\vec{\mu}, \vec{b})$, підставляючи $\vec{B}_e = \vec{B}_1$ — магнітне поле кільця, створюване

струмом $I_e = I_1$, $S_m = S_2$ — поверхня, натягнута на контур петлі, що описує магнітний диполь, та $\vec{n}$ — одинична нормаль до поверхні S_2 . Інтегрування у цьому разі зводиться до множення на площу петлі:

$$M \cdot I_2 = (\vec{\mu}, \vec{b}). \quad (8)$$

Вираз для $\vec{B}_1$ (а отже і $\vec{b}$) наведено у роботі [12, с. 164–165]. Потенціальну енергію розглядуваної системи можна визначити через повні еліптичні інтеграли. Але для дослідження стійкості достатньо розкласти потенціальну енергію за степенями ρ до 2-го порядку включно. Враховуючи, що $b_\varphi = 0$, знаходимо

$$(\vec{\mu}, \vec{b}) = \mu \cdot (b_\rho \sin \theta \cos \alpha + b_z \cos \theta), \quad (9)$$

де μ — величина магнітного моменту диполя, $\alpha = \psi - \varphi$, $b_\rho = \frac{3\mu_0 \alpha^2 \rho \cdot z}{4(a^2 + z^2)^{5/2}}$ і

$$b_z = \frac{\mu_0 \alpha^2 (4z^4 + 8a^2 z^2 - 12\rho^2 z^2 + 4a^4 + 3\rho^2 a^2)}{8(a^2 + z^2)^{7/2}} \quad \text{— компоненти магнітного}$$

поля в циліндричній системі, причому a — це радіус кільця зі струмом, що створює магнітне поле $\vec{B}_1$, тобто потенціальну енергію отримано в елементарних функціях.

Оскільки розглядувана система симетрична відносно осі z , то φ — циклічна координата і не фігурує у виразі для потенціальної енергії згідно з (9). Тому очевидно, що глобальний мінімум може бути лише на осі z (за умови $\rho = 0$).

Відповідно до формул (6), (8) вираз для компонент сили має вигляд

$$F_x = I_1 \frac{\partial(\vec{\mu}, \vec{b})}{\partial x}, \quad (10)$$

де $x = z, \rho, \varphi, \alpha, \theta$.

Співвідношення для компонентів сили знаходимо з формул (9), (10), підставляючи в них b_ρ, b_z . На осі симетрії системи компоненти F_ρ, F_θ перетворюються на нуль, якщо $\theta = 0$ або $\theta = \pi$.

Розглянемо детальніше випадок $\theta = 0$, оскільки для $\theta = \pi$ лише змінюється знак μ . У полі тяжіння точка рівноваги не збігається з точкою перетворення на нуль магнітної сили; отже, в цій точці $I_1 \neq 0$. Усі компоненти магнітної сили, крім F_z , перетворюються на нуль на осі z , а F_z компенсується силою тяжіння mg . Потрібно, щоб сумарна сила (сума сили тяжіння та магнітної сили) дорівнювала нулю в заданій точці на осі z . Цього можливо досягти вибором співвідношення магнітних параметрів та маси магніту з урахуванням того, що магнітна сила направлена вгору. Тоді для знаходження умов стійкості у положенні рівноваги системи дослідимо потенціальну енергію (5) до другого порядку малості за відхиленнями координат від положення рівноваги. Оскільки енергія однорідного поля тяжіння лінійна за z , то на параметр mg не накладають умов стійкості, які задаються другим порядком малості за координатами.

Для дослідження достатніх умов існування мінімуму потенціальної енергії системи введемо такий набір незалежних безрозмірних змінних: $\delta = \frac{\rho}{a}$, $\xi = \frac{z}{a}$,

$\xi = \sin \theta \cos \alpha$, $\eta = \sin \theta \sin \alpha$. Змінні ξ та η , які задають напрямок диполя, унеможливають невизначеність, пов'язану з параметром α для орієнтації диполя уздовж осі z . Має місце такий вираз для потенціальної енергії системи у вибраних змінних:

$$V = \frac{(\mu_0 \mu)^2}{a^2 L_{11}} \cdot \bar{V} = \frac{(\mu_0 \mu)^2}{a^2 L_{11}} \times$$

$$\times \frac{((4\xi^2(3\delta^2 - \xi^2 - 2) - (3\delta^2 + 4))\sqrt{1 - (\xi^2 + \eta^2)} + (\xi^2 + 1)(4k(\xi^2 + 1)^{5/2} - 6\xi\xi\delta))^2}{128(\xi^2 + 1)^7},$$

де $k = \frac{2a\psi_1}{\mu_0\mu}$.

