УДК 517.9: 519.6

В.М. БУЛАВАЦЬКИЙ
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *v_bulav@ukr.net.*

ДЕЯКІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ, ВІДПОВІДНІ МОДЕЛІ ДРОБОВО-ДИФЕРЕНЦІЙНОЇ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ ДИНАМІКИ В ТРІЩИНУВАТО-ПОРИСТОМУ СЕРЕДОВИЩІ ЗА УМОВ ЧАСОВОЇ НЕЛОКАЛЬНОСТІ

Анотація. Одержано замкнені розв'язки деяких крайових задач дробово-диференційної геофільтраційної динаміки в тріщинувато-пористому середовищі для моделі зі слабкопроникними пористими блоками. Зокрема, розв'язано пряму і обернену крайові задачі фільтрації для шару скінченної потужності, наведено умови існування їхніх регулярних розв'язків, знайдено розв'язок задачі фільтраційної динаміки з нелокальними граничними умовами. Для окремого випадку фільтраційної моделі розглянуто задачу моделювання аномальної динаміки фільтраційних полів тисків на зіркоподібному графі.

Ключові слова: математичне моделювання, дробово-диференційна динаміка фільтраційних процесів, тріщинувато-пористі середовища, некласичні моделі, крайові задачі, обернені задачі, задачі з нелокальними умовами, замкнені розв'язки.

ВСТУП

Актуальність розвитку методів математичного і комп'ютерного моделювання особливостей динаміки геоміграційних процесів за складних гідрогеологічних умов перебігу зумовлена, зокрема, пошуками розв'язування задач ефективного керування різноманітними системами меліорації, водними ресурсами та їхнім впливом на екологічний стан навколишнього природного середовища [1–4]. Зазначимо, що ефективний підхід до математичного моделювання динаміки процесів переносу за суттєвого впливу нелокальних умов перебігу щодо часу (ефекти пам'яті) чи простору базується на використанні апарату інтегро-диференціювання дробового порядку і інтенсивно розвивається впродовж кількох останніх десятиліть [5–13]. Серед опублікованих результатів з цього напряму виокремимо побудову деяких спеціальних дробово-диференційних математичних моделей фільтраційних процесів у геопористих середовищах та постановку і розв'язання низки прямих і обернених крайових задач, що описують аномальну динаміку нелокальних у часі фільтраційних процесів у вказаних середовищах [14–16]. Також для дробово-диференційних математичних моделей одержано замкнені розв'язки деяких нестаціонарних крайових задач фільтраційної динаміки в тріщинувато-пористих пластах з урахуванням просторово-часової нелокальності процесів переносу. Вказані математичні моделі сформульовано з застосуванням дробових похідних Хільфера або Капуто–Герасимова за часовою змінною та похідної Рімана–Ліувілля за геометричною змінною [17].

У запропонованій роботі, на відміну від [17], описано дробово-диференційний аналог математичної моделі фільтрації в тріщинувато-пористому середовищі (за умов часової нелокальності процесу) у разі наявності слабкопроникних пористих блоків та поставлено і розв'язано у замкненому вигляді пряму і обернену крайові задачі дробово-диференційної фільтраційної динаміки. Визначено умови існування регулярних розв'язків розглядуваних задач. До того ж, наведено розв'язки задачі дробово-диференційної фільтраційної динаміки з нелокальними граничними умовами Самарського–Іонкіна та задачі моделювання фільтраційної динаміки на зіркоподібному графі (для окремого випадку фільтраційної моделі).

МОДЕЛЬНА СИСТЕМА РІВНЯНЬ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ ДИНАМІКИ В ТРІЩИНУВАТО-ПОРИСТОМУ СЕРЕДОВИЩІ ЗА ВРАХУВАННЯ ЕФЕКТІВ ПАМ'ЯТІ

Математична модель фільтраційної динаміки в тріщинувато-пористих середовищах в одновимірному випадку відповідно до класичних робіт [18–20] базується на такій модельній системі:

$$\omega_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} - \frac{p_2 - p_1}{\tau_r} = \kappa \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} , \tag{1}$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial t} + \frac{p_2 - p_1}{\tau_r} = \varepsilon_* \kappa \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2}, \tag{2}$$

де $p_1(x,t), p_2(x,t)$ — тиски в системі тріщин і пористих блоках відповідно, $q = \frac{\alpha_0}{\mu}(p_2 - p_1)$ — інтенсивність перетоків між тріщинами і пористими блоками (α_0 — коефіцієнт перетоку), $\kappa = \frac{k_1}{\mu\beta_2^*}$, $\tau_r = \frac{\mu\beta_2^*}{\alpha_0}$, $\omega_1 = \frac{\beta_1^*}{\beta_2^*}$, $\varepsilon_* = \frac{k_2}{k_1}$, k_i $(i=1,2)$ — коефіцієнти фільтрації в системах тріщин і пористих блоках відповідно, β_i^* $(i=1,2)$ — коефіцієнти пружноємності [21], μ — в'язкість порової рідини.

З урахуванням нелокальних у часі ефектів (зокрема, ефектів пам'яті [7]) запишемо дробово-диференційний аналог системи рівнянь фільтрації (1), (2) у вигляді

$$\omega_1 D_t^{(\alpha)} p_1 - \frac{p_2 - p_1}{\tau_r} = \kappa \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}, \tag{3}$$

$$D_t^{(\beta)} p_2 + \frac{p_2 - p_1}{\tau_r} = \varepsilon_* \kappa \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2}, \tag{4}$$

де $D_t^{(\alpha)}, D_t^{(\beta)}$ — оператори дробових похідних Капуто–Герасимова щодо змінної t [7, 8] порядків α і β відповідно $(0<\alpha, \beta \le 1)$.

У разі припущення про наявність у середовищі достатньо слабкопроникних пористих блоків система рівнянь (3), (4) спрощується і набуває вигляду

$$\omega_1 \tau_r D_t^{(\alpha)} p_1 - p_2 + p_1 = \kappa \tau_r \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}, \tag{5}$$

$$\tau_r D_t^{(\beta)} p_2 + p_2 - p_1 = 0 \tag{6}$$

або

$$\omega_1 D_t^{(\alpha)} p_1 + D_t^{(\beta)} p_2 = \kappa \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}, \tag{7}$$

$$p_1 = p_2 + \tau_r D_t^{(\beta)} p_2 . \tag{8}$$

Виключаючи з рівняння (7) функцію p_1, маємо модельне рівняння фільтрації вигляду

$$\omega_1 \tau_r D_t^{(\alpha)} D_t^{(\beta)} p_2 + \omega_1 D_t^{(\alpha)} p_2 + D_t^{(\beta)} p_2 = \kappa (1 + \tau_r D_t^{(\beta)}) \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2}. \tag{9}$$

Отже, задача математичного моделювання динаміки фільтраційного процесу для розглядуваної математичної моделі зводиться до розв'язання відповідних крайових задач для дробово-диференційного рівняння (9) за визначених крайових (граничних і початкових) умов. Подальше визначення функції тиску в тріщинах $p_1(x,t)$ відбувається згідно з співвідношенням (8).

