

ВНЕШНИЕ ЭЛЛИпсоИДАЛЬНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Н.А. Бабий, В.В. Волосов, В.Н. Шевченко

Институт космических исследований НАН Украины и ГКА Украины

Рассмотрен класс дискретных и непрерывных динамических систем (ДС) с ограниченным возмущением. С использованием техники выпуклого анализа найдены уравнения эволюции эллипсоидов, содержащих множество достижимости ДС. Методом функций Ляпунова получена оценка предельного множества ДС. Для системы управления угловым движением твердого тела проведено сопоставление эллипсоидальных оценок предельного множества и асимптотики множества достижимости.

Ключевые слова: динамическая система, неопределенность, эллипсоидальные оценки, множество достижимости, предельное множество.

Розглянуто клас дискретних і неперервних динамічних систем (ДС) з обмеженим зовнішнім збуренням. З використанням техніки опуклого аналізу отримано рівняння еволюції еліпсоїдів, які містять множини досяжності ДС. Методом функцій Ляпунова отримано оцінку граничної множини ДС. Для системи керування кутовим рухом твердого тіла проведено співставлення еліпсоїдальних оцінок граничної множини й асимптотики множини досяжності.

Ключові слова: динамічна система, невизначеність, еліпсоїдальні оцінки, множина досяжності, гранична множина.

ВВЕДЕНИЕ

Под множеством достижимости (МД) динамической системы (ДС) в произвольный момент времени (непрерывного или дискретного) здесь понимается множество фазового пространства, в которое могут попасть в данный момент концы ее траекторий, «стартовых» из некоторого заданного начального множества при всех возможных значениях ограниченных внешних возмущений. Множества достижимости являются важной характеристикой динамических систем и используются при решении многих задач управления ими [1]. Однако они имеют достаточно сложную структуру даже для линейных систем. Поэтому используются их оценки множествами более простой структуры, а именно выпуклыми многогранниками и эллипсоидами. Важность проблемы разработки и усовершенствования алгоритмов построения оценок множеств достижимости для решения теоретических и прикладных задач, включая задачи управления аэрокосмическими и морскими объектами, подтверждается обширным и все пополняющимся списком публикаций (см., например, [2–6] и библиографию в них). В данной работе с помощью единого методологического подхода, основанного на формализованных методах выпуклого анализа, приводятся новые конструктивные алгоритмы эллипсоидального оценивания множеств достижимости линейных дискретных и непрерывных динамических систем.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим дискретную ДС вида

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + f_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

где вектор состояния $x_k \in R^n$, R^n — n -мерное евклидово пространство; u_k — заданный при всех $k \geq 0$ вектор управления $u_k \in R^m$, $m \leq n$; A_k и B_k заданные при всех k матрицы соответствующих размерностей, $\det A_k \neq 0$ и $f_k \in R^n$ — неконтролируемое ограниченное возмущение

$$f_k^T G f_k \leq q^2 \quad \forall k, \quad (2)$$

где G — положительно определенная симметричная $n \times n$ -матрица, $G = G^T > 0$ q — заданная константа.

Для формулирования постановки задачи введем в рассмотрение эллипсоид вида

$$E_k = E[\bar{x}_k, H_k] = \{x \in R^n : \sigma(\bar{x}_k, H_k) \leq 1\}, \quad (3)$$

где $\sigma(x, \bar{x}_k, H_k) = (x - \bar{x}_k)^T H_k^{-1} (x - \bar{x}_k)$, \bar{x}_k — центр эллипсоида, H_k — положительно определенная $n \times n$ -матрица $H_k = H_k^T > 0$.

Предполагается, что при некотором произвольном значении $k = k_*$ задан эллипсоид $E[\bar{x}_k, H_k]$, т.е. заданы его центр \bar{x}_k и матрица H_k . При этом задача эллипсоидального оценивания множеств достижимости ДС (1) представляет собой задачу построения эллипсоида $E[\bar{x}_{k+1}, H_{k+1}]$ вида (3), который при всех $k \geq k_*$ в силу (1) содержит образ $W(k+1)$ эллипсоида $E[\bar{x}_k, H_k]$ для любого возмущения f_k , которое удовлетворяет условию (2). Другими словами, нужно при каждом $k \geq k_*$ найти эллипсоид $E[\bar{x}_{k+1}, H_{k+1}]$, такой, что при всех $x_k \in E[\bar{x}_k, H_k]$ и при любом возмущении f_k , которое удовлетворяет ограничению (2), выполняется включение $x_{k+1} \in E[\bar{x}_{k+1}, H_{k+1}]$.

