УДК 517.988

В.В. СЕМЕНОВ
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *semenov.volodya@gmail.com*.

О.С. ХАРЬКОВ
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *olehharek@gmail.com.*

СИЛЬНА ЗБІЖНІСТЬ РЕГУЛЯРИЗОВАНОГО АЛГОРИТМУ ОПЕРАТОРНОЇ ЕКСТРАПОЛЯЦІЇ ДЛЯ ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ[1]

Анотація. Запропоновано та досліджено новий алгоритм для розв'язання варіаційних нерівностей в гільбертових просторах. Запропонований ітераційний алгоритм є регуляризованим за допомогою схеми Гальперна методом операторної екстраполяції. За обсягом необхідних для здійснення ітераційного кроку обчислень алгоритм має перевагу над екстраградієнтним методом Корпелевич та методом екстраполяції з минулого. Для варіаційних нерівностей з монотонними, ліпшицевими операторами, що діють в гільбертовому просторі, доведено теорему про сильну збіжність методу.

Ключові слова: варіаційна нерівність, сідлова задача, монотонний оператор, метод операторної екстраполяції, метод Гальперна, регуляризація, сильна збіжність.

ВСТУП

Ця робота є продовженням циклу статей [1–4] з розроблення обчислювально ефективних та адаптивних алгоритмів для варіаційних нерівностей та задач про рівновагу.

Варіаційні нерівності визначають універсальний засіб формулювання багатьох актуальних задач математичної фізики, оптимального керування та дослідження операцій [5–8]. Побудова алгоритмів розв'язання варіаційних нерівностей та наближених до них задач (задачі про рівновагу, ігрові задачі) є надзвичайно популярним напрямом обчислювальної математики [9–40]. Окремі задачі негладкої оптимізації можна ефективно розв'язувати, якщо їх формулювати у вигляді сідлових задач і застосовувати алгоритми розв'язання варіаційних нерівностей [15]. Нещодавно розвинуто такий варіант побудови швидких алгоритмів для задач опуклого програмування: за допомогою теорії двоїстості переходимо до деякої опукло-угнутої сідлової задачі (гра Фенхеля) та застосовуємо екстраградієнтні алгоритми розв'язання варіаційних нерівностей [16]. Зауважимо, що з початком широкого використання генерувальних змагальних нейронних мереж та інших моделей змагального або робастного навчання інтерес до алгоритмів розв'язання сідлових задач та варіаційних нерівностей постав серед спеціалістів з машинного навчання [17].

Найпростішим методом розв'язання варіаційних нерівностей є аналог методу градієнтного спуску, що у випадку сідлової задачі відомий як метод градієнтного спуску–підйому [9, 10]. Але цей метод може не збігатися для нерівностей з монотонним оператором. Відомою модифікацією методу градієнтного спуску з проєктуванням для варіаційних нерівностей є екстраградієнтний метод Корпелевич [18–22], ітерація якого потребує двох обчислень значення оператора задачі та двох метричних проєктувань на допустиму множину. «Обчислювально дешеві» варіанти екстраградієнтного алгоритму з одним

[1]Робота виконана за фінансової підтримки МОН України (проєкт «Обчислювальні алгоритми і оптимізація для штучного інтелекту, медицини та оборони», 0122U002026) та НАН України (проєкт «Нові субградієнтні та екстраградієнтні методи для негладких задач регресії», 0124U002162).

метричним проєктуванням на допустиму множину запропоновано в роботах [23–25]. Варіанти, у тому числі адаптивні, екстраградієнтного методу Корпелевич досліджено в роботах [26, 27].

У роботі [28] запропонована модифікація методу градієнтного спуску–підйому для пошуку сідлових точок опукло-угнутих функцій. Ітерація цього алгоритму дешевша за ітерацію екстраградієнтного алгоритму за кількістю обчислень значень оператора: одне проти двох. Алгоритм Попова для розв'язання варіаційних нерівностей став відомим серед спеціалістів з машинного навчання під назвою extrapolation from the past [17]. Принципові результати, що поєднані з цим алгоритмом, отримано у роботах [1–3, 28–31]. Зокрема, його адаптивні модифікації запропоновано у роботах [1–3].

Подальший розвиток цих ідей та спроби зменшити складність виконання ітерації зі збереженням характеру збіжності призвели до появи нового методу forward-reflected-backward algorithm для розв'язання операторних включень [32]. За обсягом необхідних для здійснення ітераційного кроку обчислень алгоритм має перевагу над екстраградієнтним методом Корпелевич та методом екстраполяції з минулого. Ця схема відома під назвою optimistic gradient descent ascent [17] та алгоритм операторної екстраполяції [4].

Актуальною є задача розроблення сильно збіжного варіанта алгоритму операторної екстраполяції. Для екстраградієнтного алгоритму та алгоритму Попова сильно збіжні модифікації досліджувались в роботах [2, 21].

На цей час отримано багато результатів для алгоритмів розв'язання варіаційних задач в банахових просторах [4, 13, 33–35]. Зокрема, побудовані та теоретично обґрунтовані аналоги алгоритмів Корпелевич, Tseng та Попова для задач в рівномірно опуклих банахових просторах. У роботі [4] досліджено адаптивний варіант методу forward-reflected-backward algorithm для варіаційних нерівностей в 2-рівномірно опуклому та рівномірно гладкому банаховому просторі.

В цій статті запропоновано та досліджено новий алгоритм для розв'язання варіаційних нерівностей в гільбертових просторах. Запропонований ітераційний алгоритм є регуляризованим за допомогою схеми Гальперна [36, 37] методом операторної екстраполяції — forward-reflected-backward algorithm з [32]. Для варіаційних нерівностей з монотонними, ліпшицевими операторами, що діють у гільбертовому просторі, доведено теорему про сильну збіжність методу.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо варіаційну нерівність:

$$\text{знайти} \quad x \in C\colon \ \langle Ax, y - x\rangle \geq 0 \quad \forall y \in C, \tag{1}$$

де C — непорожня підмножина гільбертового простору H, A — оператор, що діє з простору H в H. Множину розв'язків (1) позначимо S.