ПРЯМА ТА ОБЕРНЕНА КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ ДИНАМІКИ

Найпростіша модельна пряма фільтраційна задача (для масиву одиничної потужності з проникними гранями) поставлена за припущень зазначеної математичної моделі (модельне рівняння (9)) і зводиться до розв'язання в області $\Omega = \{(x, t): 0 < x < 1,\ 0 < t < +\infty\}$ крайової задачі

$$\omega_1 \tau_r D_t^{(\alpha)} D_t^{(\beta)} u(x,t) + \omega_1 D_t^{(\alpha)} u(x,t) + D_t^{(\beta)} u(x,t) = \kappa\,(1 + \tau_r D_t^{(\beta)}) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad (10)$$

$$u(0,t) = 0, \qquad u(1,t) = 0 \qquad (t \ge 0) \quad (11)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad D_t^{(\beta)} u(x,t)|_{t=0} = 0 \qquad (x \in [0,1]), \quad (12)$$

де $\varphi(x)$ — задана функція початкового розподілу тисків, $u(x,t)$ — шукана функція тисків у пористих блоках $u(x,t) \equiv p_2(x,t)$.

Припустимо, що існує скінченне інтегральне синус-перетворення Фур'є [22] функції $u(x,t)$ за геометричною змінною x:

$$u_n(t) = \int_0^1 u(x,t)\sin(\lambda_n x)\,dx \quad (\lambda_n = n\pi,\ n \in N). \quad (13)$$

Тоді, застосовучи перетворення (13) до задачі (10)–(12), одержуємо

$$\omega_1 \tau_r D_t^{(\alpha)} D_t^{(\beta)} u_n(t) + \omega_1 D_t^{(\alpha)} u_n(t) + D_t^{(\beta)} u_n(t) + \kappa\,\lambda_n^2 (1 + \tau_r D_t^{(\beta)})\, u_n(t) = 0, \quad (14)$$

$$u_n(0) = \varphi_n, \quad D_t^{(\beta)} u_n(t)|_{t=0} = 0 \qquad (n \in N), \quad (15)$$

де φ_n — образ перетворення Фур'є функції $\varphi(x)$ згідно з (13). Далі, застосовуючи до задачі (14), (15) інтегральне перетворення Лапласа за змінною t, маємо

$$\bar{u}_n(s) = \varphi_n \frac{\tau_r s^{\alpha+\beta-1} + s^{\alpha-1} + \frac{1}{\omega_1}(1 + \tau_r\,\kappa\,\lambda_n^2)s^{\beta-1}}{\tau_r s^{\alpha+\beta} + s^{\alpha} + \frac{1}{\omega_1}(1 + \tau_r\,\kappa\,\lambda_n^2)s^{\beta} + \frac{\kappa\,\lambda_n^2}{\omega_1}} \qquad (n \in N), \quad (16)$$

де $\bar{u}_n(s)$ — образ перетворення Лапласа функції $u_n(t)$, s — параметр цього перетворення.

Нехай $0 < \alpha < \beta < \alpha + \beta < 1$. Тоді, переходячи в співвідношеннях (16) до оригіналів перетворення Лапласа з урахуванням леми 4 із [23], одержуємо розв'язки задачі (14), (15) у вигляді

$$u_n(t) = \varphi_n \Phi_n(z_{1n}(t),\ z_2(t),\ z_{3n}(t)) \qquad (n \in N), \quad (17)$$

де введено такі позначення:

$$\begin{aligned}\Phi_n(z_{1n}(t),\ z_2(t), z_{3n}(t)) &= E_{(\alpha+\beta,\,\beta,\alpha),\,1}(z_{1n}(t), z_2(t), z_{3n}(t)) + \\ &+ \frac{1}{\tau_r} t^{\beta} E_{(\alpha+\beta,\,\beta,\,\alpha),\,\beta+1}(z_{1n}(t),\ z_2(t), z_{3n}(t)) + \\ &+ \frac{1}{\omega_1}\left(\frac{1}{\tau_r} + \kappa\,\lambda_n^2\right) t^{\alpha} E_{(\alpha+\beta,\,\beta,\,\alpha),\alpha+1}(z_{1n}(t),\ z_2(t),\ z_{3n}(t)),\end{aligned} \quad (18)$$

$$z_{1n}(t) = -\frac{\kappa\,\lambda_n^2}{\omega_1 \tau_r} t^{\alpha+\beta}, \quad z_2(t) = -\frac{1}{\tau_r} t^{\beta},$$

$$z_{3n}(t) = -\frac{1}{\omega_1}\left(\frac{1}{\tau_r} + \kappa\,\lambda_n^2\right) t^{\alpha} \quad (n \in N), \quad (19)$$

$$E_{(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_m),\eta}(z_1,z_2,\ldots,z_m):=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{l_1+l_2+\ldots+l_m=k\\ l_1\ge 0,\ldots,l_m\ge 0}}(k;l_1,\ldots,l_m)\frac{\prod_{i=1}^{m}z_i^{l_i}}{\Gamma\left(\eta+\sum_{i=1}^{m}\xi_i l_i\right)} \quad — \tag{20}$$

поліноміальна функція Міттаг-Леффлера [24], $(k;l_1,\ldots,l_m)=\dfrac{k!}{l_1!\times\ldots\times l_m!}$, $\Gamma(\cdot)$ — гама-функція Ейлера [25].

Таким чином, формальний розв'язок задачі (10)–(12) з урахуванням (17) визначається так:

$$u(x,t)=2\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\Phi_n(z_{1n}(t),z_2(t),z_{3n}(t))\sin(\lambda_n x), \tag{21}$$

де $\Phi_n(z_{1n}(t),z_2(t),z_{3n}(t))$ дається співвідношеннями (18)–(20). Щодо умов збіжності ряду (21) зазначимо наступне. Припустимо, що функція $\varphi(x)$ задовольняє умови $\varphi(x)\in C^4[0,1]$, $\varphi^{(i)}(0)=\varphi^{(i)}(1)=0 \quad (i=0,2)$.