Аналогичным образом ставится задача определения эллипсоидальных оценок множеств достижимости для непрерывных систем

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u(t) + f(t), \quad (4)$$

где x — вектор состояния $x \in R^n$; $u(t)$ — заданный в каждый момент времени t вектор управления $u(t) \in R^m$, $m \leq n$; $A(t)$ и $B(t)$ — заданные матрицы соответствующих размерностей; неконтролируемое возмущение $f(t)$ удовлетворяет условию

$$f^T(t)Gf(t) \leq q^2 \quad \forall t \geq 0. \quad (5)$$

Предполагается, что векторные и матричные функции $u(t)$, $A(t)$, $B(t)$ и $f(t)$ являются непрерывными (кусочно-непрерывными) функциями времени.

По аналогии со случаем дискретной системы введем в рассмотрение эллипсоид

$$E(t) = E[\hat{x}(t), \dots, H(t)] = \{x \in R^n : \sigma[\hat{x}(t), H(t)] \leq 1\}, \quad (6)$$

где $\sigma[\hat{x}(t), H(t)] = [x - \hat{x}(t)]^T H^{-1}(t)[x - \hat{x}(t)]$. Полагаем известным в некоторый момент времени $t = t_*$ (который без потери общности принимаем $t_* = 0$) априорный эллипсоид $E(t_*) = E[\hat{x}(t_*), H(t_*)]$. Тогда ставится задача построения эллипсоидов $E[\hat{x}(t), H(t)]$, таких, что $x(t) \in E(t)$ при всех $t > t_*$ и $x(t_*) \in E(t_*)$ и возмущениях $f(t)$, удовлетворяющих ограничению (5).

Целью данной работы является получение новых конструктивных алгоритмов эллипсоидального оценивания множеств достижимости линейных дискретных и непрерывных динамических систем с использованием единого методологического подхода, основанного на формализованных методах выпуклого анализа.

МНОЖЕСТВО ДОСТИЖИМОСТИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Утверждение 1. Оценка сверху множества достижимости системы (1), (2) при $k > 0$ эллипсоидами $E[\hat{x}_k, H_k]$ вида (3) определяется разностными уравнениями

$$\hat{x}_{k+1} = A_k \hat{x}_k + B_k u_k, \quad (7)$$

$$H_{k+1} = (1 + p)A_k H_k A_k^T + p^{-1}(1 + p)q^2 G^{-1} \quad (8)$$

при любом значении параметра $p > 0$ и заданном начальном эллипсоиде $E[\hat{x}_0, H_0]$.

Доказательство. Для доказательства утверждения 1 воспользуемся аппаратом опорных функций выпуклых множеств [7]. Эллипсоид $E[\hat{x}_k, H_k]$, кроме соотношения (3), также может задаваться своей опорной функцией $\delta\{l|E[\hat{x}_k, H_k]\}$. При использовании опорной функции эллипсоид $E[\hat{x}_k, H_k]$ определяется соотношением

$$l^T x \leq \delta\{l|E[\hat{x}_k, H_k]\} \quad \forall l \in R^n, \quad (9)$$

где, согласно [1], опорная функция эллипсоида $E[\hat{x}_k, H_k]$ определяется соотношением $\delta\{l|E[\hat{x}_k, H_k]\} = \max_{x \in E_k} l^T x$ и имеет вид

$$\delta\{l|E[\hat{x}_k, H_k]\} = l^T \hat{x}_k + \sqrt{l^T H_k l}. \quad (10)$$

Для опорной функции $\delta\{l|W_{k+1}\}$ образа W_{k+1} эллипсоида $E[\hat{x}_k, H_k]$ при его отображении соотношением (1) имеем оценку сверху

$$\delta\{l|W_{k+1}\} = \max_{\substack{x \in E_K \\ f \in F_k}} l^T [A_k x + B_k u_k + f] \leq \max_{x \in E_K} l^T A_k x + l^T B_k u_k + \max_{f \in F_K} l^T f, \quad (11)$$

где $F_k = \{f : f^T \bar{H}^{-1} f - 1 \leq 0, \bar{H} = q^2 G^{-1}\}$. Функция Лагранжа, соответствующая задаче отыскания максимума первого слагаемого в неравенстве (11), имеет вид

$$L(x, \lambda) = l^T A_k x - 0,5\lambda[\sigma(x, \hat{x}_k, H_k) - 1], \quad (12)$$

где $\lambda \geq 0$ [8]. Согласно теореме двойственности решения задач математического программирования [8] имеем

$$\max_{x \in E_K} l^T A_k x = \min_{\lambda} \varphi(\lambda), \quad (13)$$

где функция максимума $\varphi(\lambda)$ — выпуклая функция $\varphi(\lambda) = \max_{x \in R^n} L(x, \lambda)$ [8].