У розгляданій системі координат знаходимо енергію системи у вигляді $T = T_e + T_m$, де T_m — кінетична енергія механічного руху котушок, що залежить від x та $\dot{x}$, $T_e = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^2 L_{\alpha\beta} I_\alpha I_\beta$. Отже, за принципом Герца повна енергія системи є кінетичною.

Умову постійності струму в другому контурі розглядатимемо як голономний зв'язок, що залежить від часу:

$$q_2 = I_2 \cdot t. \quad (11)$$

Тоді з урахуванням цього зв'язку узагальненими координатами системи вважатимемо механічну координату x та електричну координату q_1 , а функція Лагранжа матиме вигляд

$$L = T_m(x, \dot{x}) + \frac{1}{2} L_{11} \dot{q}_1^2 + L_{12} I_2 \dot{q}_1 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2.$$

Зауважимо, що за узагальненою швидкістю $\dot{q}_1$ функція Лагранжа є квадратичною. Оскільки L не залежить від q_1 , то координата q_1 є циклічною. Знайдемо узагальнений імпульс, що відповідає q_1 : $\psi_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = L_{11} \dot{q}_1 + L_{12} I_2$. Отже, $\dot{q}_1 = I_1 = \frac{(\psi_1 - L_{12} I_2)}{L_{11}}$. Оскільки координата q_1 є циклічною, то для всіх рухів вихідної системи маємо $\psi_1 = \text{const}$. Додатна визначеність матриці гесіана в положенні рівноваги $H_{ij} = \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x_i \partial x_j}$, де $x_i = \xi, \delta, \xi, \eta$, $i = \overline{1, 4}$, є достатньою умовою існування мінімуму потенціальної енергії. Відмінними від нуля будуть такі компоненти матриці: H_{11} , H_{22} , H_{33} , H_{44} та $H_{13} = H_{31}$.

Застосовуючи критерій Сильвестра, отримуємо умови додатної визначеності матриці у вигляді системи нерівностей:

$$\begin{cases} H_{11} = \frac{3}{8} \cdot \frac{S_1(4\xi^2 - 1)}{(\xi^2 + 1)^5} > 0, \\ H_{22} = \frac{3}{4} \cdot \frac{S_2}{(\xi^2 + 1)^5} > 0, \\ H_{44} = \frac{1}{4} \cdot \frac{S_1}{(\xi^2 + 1)^3} > 0, \\ H_{11}H_{33} - H_{13}^2 = 6 \cdot \frac{S_1^2 S_3}{(\xi^2 + 1)^8} > 0. \end{cases} \quad (12)$$

На осі z магнітну силу можна обчислити так:

$$F_z = -\frac{3(\mu_0\mu)^2}{4a^3 L_{11}} \cdot \frac{S_1 \xi}{(\xi^2 + 1)^4}, \quad (13)$$

де $S_1 = k(1 + \xi^2)^{3/2} - 1$, $S_2 = -k(1 + \xi^2)^{3/2}(4\xi^2 - 1) + 7\xi^2 - 1$, $S_3 = 5\xi^2 - 2$.

Умови (12) виконуються, якщо $S_1 > 0$, $S_2 > 0$, $S_3 > 0$, а також $4\xi^2 - 1 > 0$. Інакше кажучи, повинні виконуватись три незалежні умови:

$$S_1 > 0, S_2 > 0, S_3 > 0. \quad (14)$$

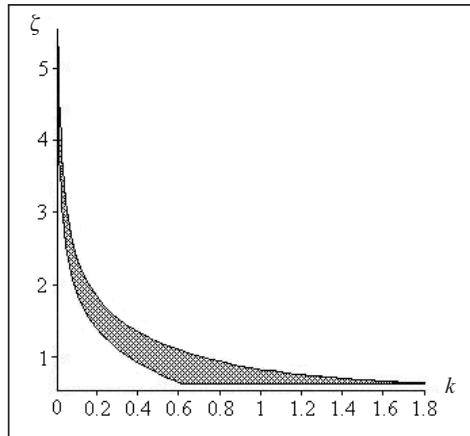


Рис. 3. Область стійкості

Оскільки достатні умови рівноваги парні за ξ , а необхідна умова рівноваги непарна за ξ , то рівновага реалізується лише у формі підвісу, тобто магніт перебуває у рівновазі під кільцем. З (14) випливає, що стійкість існує лише в діапазоні $0 < k \leq (15/7)\sqrt{5/7}$ (рис. 3), тобто величини μ і ψ_1 завжди мають однаковий знак. Підвіс магніту можливий у широкому діапазоні значень: $\sqrt{\frac{2}{5}} < \xi < \infty$.