Припустимо, що виконано такі умови:

— множина $C \subseteq E$ — опукла та замкнена;

— оператор $A: H \to H$ — монотонний на C, тобто

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in C,$$

та ліпшицевий на C (з константою $L > 0$), тобто

$$\| Ax - Ay \| \leq L \| x - y \| \quad \forall x, y \in C;$$

— множина S непорожня.

Розглянемо дуальну варіаційну нерівність:

$$\text{знайти} \quad x \in C\colon \ \langle Ay, x - y \rangle \le 0 \quad \forall y \in C. \tag{2}$$

Множину розв'язків варіаційної нерівності (2) позначимо S^d. Відомо, що множина S^d опукла та замкнена [6]. Нерівність (2) називають слабким або дуальним формулюванням варіаційної нерівності (1) (або нерівністю типу Мінті), а розв'язки нерівності (2) — слабкими розв'язками варіаційної нерівності (1). Для монотонних операторів A завжди маємо $S \subseteq S^d$. У наших умовах (коли оператор є також неперервним) маємо $S^d = S$ [6].

Нехай K — непорожня замкнена та опукла підмножина гільбертового простору H. Відомо, що для кожного $x \in H$ існує єдиний елемент $z \in K$ такий, що

$$\| z - x \| = \inf_{y \in K} \| y - x \|.$$

Цей елемент z позначають $P_K x$, а відповідний оператор $P_K : E \to K$ називають проєкцією H на K (метричною проєкцією) [6]. Проєкцію визначають таким чином [6]:

$$z = P_K x \ \Leftrightarrow \ z \in K \quad \text{та} \quad \langle z - x, y - z \rangle \ge 0 \ \ \forall y \in K.$$

Остання нерівність рівносильна такій [6]:

$$\| y - P_K x \|^2 \le \| y - x \|^2 - \| P_K x - x \|^2 \quad \forall y \in K.$$

Варіаційну нерівність (1) можна сформулювати як задачу пошуку нерухомої точки [6]:

$$x = P_C (x - \lambda A x), \tag{3}$$

де $\lambda > 0$. Формулювання (3) прийнятне, оскільки веде до ітераційної схеми

$$x_{n+1} = P_C (x_n - \lambda A x_n), \tag{4}$$

яка слабко збіжна для обернено сильно монотонних (ко-коерцитивних) операторів $A : H \to H$ [14]. Але для ліпшицевих монотонних операторів схема (4) в загальному випадку не збігається. Найвідомішою модифікацією схеми (4) є екстраградієнтний метод Корпелевич [18]

$$x_{n+1} = P_C (x_n - \lambda A P_C (x_n - \lambda A x_n)),$$

ітерація якого потребує двох обчислень значення оператора задачі та двох метричнх проєктувань на допустиму множину. «Обчислювально дешеві» варіанти екстраградієнтного алгоритму з одним метричним проєктуванням на допустиму множину запропоновано у роботах [23–25]. Подальші спроби зменшити складність виконання ітерації зі збереженням характеру збіжності призвели до появи нового методу forward-reflected-backward algorithm [32]

$$x_{n+1} = P_C (x_n - 2\lambda A x_n + \lambda A x_{n-1}). \tag{5}$$

Ця схема відома під назвою optimistic gradient descent ascent [17] та алгоритм операторної екстраполяції [4]. Слабка збіжність алгоритму (5) доведена в [32].

Задача цієї статті — отримати сильно збіжний варіант алгоритму операторної екстраполяції. Для цього регуляризуємо алгоритм (5) за допомогою відомої схеми Гальперна [36, 37]

$$y_{n+1} = \alpha_n y + (1 - \alpha_n) T y_n, \tag{6}$$

де $T : H \to H$ — нерозтягувальний оператор, $y \in H$.

Якщо множина нерухомих точок $F(T)=\{x\in H: x=Tx\}$ непорожня та $\alpha_n\in(0,1)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n=+\infty$, то схема (6) сильно збіжна:

$$\lim_{n\to\infty}\|y_n-P_{F(T)}y\|=0.$$

Зауваження 1. Ітераційна схема Гальперна (6) тотожна схемі ітеративної регуляризації Бакушинського [11] для методу послідовних наближень $x_{n+1}=Tx_n$ апроксимації нерухомих точок оператора T.

Згадаємо відомі леми про рекурентні числові нерівності.

Лема 1. Нехай послідовність невід'ємних чисел (ξ_n) задовольняє рекурентну нерівность

$$\xi_{n+1}\le(1-\alpha_n)\xi_n+\alpha_n\beta_n \quad \text{для всіх } n\ge 1,$$

де послідовності (α_n) та (β_n) мають властивості: $\alpha_n\in(0,1)$ та $\beta_n\le\beta$, де $\beta\ge 0$. Тоді

$$\xi_n\le e^{-\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k}\xi_1+\beta.$$

Лема 2 [11]. Нехай послідовність невід'ємних чисел (ξ_n) задовольняє рекурентну нерівність

$$\xi_{n+1}\le(1-\alpha_n)\xi_n+\alpha_n\beta_n \quad \text{для всіх} \quad n\ge 1,$$

де послідовності (α_n) та (β_n) мають властивості: $\alpha_n\in(0,1)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n=+\infty$ та $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\beta_n\le 0$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\xi_n=0.$$

Лема 3 [38]. Нехай числова послідовність (a_n) має підпослідовність (a_{n_k}) з властивістю $a_{n_k}<a_{n_k+1}$ для всіх $k\ge 1$. Тоді існує така неспадна послідовність (m_k) натуральних чисел, що $m_k\to+\infty$ та $a_{m_k}\le a_{m_k+1}$, $a_k\le a_{m_k+1}$ для всіх $k\ge n_1$.