Використовуючи одержану в [26, лема 3.2] оцінку для функції (20):

$$|E_{(\alpha,\alpha_1-\alpha_2,\ldots,\alpha_1-\alpha_m),\,\beta}(z_1,z_2,\ldots,z_m)|\le\frac{C}{1+|z_1|} \tag{22}$$

$(0<\beta<2,\ 1>\alpha_1>\ldots>\alpha_m>0,\ -K\le z_j<0\ (j=2,\ldots,m),\ K>0,\ C>0)$, маємо на основі співвідношень (17)–(19) оцінку

$$|u_n(t)|\le\frac{C_1}{\lambda_n^4}|\varphi_n^{(4)}| \qquad (C_1>0,\, n\in N),$$

де $\varphi_n^{(4)}=\int_0^1\dfrac{d^4\varphi(x)}{dx^4}\sin(\lambda_n x)\,dx \quad (\lambda_n=n\pi,\ n\in N)$.

З застосуванням мажорантної ознаки Вейєрштраса ця оцінка гарантує абсолютну і рівномірну збіжність ряду (21) для функції $u(x,t)$ на множині $\overline{\Omega}_T$, де $\Omega_T:=(0,1)\times(0,T)\ (T>0)$. Аналогічно для ряду

$$u_{xx}(x,t)=-2\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\lambda_n^2\sin(\lambda_n x)$$

з оцінки

$$|u_n(t)\lambda_n^2\sin(\lambda_n x)|\le\frac{C_2}{\lambda_n^2}|\varphi_n^{(4)}| \qquad (C_2>0,\ n\in N)$$

на основі мажорантної ознаки Вейєрштраса випливає абсолютна і рівномірна його збіжність на $\overline{\Omega}_T$. Отже, ряд (21) являє собою регулярний розв'язок задачі (10)–(12), $u\in C(\overline{\Omega}_T)$. Зазначимо, що використовуючи методику, наприклад [27], не важко встановити єдиність цього розв'язку.

Обернену крайову задачу дробово-диференційної фільтраційної динаміки в тріщинувато-пористому середовищі зі слабкопроникними пористими блоками сформулюємо як задачу відшукання пари функцій $\{u(x,t),g(x)\}$ на основі розв'язання в області Ω_T крайової задачі

$$\omega_1\tau_r D_t^{(\alpha)}D_t^{(\beta)}u(x,t)+\omega_1 D_t^{(\alpha)}u(x,t)+D_t^{(\beta)}u(x,t)=$$

$$=\kappa(1+\tau_r D_t^{(\beta)})\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+g(x), \tag{23}$$

$$u(0,\ t)=0,\quad u(1,\ t)=0\qquad (t\ge 0),\tag{24}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad D_t^{(\beta)}u(x,t)|_{t=0}=0,\quad u(x,T)=\psi(x)\qquad (x\in[0,1], T>0),\tag{25}$$

де $\varphi(x), \psi(x)$ — задані на відрізку [0,1] функції відповідно початкової та додаткової (кінцевої) умов.

Застосовуючи до задачі (23)–(25) скінченне інтегральне синус-перетворення Фур'є, визначене згідно з (13), одержуємо таку послідовність задач Коші:

$$\omega_1\tau_r D_t^{(\alpha)}D_t^{(\beta)}u_n(t)+\omega_1 D_t^{(\alpha)}u_n(t)+D_t^{(\beta)}u_n(t)+$$

$$+\kappa\lambda_n^2(1+\tau_r D_t^{(\beta)})u_n(t)=g_n\quad (n\in N),\tag{26}$$

$$u_n(0)=\varphi_n,\qquad D_t^{(\beta)}u_n(t)|_{t=0}=0\qquad (n\in N)\tag{27}$$

з додатковою умовою

$$u_n(T)=\psi_n\qquad (n\in N),\tag{28}$$

де g_n, ψ_n — образи перетворення Фур'є згідно з (13) відповідно для функцій $g(x), \psi(x)$.

Унаслідок застосування до (26), (27) інтегрального перетворення Лапласа за часовою змінною маємо

$$\bar{u}_n(s)=\frac{\varphi_n[\omega_1\tau_r s^{\alpha+\beta-1}+\omega_1 s^{\alpha-1}+(1+\tau_r\kappa\lambda_n^2)s^{\beta-1}]+g_n}{\omega_1\tau_r s^{\alpha+\beta}+\omega_1 s^{\alpha}+(1+\tau_r\kappa\lambda_n^2)s^{\beta}+\kappa\lambda_n^2}\qquad (n\in N),\tag{29}$$

де $\bar{u}_n(s)$ — образ перетворення Лапласа функції $u_n(t)$, s — параметр перетворення.

Переходячи в співвідношеннях (29) до оригіналів перетворення Лапласа, одержуємо розв'язки задач (26), (27) у вигляді

$$u_n(t)=\varphi_n\,\Phi_n(z_{1n}(t), z_2(t), z_{3n}(t))+$$

$$+g_n\frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\omega_1\tau_r}E_{(\alpha+\beta,\ \beta,\ \alpha),\ \alpha+\beta}(z_{1n}(t), z_2(t), z_{3n}(t))\quad (n\in N),\tag{30}$$

де $z_{1n}(t), z_2(t), z_{3n}(t)$ даються співвідношеннями (19).

Беручи до уваги (30), на основі співвідношення (28) одержуємо

$$g_n=\frac{\omega_1\tau_r[\psi_n-\varphi_n\,\Phi_n(z_{1n}(T), z_2(T), z_{3n}(T))]}{T^{\alpha+\beta-1}E_{(\alpha+\beta,\ \beta,\ \alpha),\alpha+\beta}(z_{1n}(T), z_2(T), z_{3n}(T))}\quad (n\in N),\tag{31}$$

де $T^{\alpha+\beta-1}E_{(\alpha+\beta,\beta,\alpha),\alpha+\beta}(z_{1n}(T), z_2(T), z_{3n}(T))\ne 0$.