Отже, в роботі досліджено стійкість магнітної системи, яка складається з надпровідного кільця та магнітного диполя в однорідному полі

сили тяжіння. Показано, що вираз для потенціальної енергії взаємодії такої системи можна отримати з існування взаємної індуктивності струмових петель. Одержані вирази дають змогу знайти функцію Лагранжа, яка є основою для вивчення статички та динаміки магнітних систем. Уперше проведено ґрунтовне аналітичне дослідження стійкості рівноваги в такій системі. Отримано вираз для магнітної сили та три незалежні умови стійкості. Показано, що в положенні рівноваги за виконання цих умов в околі осі кільця має місце статична магнітна левітація у формі підвісу. Обчислення підтверджують стійкість рівноваги у формі підвісу на основі механізму магнітної левітації, запропонованого В. Козорізом.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Gibbs Ph., Geim A. Is magnetic levitation possible? 1997. URL: <http://math.ucr.edu/home/baez/physics/General/Levitation/levitation.html>.
2. Thomson W. On the forces experienced by small spheres under magnetic influence; and on some of the phenomena presented by diamagnetic substances. *Camb. Dublin Math. J.* 1847. Vol. 2. P. 230–252. http://kirkmcd.princeton.edu/examples/EM/thomson_cdmj_2_230_47.pdf.
3. Braunbek W. Freies Schweben diamagnetischer Körper im Magnetfeld. *Z. Phys.* 1939. Vol. 112. P. 764–769. <https://doi.org/10.1007/BF01339980>.
4. Козлов В.В. О степени неустойчивости. *Прикладная математика и механика*. 1993. Т. 57, вып. 5. С. 14–19.

5. Daniels B., Matthews P.W. Superconducting bearing. *Review of Scientific Instruments*. 1966. Vol. 37, Iss. 6. P. 750–753. <https://doi.org/10.1063/1.1720313>.
6. Козоріз В.В., Колодєєв І.Д., Крюков М.І. та ін. Про потенціальну яму магнітної взаємодії ідеальних струмових контурів. *ДАН УРСР. Сер. А*. 1976. № 3. С. 248–249.
7. Михалевич В.С., Козорез В.В., Рашкован В.М. и др. «Магнитная потенциальная яма» — эффект стабилизации сверхпроводящих динамических систем. Киев: Наук. думка, 1991. 335 с.
8. Gantmakher F.R. Lectures in analytical mechanics. Moscow: Mir, 1975. 262 p.
9. Lyashko S.I., Zub S.S., Yalovega I.G., Lyashko V.S. Mathematical model of permanent magnets and superconducting coils. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2022. Vol. 58, N 1. P. 77–83. <https://doi.org/10.1007/s10559-022-00480-z>.
10. Zub S.S. Stable orbital motion of magnetic dipole in the field of permanent magnets. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2014. Vol. 275. P. 67–73. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2014.02.007>.
11. Smythe W.R. Static and dynamic electricity. New York: McGraw-Hill, 1967. 623 p.
12. Landau L.D., Lifshitz E.M. Electrodynamics of continuous media. 2nd ed. Robert Maxwell, M.C., 1984. <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-030275-1.50025-4>.

S.S. Zub, I.H. Yalovega, V.S. Lyashko, S.I. Lyashko

MATHEMATICAL MODEL OF MAGNET SUPERCONDUCTING SUSPENSION

Abstract. A complete study of the stability of static equilibrium in the system was carried out using the explicitly obtained function of the potential energy of the magnetic system, which consists of a superconducting ring and a magnetic dipole in a uniform gravitational field. The conditions for equilibrium were analytically found, and the stability domain was constructed. It is shown that when the found conditions are met, a static magnetic levitation in the form of a suspension takes place around the axis of the ring. The performed calculations demonstrate the stability of equilibrium in the form of a suspension based on the magnetic levitation mechanism proposed by V. Kozoriz.

Keywords: mathematical model, magnetic levitation, magnetic potential energy, stability of equilibrium, superconducting suspension, permanent magnet.

Надійшла до редакції 21.12.2023