РЕГУЛЯРИЗОВАНИЙ АЛГОРИТМ ОПЕРАТОРНОЇ ЕКСТРАПОЛЯЦІЇ

У роботі [32] для розв'язання варіаційної нерівності (1) запропоновано такий алгоритм операторної екстраполяції (forward-reflected-backward algorithm)

$$\begin{aligned} x_{n+1}&=P_C(x_n-\lambda_n Ax_n-\lambda_{n-1}(Ax_n-Ax_{n-1}))=\\ &=P_C(x_n-(\lambda_n+\lambda_{n-1})Ax_n+\lambda_{n-1}Ax_{n-1}), \end{aligned} \tag{7}$$

де параметри λ_n задовольняють умову $0<\inf_n\lambda_n\le\sup_n\lambda_n<1/2L$.

Зауваження 2. Модифікації з проєкцією Брегмана та узагальненою проєкцією Альбера досліджено в [3, 4].

За обсягом необхідних для здійснення ітераційного кроку обчислень цей алгоритм має перевагу над екстраградієнтним методом Корпелевич

$$\begin{cases} y_n=P_C(x_n-\lambda_n Ax_n),\\ x_{n+1}=P_C(x_n-\lambda_n Ay_n) \end{cases}$$

та методом екстраполяції з минулого (методом Попова)

$$\begin{cases} y_n=P_C(x_n-\lambda_n Ay_{n-1}),\\ x_{n+1}=P_C(x_n-\lambda_n Ay_n). \end{cases}$$

Відомо, що для варіаційних нерівностей (1) з монотонними та ліпшицевими операторами, які діють в гільбертовому просторі, алгоритм (7) слабко збігається з $O(1/\varepsilon)$-оцінкою ефективності в термінах функції зазору [4].

З урахуванням відомого методу Гальперна апроксимації нерухомих точок нерозтягувальних операторів [36, 37] побудуємо такий регуляризований варіант алгоритму (7).

Алгоритм 1. Регуляризований алгоритм операторної екстраполяції.

Ініціалізація. Задаємо елементи $y \in H$, $x_0, x_1 \in C$, послідовність додатніх чисел (λ_n) та таку послідовність (α_n), що $\alpha_n \in (0,1)$, $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$.

Ітерації. Генеруємо послідовність (x_n) за допомогою ітераційної схеми

$$x_{n+1} = P_C(\alpha_n y + (1-\alpha_n)x_n - \lambda_n Ax_n - (1-\alpha_n)\lambda_{n-1}(Ax_n - Ax_{n-1})).$$

Стосовно додатніх параметрів λ_n припустимо виконання такої умови:

$$0 < \inf_n \lambda_n \le \sup_n \lambda_n < \frac{1}{2L}. \tag{8}$$

У наступному розділі доведемо, що послідовність (x_n), яка породжена алгоритмом 1, сильно збігається до проєкції точки y на множину S. Отже, для пошуку нормального розв'язку (розв'язку з найменшою нормою) варіаційної нерівності (1) можна використати схему

$$x_{n+1} = P_C((1-\alpha_n)x_n - \lambda_n Ax_n - (1-\alpha_n)\lambda_{n-1}(Ax_n - Ax_{n-1})).$$

Зауваження 3. Для гладкої сідлової задачі

$$\min_{x\in C} \max_{y\in D} L(x, y)$$

алгоритм 1 має вигляд

$$\begin{cases} x_{n+1} = P_C(\alpha_n x + (1-\alpha_n)x_n - \lambda_n \nabla_1 L(x_n, y_n) - \\ \qquad - (1-\alpha_n)\lambda_{n-1}(\nabla_1 L(x_n, y_n) - \nabla_1 L(x_{n-1}, y_{n-1}))), \\ y_{n+1} = P_D(\alpha_n y + (1-\alpha_n)y_n + \lambda_n \nabla_2 L(x_n, y_n) + \\ \qquad + (1-\alpha_n)\lambda_{n-1}(\nabla_2 L(x_n, y_n) - \nabla_2 L(x_{n-1}, y_{n-1}))). \end{cases}$$

Перейдемо до доведення сильної збіжності алгоритму 1.

ДОВЕДЕННЯ СИЛЬНОЇ ЗБІЖНОСТІ

Спочатку доведемо дві допоміжні нерівності, що дасть змогу використати леми 1 та 2 для доведення збіжності алгоритму 1.

Лема 4. Для послідовності (x_n), що породжена алгоритмом 1, виконується нерівність

$$\begin{aligned} &\|x_{n+1} - z\|^2 + 2\lambda_n \langle Ax_n - Ax_{n+1}, x_{n+1} - z\rangle + \frac{1}{2}\|x_{n+1} - x_n\|^2 \le \\ &\le (1-\alpha_n)\left(\|x_n - z\|^2 + 2\lambda_{n-1}\langle Ax_{n-1} - Ax_n, x_n - z\rangle + \frac{1}{2}\|x_n - x_{n-1}\|^2 \right) + \\ &+ \alpha_n \|y - z\|^2 - \alpha_n \|y - x_{n+1}\|^2 - \left(\frac{1}{2} - \alpha_n - (1-\alpha_n)\lambda_{n-1}L \right) \|x_{n+1} - x_n\|^2 - \\ &- (1-\alpha_n)\left(\frac{1}{2} - \lambda_{n-1}L \right) \|x_n - x_{n-1}\|^2, \end{aligned} \tag{9}$$

де $z \in S$.