Таким чином, формальний розв'язок $\{u(x,t), g(x)\}$ розглядуваної задачі визначається співвідношеннями

$$u(x,t)=2\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_n\,\Phi_n(z_{1n}(t), z_2(t), z_{3n}(t))+$$

$$+g_n(\omega_1\tau_r)^{-1}t^{\alpha+\beta-1}E_{(\alpha+\beta,\ \beta,\ \alpha),\alpha+\beta}(z_{1n}(t), z_2(t), z_{3n}(t)))\sin(\lambda_n x),\tag{32}$$

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n\sin(\lambda_n x)\quad (\lambda_n=n\pi,\ n\in N),\tag{33}$$

де величини g_n $(n\in N)$ визначаються згідно з (31), а величини $\Phi_n(\cdot)$ $(n\in N)$ визначаються згідно з (18), (19).

Далі покажемо, що за певних умов одержаний розв'язок оберненої задачі фільтрації є класичним розв'язком, а знайдена функція джерела $g(x)$ неперервна.

Нехай функція $\psi(x)$ задовольняє умови $\psi(x) \in C^4[0,1]$, $\psi^{(i)}(0) = \psi^{(i)}(1) = 0$ $(i = 0, 2)$. Тоді зі співвідношень (31) з урахуванням оцінки (22) одержуємо оцінку

$$|g_n| \le \frac{1}{\lambda_n^2}(C_3|\varphi_n^{(4)}| + C_4|\psi_n^{(4)}|) \qquad (C_3, C_4 > 0,\ \lambda_n = n\pi,\ n \in N),$$

де $\psi_n^{(4)} = \int_0^1 \frac{d^4\psi(x)}{dx^4} \sin(\lambda_n x)\, dx \qquad (\lambda_n = n\pi,\ n \in N)$.

Отже, на основі мажорантної ознаки Вейєрштраса ряд (33) є рівномірно збіжним на відрізку $[0,1]$ і його сума є неперервною функцією на цьому відрізку: $g(x) \in C[0,1]$. Щодо визначення умов збіжності ряду (32) зазначимо, що зі співвідношень (30) з урахуванням (19), (22) та відповідних обмежень, накладених раніше на функції $\varphi(x), \psi(x)$, одержуємо оцінку

$$|u_n(t)| \le \frac{1}{\lambda_n^4}(C_5|\varphi_n^{(4)}| + C_6|\psi_n^{(4)}|) \qquad (C_5, C_6 > 0,\ n \in N). \tag{34}$$

З урахуванням (34) на основі мажорантної ознаки Вейєрштраса дійдемо висновку, що ряд (32) рівномірно збігається в області $\overline{\Omega_T}$. Аналогічно можна встановити рівномірну збіжність відповідних рядів для функцій $u_{xx}(x,t), D_t^{(\alpha)}u(x,t), D_t^{(\beta)}u(x,t), D_t^{(\alpha)}D_t^{(\beta)}u(x,t)$. Таким чином, розв'язок, що визначається співвідношеннями (32), (33), (31), (18), (19), становить регулярний розв'язок розглядуваної оберненої задачі фільтрації. Шляхом стандартних міркувань встановлюється також єдиність зазначеного розв'язку.

ЗАДАЧА ДРОБОВО-ДИФЕРЕНЦІЙНОЇ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ ДИНАМІКИ З НЕЛОКАЛЬНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ

Розглянемо задачу моделювання дробово-диференційної фільтраційної динаміки полів тисків у масиві скінченної потужності за припущення, що відома величина тиску на лівій $x = 0$ грані цього масиву та має місце рівність витрат рідини через обидві його грані $x = 0, x = 1$. Згідно з прийнятою в цій роботі фільтраційною математичною моделлю розглядувана задача зводиться до розв'язання в області Ω такої крайової задачі:

$$\omega_1 \tau_r D_t^{(\alpha)} D_t^{(\beta)} u(x,t) + \omega_1 D_t^{(\alpha)} u(x,t) + D_t^{(\beta)} u(x,t) = \kappa(1 + \tau_r D_t^{(\beta)}) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \tag{35}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(0,t) = u_x(1,t) \qquad (t \ge 0), \tag{36}$$

$$u(x,0) = h_0(x), \quad D_t^{(\beta)} u(x,t)|_{t=0} = 0 \qquad (x \in [0,1]), \tag{37}$$

де $h_0(x)$ — задана на відрізку [0,1] функція початкового розподілу тиску в масиві.

Зауважимо, що некласична (нелокальна) гранична умова (36) є добре відомою умовою Самарського–Іонкіна [28, 29].

Розв'язок задачі (35)–(37), аналогічно до [28, 29], шукатимемо у вигляді біортогонального розкладу:

$$u(x,t) = \upsilon_0(t) X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [w_k(t) X_{2k-1}(x) + \upsilon_k(t) X_{2k}(x)], \tag{38}$$

де $w_k(t)=(u(x,t),Y_{2k-1}(x))$ $(k=1,2,\dots)$, $\upsilon_k(t)=(u(x,t),Y_{2k}(x))$ $(k=0,1,2,\dots)$, $X_0(x)=x$, $X_{2k}(x)=\sin(\lambda_k x)$ — власні функції спектральної задачі

$$X''(x)+\lambda_k^2 X(x)=0 \ \ (0<x<1), \tag{39}$$

$$X(0)=0, \ \ X'(0)=X'(1), \tag{40}$$

що відповідають власним значенням $\lambda_k=2\pi k$ $(k=0,1,2,\dots)$ [28].

Відповідні власним значенням λ_k приєднані функції $X_{2k-1}(x)$ мають вигляд [29]: $X_{2k-1}(x)=x\cos(\lambda_k x)$ $(k=1,2,\dots)$. При цьому, як показано в [29, 30], система власних та приєднаних функцій спряженої до (39), (40) задачі записується у вигляді $Y_0(x)=2$, $Y_{2k-1}(x)=4\cos(\lambda_k x)$, $Y_{2k}(x)=4(1-x)\sin(\lambda_k x)$ $(k\in N)$.