Доведення. Нехай $z \in S$. Маємо

$$\langle x_{n+1} - \alpha_n y - (1-\alpha_n) x_n + \lambda_n A x_n + \\ + (1-\alpha_n) \lambda_{n-1} (A x_n - A x_{n-1}), z - x_{n+1} \rangle \geq 0. \quad (10)$$

Монотонність оператора A та включення $z \in S$ визначає

$$\langle \lambda_n A x_n + (1-\alpha_n) \lambda_{n-1} (A x_n - A x_{n-1}), z - x_{n+1} \rangle = \\ = \lambda_n \langle A x_n - A x_{n+1}, z - x_{n+1} \rangle + (1-\alpha_n) \lambda_{n-1} \langle (A x_n - A x_{n-1}), z - x_{n+1} \rangle + \\ + \underbrace{\lambda_n \langle A x_{n+1}, z - x_{n+1} \rangle}_{\leq 0} \leq \lambda_n \langle A x_n - A x_{n+1}, z - x_{n+1} \rangle + (1-\alpha_n) \times \\ \times \lambda_{n-1} \langle A x_n - A x_{n-1}, z - x_n \rangle + (1-\alpha_n) \lambda_{n-1} \langle A x_n - A x_{n-1}, x_n - x_{n+1} \rangle. \quad (11)$$

Використовуючи (11) в (10), отримаємо

$$0 \leq 2 \langle x_{n+1} - \alpha_n y - (1-\alpha_n) x_n, z - x_{n+1} \rangle + 2\lambda_n \langle A x_n - A x_{n+1}, z - x_{n+1} \rangle + \\ +2(1-\alpha_n) \lambda_{n-1} \langle A x_n - A x_{n-1}, z - x_n \rangle + \\ +2(1-\alpha_n) \lambda_{n-1} \langle A x_n - A x_{n-1}, x_n - x_{n+1} \rangle. \quad (12)$$

Оцінимо зверху доданок $2\lambda_{n-1} \langle A x_n - A x_{n-1}, x_n - x_{n+1} \rangle$ в (12). Маємо

$$2\lambda_{n-1} \langle A x_n - A x_{n-1}, x_n - x_{n+1} \rangle \leq 2\lambda_{n-1} || A x_n - A x_{n-1} || \cdot || x_n - x_{n+1} || \leq \\ \leq 2\lambda_{n-1} L || x_n - x_{n-1} || \cdot || x_{n+1} - x_n || \leq \lambda_{n-1} L || x_n - x_{n-1} ||^2 + \lambda_{n-1} L || x_n - x_{n+1} ||^2.$$

Перетворимо доданок 2 $\langle x_{n+1} - \alpha_n y - (1-\alpha_n) x_n, z - x_{n+1} \rangle$ в (12). Маємо

$$2 \langle x_{n+1} - \alpha_n y - (1-\alpha_n) x_n, z - x_{n+1} \rangle = || \alpha_n y + (1-\alpha_n) x_n - z ||^2 - \\ - || x_{n+1} - z ||^2 - || x_{n+1} - \alpha_n y - (1-\alpha_n) x_n ||^2. \quad (13)$$

Для перетворення різниці $|| \alpha_n y + (1-\alpha_n) x_n - z ||^2 - || \alpha_n y + (1-\alpha_n) x_n - x_{n+1} ||^2$ в (13) використаємо таку тотожність:

$$|| \alpha u + (1-\alpha) v - w ||^2 = || v - w - \alpha (v-u) ||^2 = \\ = || v - w ||^2 - 2\alpha \langle v - w, v - u \rangle + \alpha^2 || v - u ||^2 = \\ = || v - w ||^2 - \alpha || v - u ||^2 - \alpha || v - w ||^2 + \alpha || u - w ||^2 + \alpha^2 || v - u ||^2,$$

де $u, v, w \in H$, $\alpha > 0$. Отримаємо рівність

$$|| \alpha_n y + (1-\alpha_n) x_n - z ||^2 - || \alpha_n y + (1-\alpha_n) x_n - x_{n+1} ||^2 = \\ = || x_n - z ||^2 - \alpha_n || x_n - z ||^2 + \alpha_n || y - z ||^2 - \\ - || x_n - x_{n+1} ||^2 + \alpha_n || x_n - x_{n+1} ||^2 - \alpha_n || y - x_{n+1} ||^2 = \\ = (1-\alpha_n) || x_n - z ||^2 - (1-\alpha_n) || x_n - x_{n+1} ||^2 + \alpha_n || y - z ||^2 - \alpha_n || y - x_{n+1} ||^2.$$

Отримали нерівність

$$0 \leq (1-\alpha_n) || x_n - z ||^2 - (1-\alpha_n) || x_n - x_{n+1} ||^2 +$$

$$+\alpha_n \| y-z\|^2 - \alpha_n \| y - x_{n+1}\|^2 - \| x_{n+1} - z\|^2 +$$

$$+2\lambda_n \langle Ax_n - Ax_{n+1}, z - x_{n+1}\rangle + 2(1-\alpha_n)\lambda_{n-1}\langle Ax_n - Ax_{n-1}, z - x_n\rangle +$$

$$+(1-\alpha_n)\lambda_{n-1}L\| x_n - x_{n-1}\|^2 + (1-\alpha_n)\lambda_{n-1}L\| x_n - x_{n+1}\|^2. \tag{14}$$

Перегрупуємо члени в (14) та отримаємо

$$\| x_{n+1} - z\|^2 + 2\lambda_n \langle Ax_n - Ax_{n+1}, x_{n+1} - z\rangle + \frac{1}{2}\| x_{n+1} - x_n\|^2 \le$$

$$\le (1-\alpha_n)\left(\| x_n - z\|^2 + 2\lambda_{n-1}\langle Ax_{n-1} - Ax_n, x_n - z\rangle + \frac{1}{2}\| x_n - x_{n-1}\|^2 \right) +$$

$$+\alpha_n \| y-z\|^2 - \alpha_n \| y - x_{n+1}\|^2 - \left(\frac{1}{2} - \alpha_n - (1-\alpha_n)\lambda_{n-1}L \right) \| x_{n+1} - x_n\|^2 -$$

$$-(1-\alpha_n)\left(\frac{1}{2} - \lambda_{n-1}L \right) \| x_n - x_{n-1}\|^2,$$

що й потрібно було довести. ■

Лема 5. Для послідовності (x_n), що породжена алгоритмом 1, виконується нерівність

$$\| x_{n+1} - z\|^2 + 2\lambda_n \langle Ax_n - Ax_{n+1}, x_{n+1} - z\rangle + \frac{1}{2}\| x_{n+1} - x_n\|^2 \le$$

$$\le (1-\alpha_n)\left(\| x_n - z\|^2 + 2\lambda_{n-1}\langle Ax_{n-1} - Ax_n, x_n - z\rangle + \frac{1}{2}\| x_n - x_{n-1}\|^2 \right) +$$

$$+2\alpha_n \langle y - z, x_{n+1} - z\rangle - \left(\frac{1}{2} - \alpha_n - (1-\alpha_n)\lambda_{n-1}L \right) \| x_{n+1} - x_n\|^2 -$$

$$-(1-\alpha_n)\left(\frac{1}{2} - \lambda_{n-1}L \right) \| x_n - x_{n-1}\|^2, \tag{15}$$

де $z \in S$.