Розкладаючи в біортогональний ряд функцію початкового розподілу тиску

$$h_0(x)=\varphi_0^{(2)}X_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}[\varphi_k^{(1)}X_{2k-1}(x)+\varphi_k^{(2)}X_{2k}(x)],$$

$$\varphi_k^{(1)}=(h_0(x),Y_{2k-1}(x)) \quad (k=1,2,\dots),$$

$$\varphi_k^{(2)}=(h_0(x),Y_{2k}(x)) \quad (k=0,1,2,\dots), \tag{41}$$

на основі (35)–(37) одержуємо для визначення функцій $u_k(t)$ $(k=1,2,\dots)$, $\upsilon_k(t)$ $(k=0,1,2,\dots)$ такі послідовності задач Коші:

$$\omega_1\tau_r D_t^{(\alpha)}D_t^{(\beta)}\upsilon_0(t)+\omega_1 D_t^{(\alpha)}\upsilon_0(t)+D_t^{(\beta)}\upsilon_0(t)=0, \tag{42}$$

$$\upsilon_0(0)=\varphi_0^{(2)}, \qquad D_t^{(\beta)}\upsilon_0(0)|_{t=0}=0, \tag{43}$$

$$\omega_1\tau_r D_t^{(\alpha)}D_t^{(\beta)}w_k(t)+\omega_1 D_t^{(\alpha)}w_k(t)+$$

$$+(1+\kappa\tau_r\lambda_k^2)D_t^{(\beta)}w_k(t)+\kappa\lambda_k^2 w_k(t)=0 \ \ (k\in N), \tag{44}$$

$$w_k(0)=\varphi_k^{(1)}, \quad D_t^{(\beta)}w_k(t)|_{t=0}=0 \qquad (k\in N), \tag{45}$$

$$\omega_1\tau_r D_t^{(\alpha)}D_t^{(\beta)}\upsilon_k(t)+\omega_1 D_t^{(\alpha)}\upsilon_k(t)+(1+\kappa\tau_r\lambda_k^2)D_t^{(\beta)}\upsilon_k(t)+\kappa\lambda_k^2\upsilon_k(t)=$$

$$=-2\kappa\lambda_k(w_k(t)+\tau_r D_t^{(\beta)}w_k(t)) \quad (k\in N), \tag{46}$$

$$\upsilon_k(0)=\varphi_k^{(2)}, \qquad D_t^{(\beta)}\upsilon_k(t)|_{t=0}=0 \qquad (k\in N), \tag{47}$$

де $\varphi_k^{(1)}$ $(k=1,2,\dots)$, $\varphi_k^{(2)}=$ $(k=0,1,2,\dots)$ визначаються згідно з (41).

Зі співвідношень (42), (43) маємо $\upsilon_0(t)=\varphi_0^{(2)}$. Розв'язки задач (44), (45) записуються у вигляді

$$w_k(t)=\varphi_k^{(1)}\,\Phi_k(z_{1k}(t),z_2(t),z_{3k}(t)) \qquad (k\in N), \tag{48}$$

де $\Phi_k(z_{1k},z_2,z_{3k})$, $z_{1k}(t)$, $z_2(t)$, $z_{3k}(t)$ $(k\in N)$ визначаються співвідношеннями (18)–(20). Для задач (46), (47) відповідні розв'язки одержуються у вигляді

$$\upsilon_k(t)=\varphi_k^{(2)}\,\Phi_k(z_{1k}(t),z_2(t),z_{3k}(t))-$$

$$-\frac{2\kappa\lambda_k}{\omega_1\tau_r}\int_0^t \tau^{\alpha+\beta-1}E_{(\alpha+\beta,\beta,\alpha),\alpha+\beta}(z_{1k}(\tau),z_2(\tau),z_{3k}(\tau))\,f_k(t-\tau)\,d\tau \ \ (k\in N), \tag{49}$$

де

$$f_k(t) = w_k(t) + \tau_r D_t^{(\beta)} w_k(t) \qquad (k \in N), \tag{50}$$

а функції $w_k(t)$ визначаються згідно з (48).

Отже, шуканий розв'язок розглядуваної задачі (35)–(37) визначається співвідношеннями (38), причому функції $w_k(t), \upsilon_k(t)$ $(k \in N)$ визначаються згідно з (48)–(50). Щодо умов збіжності ряду в співвідношенні (38) зазначимо таке.

Нехай $h_0(x) \in C^4[0,1]$ та виконуються додаткові умови: $h_0^{(i)}(0) = 0$ $(i = 0, 2)$, $h_0^{(j)}(0) = h_0^{(j)}(1)$ $(j = \overline{1,3})$. Тоді інтегруванням частинами в рівностях (41) можна показати справедливість співвідношень $\varphi_k^{(1)}, \varphi_k^{(2)} = O\left(\dfrac{1}{k^4}\right)$ $(k \to \infty)$.

Враховуючи це, зі співвідношення (48) маємо оцінку

$$|w_k(t)| \le \frac{M_1}{k^4} \qquad (M_1 > 0,\ k \in N). \tag{51}$$

Також на основі (49), (50) з урахуванням співвідношення (22) та результатів із [23] одержуємо

$$|\upsilon_k(t)| \le \frac{M_2}{k^4} + \frac{M_3}{k^3} \qquad (M_2, M_3 > 0, k \in N). \tag{52}$$

З наведених оцінок (51), (52) випливає, що мажорантним для ряду в правій частині співвідношення (38) є збіжний узагальнений гармонічний ряд. Тому згідно з мажорантною ознакою Вейєрштраса ряд (38) є рівномірно збіжним для $(x, t) \in \overline{\Omega}_T$ і його сума на цій множині є неперервною функцією. Таким чином, функція $u(x, t)$ визначена співвідношеннями (38), (48)–(50) дає регулярний розв'язок задачі (35)–(37).

ОКРЕМИЙ ВИПАДОК ДРОБОВО-ДИФЕРЕНЦІЙНОЇ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ МОДЕЛІ: МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ ДИНАМІКИ НА ЗІРКОПОДІБНОМУ ГРАФІ

Як зазначалось, модельна система рівнянь аномальної фільтраційної динаміки в тріщинувато-пористому середовищі за наявності достатньо слабкопроникних пористих блоків має вигляд (5), (6). В окремому випадку $\alpha = \beta$ ця система набуває вигляду

$$\omega_1 D_t^{(\alpha)} p(x,t) - \frac{u - p}{\tau_r} = \kappa \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2}, \tag{53}$$

$$D_t^{(\alpha)} u(x,t) + \frac{u - p}{\tau_r} = 0, \tag{54}$$

де $p(x,t), u(x,t)$ — функції тиску в системах тріщин і пористих блоках відповідно.