Доведення. Застосуємо елементарну нерівність

$$\| a+b\|^2 \le \| a\|^2 + 2\langle b, a+b\rangle.$$

Маємо

$$\| y-z\|^2 = \| y - x_{n+1} + x_{n+1} - z\|^2 \le \| y - x_{n+1}\|^2 + 2\langle y - z, x_{n+1} - z\rangle. \tag{16}$$

Використавши (16) в (9), отримаємо (15). ■

Доведемо обмеженість послідовності (x_n).

Лема 6. Нехай виконана умова (8). Тоді породжена алгоритмом 1 послідовність (x_n) є обмеженою.

Доведення. Оскільки $0 < \inf_n \lambda_n \le \sup_n \lambda_n < \frac{1}{2L}$ і $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, то існує такий номер $n_0 \ge 1$, що

$$\frac{1}{2} - \alpha_n - (1-\alpha_n)\lambda_{n-1}L = \frac{1}{2} - \lambda_{n-1}L - \alpha_n(1-\lambda_{n-1}L) > 0$$

$$\text{та} \quad (1-\alpha_n)\left(\frac{1}{2} - \lambda_{n-1}L \right) > 0. \tag{17}$$

З (9) та (17) випливає, що для $n \ge n_0$ виконується нерівність

$$\xi_{n+1} \le (1-\alpha_n)\xi_n + \alpha_n \| y - z\|^2, \tag{18}$$

де $\xi_n = \| x_n - z\|^2 + 2\lambda_{n-1}\langle Ax_{n-1} - Ax_n, x_n - z\rangle + \frac{1}{2}\| x_n - x_{n-1}\|^2$, $z \in S$.

Проведемо оцінювання знизу ξ_n. Маємо

$$\xi_n = ||x_n - z||^2 + 2\lambda_{n-1}\langle Ax_{n-1} - Ax_n, x_n - z\rangle + \frac{1}{2}||x_n - x_{n-1}||^2 \geq$$

$$\geq ||x_n - z||^2 - 2\lambda_{n-1}||Ax_{n-1} - Ax_n|| \, ||x_n - z|| + \frac{1}{2}||x_{n-1} - x_n||^2 \geq$$

$$\geq ||x_n - z||^2 - 2\lambda_{n-1}L||x_{n-1} - x_n|| \, ||x_n - z|| + \frac{1}{2}||x_{n-1} - x_n||^2 \geq$$

$$\geq (1 - \lambda_{n-1}L)||x_n - z||^2 + \left(\frac{1}{2} - \lambda_{n-1}L\right)||x_n - x_{n-1}||^2 \geq 0. \tag{19}$$

З нерівностей (18), (19) та леми 1 випливає обмеженість послідовностей (ξ_n) та (x_n). ■

Сформулюємо основний результат.

Теорема 1. Нехай C — непорожня опукла та замкнена підмножина гільбертового простору H, $A: H \to H$ — монотонний та ліпшицевий на множині C оператор, $S \neq \varnothing$, $y \in H$, виконується умова (8). Тоді послідовність (x_n), що породжена алгоритмом 1, сильно збігається до точки $z = P_S\, y$.

Доведення. Нехай $z = P_S\, y$. З леми 6 випливає існування такого числа $M \geq 0$, що $|\langle y - z, x_{n+1} - z\rangle| \leq M$ для всіх $n \geq 1$. Тоді з леми 5 випливає нерівність

$$\xi_{n+1} - \xi_n + \alpha_n \xi_n + \left(\frac{1}{2} - \alpha_n - (1-\alpha_n)\lambda_{n-1}L\right)||x_{n+1} - x_n||^2 +$$

$$+ (1-\alpha_n)\left(\frac{1}{2} - \lambda_{n-1}L\right)||x_n - x_{n-1}||^2 \leq 2\alpha_n M, \tag{20}$$

де $\xi_n = ||x_n - z||^2 + 2\lambda_{n-1}\langle Ax_{n-1} - Ax_n, x_n - z\rangle + \frac{1}{2}||x_n - x_{n-1}||^2$.

Розглянемо числову послідовність (ξ_n). Можливі два варіанти:

1) існує номер $\bar{n} \geq 1$ такий, що $\xi_{n+1} \leq \xi_n$ для всіх $n \geq \bar{n}$;

2) існує зростальна послідовність номерів (n_k) така, що $\xi_{n_k+1} > \xi_{n_k}$ для всіх $k \geq 1$.