Виключаючи з системи (53), (54) функцію $p(x,t)$, одержуємо відносно невідомої функції тиску в пористих блоках $u(x,t)$ модельне рівняння вигляду

$$\omega_1 \tau_r D_t^{(\alpha)} D_t^{(\alpha)} u + (1 + \omega_1) D_t^{(\alpha)} u = \kappa (1 + \tau_r D_t^{(\alpha)}) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{55}$$

Розглянемо для математичної фільтраційної моделі, що базується на рівнянні (55), задачу фільтраційної динаміки на зіркоподібному графі, який утворений з'єднанням трьох скінченних відрізків (які називаються ребрами) в одній точці O (вершині графу). Співставляючи ребрам графу інтервали $(0, l_k)$ $(k = \overline{1,3})$, визначаємо поняття координат на кожному з ребер [31, 32]:

$G_k = \{x_k : 0 < x_k < l_k\}$ $(k = \overline{1,3})$. При цьому на кожному ребрі вершина графу O має координату 0.

Постановка відповідної крайової задачі математичного моделювання динаміки аномального фільтраційного процесу (для розглядуваної математичної моделі) зводиться до відшукання в $G_k \times (0, T)$ регулярних розв'язків дробово-диференційних рівнянь

$$\mathrm{F}u_k(x,t) = \kappa\,(1 + \tau_r D_t^{(\alpha)})\,\frac{\partial^2 u_k(x,t)}{\partial x^2} \qquad (k = \overline{1,3}) \tag{56}$$

$$(\text{тут } \mathrm{F} := \omega_1 \tau_r D_t^{(\alpha)} D_t^{(\alpha)} + (1 + \omega_1)\, D_t^{(\alpha)} \quad (0 < \alpha \le 1)), \tag{57}$$

які задовольняють початкові, граничні умови та умови склеювання:

$$u_k(x,0) = \varphi_k(x), \quad D_t^{(\alpha)} u_k(x,t)|_{t=0} = 0 \qquad (x \in G_k,\ k = \overline{1,3}), \tag{58}$$

$$u_1(0,t) = u_2(0,t) = u_3(0,t) \qquad (t \in [0,T]), \tag{59}$$

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_k(0,t)}{\partial x} = 0 \qquad (t \in [0,T]), \tag{60}$$

$$u_k(l_k, t) = 0 \qquad (t \in [0,T],\ k = 1,3). \tag{61}$$

Нехай $\varphi_k(x)$ $(k = \overline{1,3})$ — задані функції, для яких виконуються умови:

$$\varphi_k(x) \in C^4[0, l_k], \ \ \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_3(0),$$

$$\frac{d\varphi_1(0)}{dx} + \frac{d\varphi_2(0)}{dx} + \frac{d\varphi_3(0)}{dx} = 0. \tag{62}$$

З урахуванням зазначених умов та з використанням методу Фур'є розкладу за власними функціями шукатимемо розв'язки задач (56)–(61) у вигляді

$$u_k(x,t) = T(t)\,\psi_k(x) \quad (k = 1,3).$$

Далі відокремлюючи змінні, одержуємо

$$\psi_k''(x) + \lambda^2 \psi_k(x) = 0 \qquad (k = \overline{1,3}), \tag{63}$$

$$\mathrm{F}T(t) + \kappa\lambda^2 (1 + \tau_r D_t^{(\alpha)})\,T(t) = 0, \tag{64}$$

де $\lambda = \text{const}$, $\lambda \in R \setminus \{0\}$, а оператор F визначається співвідношенням (57).

Як показано в [31], у випадку $l_1 = l_2 = l_3 = l$ власні значення для розглядуваної задачі мають вигляд $\lambda_{n,1} = \lambda_{n,2} = \dfrac{n\pi}{l}$, $\lambda_{n,3} = \dfrac{(2n-1)\pi}{2l}$ $(n \in N)$. На основі (63) їм відповідають власні функції [31]:

$$\psi_{n,1}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{l}} \sin(\lambda_{n,1} x) \quad (n \in N), \quad \psi_{n,2}(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3l}} \sin(\lambda_{n,2} x) \quad (n \in N),$$

$$\psi_{n,3}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6l}} \cos(\lambda_{n,3} x) \quad (n \in N). \tag{65}$$

Зазначимо, що безпосередньою перевіркою можна впевнитись, що розв'язок задачі

$$\mathrm{F}T_n(t) + \kappa\lambda_n^2 (1+\tau_r D_t^{(\alpha)}) T_n(t) = 0 \qquad (n \in N),$$

$$T_n(0) = \varphi_n, \quad D_t^{(\alpha)} T_n(t)|_{t=0} = 0 \qquad (n \in N)$$

визначається такими співвідношеннями:

$$T_n(t) = \frac{\varphi_n}{2\sqrt{\Delta_n}} [(a_n + \sqrt{\Delta_n}) E_\alpha(\rho_n^{(1)} t^\alpha) - (a_n - \sqrt{\Delta_n}) E_\alpha(\rho_n^{(2)} t^\alpha)],$$

$$a_n = 1 + \omega_1 + \kappa\tau_r\lambda_n^2, \quad \Delta_n = a_n^2 - 4\omega_1\kappa\tau_r\lambda_n^2 > 0,$$

$$\rho_n^{(1)} = \frac{1}{2\omega_1\tau_r}(-a_n + \sqrt{\Delta_n}), \qquad \rho_n^{(2)} = -\frac{1}{2\omega_1\tau_r}(a_n + \sqrt{\Delta_n}),$$

де $E_\alpha(\cdot)$ — однопараметрична функція Міттаг-Леффлера [7, 8].

З урахуванням зазначеного факту маємо, що розв'язки (64) представляються у формі

$$T_n^{(i)}(t) = C_n^{(i)} Q_{n,i}(t) \ (i = \overline{1,3}, \ n \in N),$$

де

$$Q_{n,i}(t) = \frac{1}{2\sqrt{\Delta_{n,i}}} [(a_{n,i} + \sqrt{\Delta_{n,i}}) E_\alpha(\bar{\rho}_{n,i} t^\alpha) - (a_{n,i} - \sqrt{\Delta_{n,i}}) E_\alpha(\bar{\bar{\rho}}_{n,i} t^\alpha)],$$

$$a_{n,i} = 1 + \omega_1 + \kappa\tau_r\lambda_{n,i}^2, \qquad \Delta_{n,i} = a_{n,i}^2 - 4\omega_1\kappa\tau_r\lambda_{n,i}^2, \tag{66}$$

$$\bar{\rho}_{n,i} = \frac{1}{2\omega_1\tau_r}(-a_{n,i} + \sqrt{\Delta_{n,i}}), \qquad \bar{\bar{\rho}}_{n,i} = -\frac{1}{2\omega_1\tau_r}(a_{n,i} + \sqrt{\Delta_{n,i}}),$$

$$C_n^{(i)} = \mathrm{const} \ (i = \overline{1,3}, \ n \in N).$$

Таким чином, розв'язок розглядуваної задачі записується у вигляді ряду Фур'є:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n^{(1)} Q_{n,1}(t) \psi_{n,1}(x) + C_n^{(2)} Q_{n,2}(t) \psi_{n,2}(x) + $$

$$+ C_n^{(3)} Q_{n,3}(t) \psi_{n,3}(x)), \tag{67}$$

де $C_n^{(1)}, C_n^{(2)}, C_n^{(3)}$ — коефіцієнти Фур'є, $\psi_{n,i}(x), Q_{n,i}(t) \ (i = \overline{1,3})$ визначаються згідно з (65), (66), $u = (u_1, u_2, u_3)^T$.

Визначаючи коефіцієнти $C_n^{(1)}, C_n^{(2)}, C_n^{(3)}$, з урахуванням початкових умов $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x))^T = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n^{(1)} \psi_{n,1}(x) + C_n^{(2)} \psi_{n,2}(x) + C_n^{(3)} \psi_{n,3}(x))$

одержуємо співвідношення [31]:

$$C_n^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{l}} \int_0^l (\varphi_1(x) - \varphi_3(x)) \sin(\lambda_{n,1} x)\, dx,$$

$$C_n^{(2)} = \frac{1}{3\sqrt{l}} \int_0^l (-\varphi_1(x) + 2\varphi_2(x) - \varphi_3(x)) \sin(\lambda_{n,2} x)\, dx, \tag{68}$$

$$C_n^{(3)} = \frac{2}{\sqrt{6l}} \int_0^l (\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x)) \cos(\lambda_{n,3} x)\, dx.$$

Покажемо, що функція $u(x,t)$, визначена згідно з (67), (66), (65), (68), є регулярним розв'язком розглядуваної задачі.

Спочатку доведемо, що $u(x,t)\in C(\overline{G}_k\times[0,T])$ $(k=\overline{1,3})$. При цьому зауважимо, що за наявності накладених співвідношеннями (62) обмежень на функції $\varphi_k(x)$ $(k=\overline{1,3})$ мають місце оцінки [31]

$$|C_n^{(i)}|\le\frac{M_i}{n^3}\quad(M_i=\text{const}>0,\ i=\overline{1,3}).$$

На підставі цих оцінок з урахуванням співвідношення (67) та відомої оцінки для однопараметричної функції Міттаг-Леффлера [7, 8]

$$|E_\alpha(z)|\le\frac{M}{|z|}(\arg(z)=\pi,\ M=\text{const}>0)$$

одержуємо

$$|C_n^{(1)}Q_{n,1}(t)\psi_{n,1}(x)+C_n^{(2)}Q_{n,2}(t)\psi_{n,2}(x)+$$
$$+C_n^{(3)}Q_{n,3}(t)\psi_{n,3}(x)|\le\frac{C^*}{n^4}\quad(C^*=\text{const}>0).$$

Звідси випливає, що мажорантним для ряду (67) є узагальнений гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$. Тоді за ознакою Вейєштраса ряд (67) є рівномірно збіжним і $u(x,t)\in C(\overline{G}_k\times[0,T])$ $(k=\overline{1,3})$. Аналогічно, оскільки

$$u_{xx}=-\sum_{n=1}^{\infty}(C_n^{(1)}\lambda_{n,1}^2Q_{n,1}(t)\psi_{n,1}(x)+C_n^{(2)}\lambda_{n,2}^2Q_{n,2}(t)\psi_{n,2}(x)+$$
$$+C_n^{(3)}\lambda_{n,3}^2Q_{n,3}(t)\psi_{n,3}(x)),\tag{69}$$

враховуючи оцінку

$$|\lambda_{n,i}^2C_n^{(i)}|\le\frac{\widetilde{M}_i}{n}\ (\widetilde{M}_i=\text{const}>0,\ i=\overline{1,3}),$$

одержуємо

$$|\sum_{i=1}^{3}C_n^{(i)}\lambda_{n,i}^2Q_{n,i}(t)\psi_{n,i}(x)|\le\frac{M_i^*}{n^2}\quad(M_i^*=\text{const}>0,\ i=\overline{1,3}).$$

Отже, мажорантним для ряду (69) є збіжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Тому згідно з ознакою Вейєрштраса ряд (69) є рівномірно збіжним, тобто $u_{xx}(x,t)\in C(\overline{G}_k\times[0,T])$ $(k=\overline{1,3})$. (Аналогично доводиться справедливість інших співвідношень, зокрема, $D_t^{(\alpha)}u,D_t^{(\alpha)}D_t^{(\alpha)}u\in C(\overline{G}_k\times[0,T])$.)

Стисло розглянемо питання про єдиність одержаного розв'язку. Припускаючи протилежне, що $\overline{u}_k,\overline{\overline{u}}_k$ — два розв'язки задачі (56)–(61), маємо для функцій $v_k=\overline{u}_k-\overline{\overline{u}}_k$ $(k=\overline{1,3})$ задачі вигляду (56)–(61), де попередньо слід покласти $\varphi_k(x)\equiv0$ $(k=\overline{1,3})$. На основі (65)–(68) маємо $v_k(x,t)\equiv0$ $(k=\overline{1,3})$. Звідси доходимо висновку щодо єдиності одержаного розв'язку.