Спочатку розглянемо перший варіант. У цьому випадку існує $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$. Оскільки $\xi_{n+1} - \xi_n \to 0$, $\alpha_n \to 0$ та виконуються нерівності (20), то у разі $n \to \infty$ маємо

$$||x_{n+1} - x_n|| \to 0. \tag{21}$$

Покажемо, що всі слабкі часткові границі послідовності (x_n) належать множині S. Розглянемо підпослідовність (x_{n_k}), що слабко збігається до деякої точки $w \in H$. Звісно, що $w \in C$. Покажемо, що $w \in S$. Маємо

$$\langle x_{n_k+1} - \alpha_{n_k} y - (1-\alpha_{n_k})x_{n_k} + \lambda_{n_k} Ax_{n_k} +$$

$$+ (1-\alpha_{n_k})\lambda_{n_k-1}(Ax_{n_k} - Ax_{n_k-1}),\; y - x_{n_k+1}\rangle \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

Звідси, використовуючи монотонність оператора A, отримуємо оцінку

$$\langle Ay, y - x_{n_k}\rangle + \langle Ax_{n_k}, x_{n_k} - x_{n_k+1}\rangle \geq \langle Ax_{n_k}, y - x_{n_k+1}\rangle \geq$$

$$\geq \frac{1}{\lambda_{n_k}}\langle \alpha_{n_k}(y - x_{n_k}) + x_{n_k} - x_{n_k+1},\; y - x_{n_k+1}\rangle -$$

$$- (1-\alpha_{n_k})\frac{\lambda_{n_k-1}}{\lambda_{n_k}}\langle Ax_{n_k} - Ax_{n_k-1},\; y - x_{n_k+1}\rangle \quad \forall y \in C.$$

З виразу $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, обмеженості послідовності (x_n), (21) та ліпшицевості оператора A випливає

$$\varliminf_{k\to\infty} \langle Ay, y - x_{n_k} \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

З іншого боку,

$$\langle Ay, y - w \rangle = \lim_{k\to\infty} \langle Ay, y - x_{n_k} \rangle = \varliminf_{k\to\infty} \langle Ay, y - x_{n_k} \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

Отже, $w \in S$.

Доведемо, що

$$\varlimsup_{n\to\infty} \langle y - z, x_{n+1} - z \rangle \leq 0. \tag{22}$$

Розглянемо таку підпослідовність (x_{n_k}), що

$$\lim_{k\to\infty} \langle y - z, x_{n_k} - z \rangle = \varlimsup_{n\to\infty} \langle y - z, x_{n+1} - z \rangle.$$

Можна вважати, що x_{n_k} слабко збігається до $w \in S$. Тоді отримуємо

$$\lim_{k\to\infty} \langle y - z, x_{n_k} - z \rangle = \langle y - z, w - z \rangle = \langle y - P_S y, w - P_S y \rangle \leq 0,$$

чим доводимо нерівність (22).

Тепер з (22), нерівності

$$\xi_{n+1} \leq (1 - \alpha_n) \xi_n + 2\alpha_n \langle y - z, x_{n+1} - z \rangle,$$

що виконується для достатньо великих n, та леми 2 дійдемо висновку, що

$$\xi_n = ||x_n - z||^2 + 2\lambda_{n-1} \langle Ax_{n-1} - Ax_n, x_n - z \rangle + \frac{1}{2} ||x_n - x_{n-1}||^2 \to 0.$$

З (19) отримуємо $\lim\limits_{n\to\infty} ||x_n - z|| = 0$.

Розглянемо другий варіант. У цьому випадку існує неспадна послідовність номерів (m_k) з властивостями (лема 3):

1) $m_k \to +\infty$;
2) $\xi_{m_k+1} \geq \xi_{m_k}$ для всіх $k \geq n_1$;
3) $\xi_{m_k+1} \geq \xi_k$ для всіх $k \geq n_1$.

З нерівності леми 5, нерівності (19) та п. 2) другого варіанта випливає

$$\left(\frac{1}{2} - \alpha_{m_k} - (1 - \alpha_{m_k}) \lambda_{m_k - 1} L \right) ||x_{m_k+1} - x_{m_k}||^2 +$$
$$+ (1 - \alpha_{m_k}) \left(\frac{1}{2} - \lambda_{m_k - 1} L \right) ||x_{m_k} - x_{m_k - 1}||^2 \leq 2\alpha_{m_k} M.$$

Звідси $\lim\limits_{k\to\infty} ||x_{m_k+1} - x_{m_k}|| = \lim\limits_{k\to\infty} ||x_{m_k} - x_{m_k - 1}|| = 0$. Виходячи з викладених вище міркувань, доводимо, що слабкі часткові границі послідовності (x_{m_k}) належать множині S. З тотожності

$$\langle y - z, x_{m_k+1} - z \rangle = \langle y - z, x_{m_k} - z \rangle + \langle y - z, x_{m_k+1} - x_{m_k} \rangle$$

отримуємо

$$\varlimsup_{k\to\infty} \langle y - z, x_{m_k+1} - z \rangle = \varlimsup_{k\to\infty} \langle y - z, x_{m_k} - z \rangle.$$

Як і раніше отримуємо нерівність $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \langle y - z, x_{m_k+1} - z \rangle \leq 0$. Далі маємо

$$\xi_{m_k+1} \leq (1 - \alpha_{m_k}) \xi_{m_k} + 2\alpha_{m_k} \langle y - z, x_{m_k+1} - z \rangle \leq$$
$$\leq (1 - \alpha_{m_k}) \xi_{m_k+1} + 2\alpha_{m_k} \langle y - z, x_{m_k+1} - z \rangle.$$

Звідси, ураховуючи умову п. 3), отримуємо $\xi_k \le \xi_{m_k+1} \le 2\langle y-z, x_{m_k+1}-z\rangle$.

Таким чином,

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\xi_k \le 2\overline{\lim_{k\to\infty}}\langle y-z, x_{m_k+1}-z\rangle \le 0.$$

Отже, $\lim_{n\to\infty}\xi_n = 0$ та, в свою чергу, $\lim_{n\to\infty}||x_n - z|| = 0$. ■

Зауваження 4. Параметри λ_n в алгоритмі 1 задано за умови нерівності $0 < \inf_n \lambda_n \le \sup_n \lambda_n < 1/2L$. Тобто використовувалась інформація про константу ліпшицевості оператора A. Алгоритм 1 та схема з роботи [4] дає змогу побудувати такий алгоритм з адаптивним вибором величини λ_n, що не потребує знання ліпшицевих констант операторів та операцій типу лінійного пошуку.

Алгоритм 2. Адаптивний регуляризований алгоритм операторної екстраполяції.