ВИСНОВКИ

У роботі виконано постановки та одержано замкнені розв'язки деяких крайових задач дробово-диференційної геофільтраційної динаміки в тріщинувато-пористому середовищі для моделі зі слабкопроникними пористими блоками. Зокрема, розглянуто пряму і обернену крайові задачі фільтрації для шару скінченної потужності, наведено умови існування регулярних розв'язків розглянутих задач, одержано розв'язки задачі фільтраційної динаміки з нелокальними граничними умовами Самарського–Іонкіна, а для окремого випадку фільтраційної моделі — задачі моделювання аномальної динаміки фільтраційних полів тисків на зіркоподібному графі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ляшко И.И., Демченко Л.И., Мистецкий Г.Е. Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах. Киев: Наук. думка, 1991. 264 с.
2. Nikolaevsky V.N. Mechanics of porous and fractured media. Singapore: World scientific, 1990. 472 p.
3. Basniev K.S., Dmitriev N.M., Chilingar G.V. Mechanics of fluid flow. John Wiley & Sons, 2012. 576 p.
4. Хасанов М.М., Булгакова Г.Т. Нелинейные и неравновесные эффекты в реологически сложных средах. Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 288 с.
5. Uchaikin V.V. Fractional derivatives for phusicists and engineers. Berlin: Springer Verlag, 2013. Vol. 1. 385 p.
6. Sandev T.,Tomovsky Z. Fractional equations and models. Theory and applications. Cham, Switzerland: Springer Nature Switzerland AG, 2019. 344 p.
7. Podlubny I. Fractional differential equations. New York: Academic Press, 1999. 341 p.
8. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 p.
9. Allwright A., Atangana A. Fractal advection-dispersion equation for groundwater transport in fractured aquifers with self-similarities. *The European Physical Journal Plus*. 2018. Vol. 133 (2). P. 1–14.
10. Su N. Mass-time and space-time fractional partial differential equations of water movement in soils: theoretical framework and application to infiltration. *Journal of Hydrology*. 2014. Vol. 519. P. 1792–1803.
11. Chechkin A.V., Gorenflo R., Sokolov I.M., Gonchar V.Y. Distributed order time fractional diffusion equation. *Fract. Calc. Appl. Anal.* 2003. N 6. P. 259–257.
12. Bogaenko V., Bulavatsky V. Fractional-fractal modeling of filtration-consolidation processes in saline saturated soils. *Fractal and fractional*. 2020. 4(4): 59. P. 2–12. https//doi.org/10.3390/fractalfract4040059.
13. Bulavatsky V.M. Mathematical modeling of fractional differential filtration dynamics based on models with Hilfer-Prabhakar derivative. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. Vol. 53, N 2. P. 204–216. https://doi.org/10.1007/s10559-017-9920-z.
14. Bulavatsky V.M., Bogaenko V.A. Mathematical modeling of dynamics of the nonequilibrium in time convective diffusion process in domain with free boundaries. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. Vol. 52, N 3. P. 427–440. https://doi.org/10.1007/s10559-016-9875-5.
15. Bulavatsky V.M. Solutions of some problems of fractional-differential filtration dynamics based on models with ABC-fractional derivative. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. Vol. 53, N 5. P. 732–742. https://doi.org/10.1007/s10559-017-9975-x.
16. Bulavatsky V.M., Bohaienko V.O. Some boundary-value problems of fractional-differential mobile-immobile migration dynamics in a profile filtration flow. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2020. Vol. 56, N 3. P. 410–425. https://doi.org/10.1007/s10559-020-00257-2.
17. Bulavatsky V.M., Bohaienko V.O. Boundary-value problems for space-time fractional differential filtration dynamics in fractured-porous media. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2022. Vol. 58, N 3. P. 358–371. https://doi.org/10.1007/s10559-022-00468-9.
18. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П. Об основных уравнениях фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. *Доклады АН СССР*. 1960. Т. 132, вып. 3. С. 545–548.
19. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. *Прикл. матем. и мех*. 1960. Т. 24, вып. 3. С. 852–864.
20. Баренблатт Г.И., Ентов В.Н., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. Москва: Недра, 1984. 303 с.

21. Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т., Зотов Г.А. Механика насыщенных пористых сред. Москва: Недра, 1970. 339 с.
22. Sneddon I. The use of integral transform. New York: Mc. Graw-Hill Book Comp., 1973. 539 p.
23. Malik S.A., Ilyas A., Samreen A. Simultaneous determination of a source term and diffusion concentration for a multi-term space-time fractional diffusion equation. *Mathematical modelling and analysis*. 2021. Vol. 26, Iss. 3. P. 411–431.
24. Luchko Y., Gorenflo R. An operational method for solving fractional differential equations with the Caputo derivatives. *Acta mathematica Vietnamica*. 1999. N 2. P. 207–233.
25. Gorenflo R., Kilbas A.A., Mainardi F., Rogosin S.V. Mittag-Leffler functions, related topics and applications. Berlin: Springer Verlag, 2014. 454 p.
26. Li Z., Lin Y., Yamamoto M. Initial-boundary value problems for multi-term time-fractional diffusion equations with positive constant coefficients. *Applied mathematics and computation*. 2015. Vol. 257. P. 381–397.
27. Salakhitdinov M.S., Karimov E.T. Direct and inverse source problems for two-term time-fractional difusion equation with Hilfer derivative. *Uzbek Math. J.* 2017. N 4. P. 140–149. https://arXiv:1711.00352.
28. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием. *Дифференциальные уравнения*. 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304.
29. Ионкин Н.И., Моисеев Е.И. О задаче для уравнения теплопроводности с двуточечными краевыми условиями. *Дифференциальные уравнения*. 1979. Т. 15, № 7. С. 1284–1295.
30. Моисеев Е.И. О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи. *Дифференциальные уравнения*.1999. Т. 35, № 8. С. 1094–1100.
31. Abdullaev O.Kh., Khujakulov J.R. On a problem for the time-fractional diffusion equation on a metric graphs. *Uzbek Math. J*. 2017. N 4. P. 3–12.
32. Karimov E.T., Sobirov Z.A, Khujakulov J.R. Solvability of a problem for a time-fractional differential equation with the Hilfer operator on metric graphs. *Bull. Inst. Math.* 2021. Vol. 4, N 4. P. 9–18.

V.M. Bulavatsky

SOME BOUNDARY-VALUE PROBLEMS CORRESPONDING TO THE MODEL OF FRACTIONAL-DIFFERENTIAL FILTRATION DYNAMICS IN A FRACTURED-POROUS MEDIUM UNDER TIME NON-LOCALITY

Abstract. Closed-form solutions of some boundary-value problems of fractional-differential geofiltration dynamics in a fractured-porous medium are obtained for a model with weakly permeable porous blocks. In particular, the direct and inverse boundary-value problems of filtration for the finite thickness layer are solved, the conditions for the existence of their regular solutions are given, and the solution of the problem of filtration dynamics with nonlocal boundary conditions is found. For a particular case of the filtration model, the problem of modeling the anomalous dynamics of filtration pressure fields on a star-shaped graph is considered.

Keywords: mathematical modeling, fractional-differential dynamics of filtration processes, fractured-porous medium, non-classical models, boundary-value problems, inverse problems, problems with non-local conditions, closed-form solutions.

Надійшла до редакції 16.10.2023