Ініціалізація. Задаємо $y \in H$, елементи $x_0, x_1 \in C$, числа $\tau \in (0, \frac{1}{2})$, $\lambda_1, \lambda_0 > 0$, та таку послідовність (α_n), що $\alpha_n \in (0,1)$, $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = +\infty$.

Ітерації. Генеруємо послідовність (x_n) за допомогою ітераційної схеми

$$x_{n+1} = P_C(\alpha_n y + (1-\alpha_n)x_n - \lambda_n Ax_n - (1-\alpha_n)\lambda_{n-1}(Ax_n - Ax_{n-1})),$$

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \min\left\{\lambda_n, \tau\dfrac{||x_{n+1}-x_n||}{||Ax_{n+1}-Ax_n||}\right\}, & \text{якщо } Ax_{n+1} \ne Ax_n, \\ \lambda_n & \text{інакше.} \end{cases}$$

Зауваження 5. Важливим предметом дослідження є асимптотична поведінка алгоритму 1 у випадку $C = H$:

$$x_{n+1} = \alpha_n y + (1-\alpha_n)x_n - \lambda_n Ax_n - (1-\alpha_n)\lambda_{n-1}(Ax_n - Ax_{n-1}),$$

а саме питання про швидкість прямування до нуля норми $||Ax_n||$. На нашу думку, повинна виконуватись оцінка

$$||Ax_n|| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Зауважимо, що в роботі [39] для екстраградієнтного методу отримана оцінка

$$||Ax_n|| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

а в роботі [40] отримано оцінку

$$||Ax_n|| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

для екстраградієнтного методу з регуляризацією Гальперна

$$\begin{cases} y_n = x_n + \dfrac{1}{n+2}(x_0 - x_n) - \dfrac{1}{8L}Ax_n, \\ x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{n+2}(x_0 - x_n) - \dfrac{1}{8L}Ay_n. \end{cases}$$

ВИСНОВКИ

В роботі запропоновано та досліджено новий ітераційний алгоритм для розв'язання монотонних варіаційних нерівностей в гільбертових просторах.

Запропонований алгоритм є регуляризованим за допомогою схеми Гальперна [36, 37] методом операторної екстраполяції — forward-reflected-backward algorithm з [32]. За обсягом необхідних для здійснення ітераційного кроку обчислень алгоритм має перевагу над екстраградієнтним методом Корпелевич та методом екстраполяції з минулого.

Для варіаційних нерівностей з монотонними, ліпшицевими операторами, що діють в гільбертовому просторі, доведено теорему про сильну збіжність методу.

Досліджений метод дає змогу отримати нові алгоритми апроксимації нормальних сідлових точок та нормальних точок рівноваги Неша. Крім того, виходячи з результатів статті [4], можна отримати аналог алгоритму 1 з узагальненою проєкцією Альбера для розв'язання варіаційних нерівностей в рівномірно опуклих та рівномірно гладких банахових просторах.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Vedel Y.I., Sandrakov G.V., Semenov V.V. An adaptive two-stage proximal algorithm for equilibrium problems in Hadamard spaces. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2020. Vol. 56, N 6. P. 978–989. https://doi.org/10.1007/s10559-020-00318-6.
2. Vedel Y.I., Denisov S.V., Semenov V.V. An adaptive algorithm for the variational inequality over the set of solutions of the equilibrium problem. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2021. Vol. 57, N 1. P. 91–100. https://doi.org/10.1007/s10559-021-00332-2.
3. Semenov V.V., Denisov S.V., Kravets A.V. Adaptive two-stage Bregman method for variational inequalities. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2021. Vol. 57, N 6. P. 959–967. https://doi.org/10.1007/s10559-021-00421-2.
4. Semenov V.V., Denisov S.V., Sandrakov G.V., Kharkov O.S. Convergence of the operator extrapolation method for variational inequalities in Banach spaces. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2022. Vol. 58, N 5. P. 740–753. https://doi.org/10.1007/s10559-022-00507-5.
5. Lions J. L., Stampacchia G. Variational inequalities. *Commun. Pure Appl. Math.* 1967. Vol. XX. P. 493–519.
6. Киндерлерер Д., Стампаккья Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения. Москва: Мир, 1983. 256 с.
7. Байокки К., Капело А. Вариационные и квазивариационные неравенства. Москва: Наука, 1988. 448 с.
8. Nagurney A. Network economics: A variational inequality approach. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. 325 p.
9. Nedić A., Ozdaglar A. Subgradient methods for saddle-point problems. *Journal of Optimization Theory and Applications.* 2009. Vol. 142. P. 205–228. https://doi.org/10.1007/s10957-009-9522-7.
10. Урясьев С.П. Адаптивные алгоритмы стохастической оптимизации и теории игр. Москва: Наука, 1990. 184 с.
11. Bakushinskii A.B., Goncharskii A.V. Iterative methods for solving ill-posed problems. Moscow: Nauka, 1989. 126 p.
12. Facchinei F., Pang J.-S. Finite-dimensional variational inequalities and complementarily problem. Vol. 2. New York: Springer, 2003. 666 p.
13. Alber Y., Ryazantseva I. Nonlinear ill posed problems of monotone type. Dordrecht: Springer, 2006. 410 p.
14. Bauschke H.H., Combettes P.L. Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 2011. 408 p.

15. Nemirovski A. Prox-method with rate of convergence $O(1/T)$ for variational inequalities with Lipschitz continuous monotone operators and smooth convex-concave saddle point problems. *SIAM Journal on Optimization.* 2004. Vol. 15. P. 229–251.

16. Wang J.-K., Abernethy J., Levy K.Y. No-regret dynamics in the Fenchel game: A unified framework for algorithmic convex optimization. arXiv preprint arXiv:2111.11309.2021.

17. Gidel G., Berard H., Vincent P., Lacoste-Julien S. A variational inequality perspective on generative adversarial networks. arXiv preprint arXiv:1802.10551.2018.

18. Korpelevich G.M. An extragradient method for finding saddle points and for other problems. *Matecon.* 1976. Vol. 12, N 4. P. 747–756.

19. Хоботов Е.Н. О модификации экстраградиентного метода для решения вариационных неравенств и некоторых задач оптимизации. *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 1987. Т. 27, № 10. С. 1462–1473.

20. Nadezhkina N., Takahashi W. Weak convergence theorem by an extragradient method for nonexpansive mappings and monotone mappings. *Journal of Optimization Theory and Applications.* 2006. Vol. 128. P. 191–201.

21. Verlan D.A., Semenov V.V., Chabak L.M. A strongly convergent modified extragradient method for variational inequalities with non-lipschitz operators. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2015. Vol. 47, Iss. 7. P. 31–46. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v47.i7.40.

22. Denisov S.V., Nomirovskii D.A., Rublyov B.V., Semenov V.V. Convergence of extragradient algorithm with monotone step size strategy for variational inequalities and operator equations. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2019. Vol. 51. Iss. 6. P. 12–24. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v51.i6.20.

23. Tseng P. A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings. *SIAM Journal on Control and Optimization.* 2000. Vol. 38. P. 431–446.

24. Censor Y., Gibali A., Reich S. The subgradient extragradient method for solving variational inequalities in Hilbert space. *Journal of Optimization Theory and Applications.* 2011. Vol. 148. P. 318–335. https://doi.org/10.1007/s10957-010-9757-3.

25. Censor Y., Gibali A., Reich S. Extensions of Korpelevich's extragradient method for the variational inequality problem in Euclidean space. *Optimization.* 2012. Vol. 61, Iss. 9. P. 1119–1132. https://doi.org/10.1080/02331934.2010.539689.

26. Semenov V.V. Modified extragradient method with Bregman divergence for variational inequalities. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2018. Vol. 50, Iss. 8. P. 26–37. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v50.i8.30.

27. Bach F., Levy K.Y. A universal algorithm for variational inequalities adaptive to smoothness and noise. arXiv preprint arXiv:1902.01637.2019.

28. Popov L.D. A modification of the Arrow-Hurwicz method for search of saddle points. *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR.* 1980. Vol. 28, Iss. 5. P. 845–848.

29. Mokhtari A., Ozdaglar A., Pattathil S. A unified analysis of extra-gradient and optimistic gradient methods for saddle point problems: proximal point approach. arXiv preprint arXiv:1901.08511.2019.

30. Chabak L., Semenov V., Vedel Y. A new non-Euclidean proximal method for equilibrium problems. In: Chertov O., Mylovanov T., Kondratenko Y., Kacprzyk J., Kreinovich V., Stefanuk V. (eds.) Recent developments in data science and intelligent analysis of information. ICDSIAI 2018. *Advances in intelligent systems and computing*, Springer, Cham, 2019. Vol. 836. P. 50–58. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97885-7_6.

31. Vedel Y.I., Sandrakov G.V., Semenov V.V., Chabak L.M. Convergence of a two-stage proximal algorithm for the equilibrium problem in Hadamard spaces. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2020. Vol. 56, N 5. P. 784–792. https://doi.org/10.1007/s10559-020-00299-6.

32. Malitsky Y., Tam M.K. A forward-backward splitting method for monotone inclusions without cocoercivity. *SIAM Journal on Optimization.* 2020. Vol. 30. P. 1451–1472. https://doi.org/10.1137/18M1207260.

33. Iiduka H., Takahashi W. Weak convergence of a projection algorithm for variational inequalities in a Banach space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* 2008. Vol. 339, N 1. P. 668–679. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.07.019.

34. Shehu Y. Single projection algorithm for variational inequalities in Banach spaces with application to contact problem. *Acta Math. Sci.* 2020. Vol. 40. P. 1045–1063. https://doi.org/10.1007/s10473-020-0412-2.

35. Yang J., Cholamjiak P., Sunthrayuth P. Modified Tseng's splitting algorithms for the sum of two monotone operators in Banach spaces. *AIMS Mathematics.* 2021. Vol. 6, Iss. 5. P. 4873–4900. https://doi.org/10.3934/math.2021286.

36. Halpern B. Fixed points of nonexpanding maps. *Bull. Amer. Math. Soc.* 1967. Vol. 73. P. 957–961.

37. Xu H.K. Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings. *J. Math. Anal. Appl.* 2004. Vol. 298. P. 279–291. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.04.059.

38. Mainge P.-E. Strong convergence of projected subgradient methods for nonsmooth and nonstrictly convex minimization. *Set-Valued Analysis.* 2008. Vol. 16. P. 899–912.

39. Gorbunov E., Loizou N., Gidel G. Extragradient method: $O(1/K)$ last-iterate convergence for monotone variational inequalities and connections with cocoercivity. arXiv preprint arXiv: 2110.04261.2021. https://doi.org/10.48550/arXiv.2110.04261.

40. Yoon T., Ryu E.K. Accelerated algorithms for smooth convex-concave minimax problems with $O(1/k^2)$ rate on squared gradient norm. Proceedings of the 38th International Conference on Machine Learning. *Proceedings of Machine Learning Research.* 2021. Vol. 139. P. 12098–12109.

V.V. Semenov, O.S. Kharkov

STRONG CONVERGENCE OF THE REGULARIZED OPERATOR EXTRAPOLATION ALGORITHM FOR VARIATIONAL INEQUALITIES

Abstract. The article proposes and investigates a new algorithm for solving variational inequalities in Hilbert spaces. The proposed iterative algorithm is regularized by the operator extrapolation method using the Halpern scheme. In terms of the amount of computation required for the iterative step, the algorithm has an advantage over the Korpelevich extragradient method and the method of extrapolation from the past. For variational inequalities with monotone, Lipschitz continuous operators acting in Hilbert space, a theorem on the strong convergence of the method is proved.

Keywords: variational inequality, saddle point problem, monotone operator, operator extrapolation method, Halpern method, regularization, strong convergence.

Надійшла до редакції 17.04.2023