Другими словами, $\max_{x \in E_K} l^T A_k x = \min_{\lambda} \max_{x \in R^n} L(x, \lambda)$ при $\lambda \geq 0$. При этом из

(11) следует, что

$$\delta\{l|W_{k+1}\} \leq \varphi(\lambda) + l^T B_k u_k + \sqrt{l^T \bar{H} l}, \quad \bar{H} = q^2 G^{-1} \quad \forall \lambda \geq 0. \quad (14)$$

Найдем явный вид функции максимума $\varphi(\lambda)$. Приравнявая производную по x функции $L(x, \lambda)$ нулю, получим выражение $x_e = \hat{x}_k + \lambda^{-1} H_k A_k^T l$, в результате подстановки которого в (12) при $\lambda = \sqrt{l^T A_k H_k A_k^T l}$ из (14) находим

$$\delta\{l|W_{k+1}\} \leq l^T \tilde{x}_{k+1} + \sqrt{l^T \tilde{H}_{k+1} l} + \sqrt{l^T \bar{H} l}, \quad (15)$$

где $\tilde{x}_{k+1} = A_k \hat{x}_k + B_k u_k$, $\tilde{H}_{k+1} = A_k H_k A_k^T$. Из свойств опорных функций [1, 9] и формулы (10) вытекает, что правая часть (15) есть опорная функция множества, которое является суммой Минковского [9] двух эллипсоидов вида (3) $E[\tilde{x}_{k+1}, \tilde{H}_{k+1}]$ и $E[0, \bar{H}]$. Однако множество-сумма Минковского двух эллипсоидов не является эллипсоидом. Согласно [10], указанное множество содержится в эллипсоиде $E[\hat{x}_{k+1}, H_{k+1}]$, центр и матрица которого определяются уравнениями (7), (8). Утверждение 1 доказано.

Функция $SpH_{k+1}(p)$, определяемая формулой (8), является выпуклой и достигает минимума при $p_e = \sqrt{(SpA_k H_k A_k^T)^{-1} SpG^{-1}}$. Подставив значение p_e в формулу (8), получаем следующее утверждение.

Утверждение 2. Оценка сверху множества достижимости ДС (1), (2) при $k > 0$ эллипсоидами $E[\hat{x}_k, H_k]$ вида (3) с локально оптимальными матрицами H_k определяется решениями разностных уравнений

$$\hat{x}_{k+1} = A_k \hat{x}_k + B_k u_k, \quad (16)$$

$$H_{k+1} = \left[1 + q \sqrt{\frac{SpG^{-1}}{SpA_k H_k A_k^T}} \right] A_k H_k A_k^T + q \left[q + \sqrt{\frac{SpA_k H_k A_k^T}{SpG^{-1}}} \right] G^{-1} \quad (17)$$

при заданном начальном эллипсоиде $E[\hat{x}_0, H_0]$.

МНОЖЕСТВО ДОСТИЖИМОСТИ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ

Утверждение 3. Для оценки сверху множества достижимости ДС (4, 5) эллипсоидами $E[\hat{x}(t), H(t)]$ вида (6) с локально минимальным следом матрицы $H(t)$ необходимо решить задачу Коши для дифференциальных уравнений

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A(t)\hat{x} + B(t)u(t), \quad (18)$$

$$\frac{dH}{dt} = A(t)H + HA^T(t) + q \left[\sqrt{\frac{SpG^{-1}}{SpH}} H + \sqrt{\frac{SpH}{SpG^{-1}}} G^{-1} \right] \quad (19)$$

при заданном начальном эллипсоиде $E[\hat{x}(t_0), H(t_0)]$. При гурвицевой матрице $A(t) \equiv A$ и $u(t) \equiv 0$ эллипсоид $E[0, H_\infty]$ определяет гарантированную оценку установившейся точности системы.

Доказательство. Согласно явной схеме Эйлера численного интегрирования дифференциальных уравнений [11], для достаточно малых $\tau > 0$ имеем

$$x(t + \tau) = \tilde{A}(t, \tau)x(t) + \tau B(t)u(t) + \tau[f(t) + f_0(t, \tau)], \quad (20)$$

где $\tilde{A}(t, \tau) = I_n + \tau A(t)$, $\|f_0(t, \tau)\| \leq \mu(\tau)$, $\mu(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$. Для объединения по всем $x(t) \in E[\hat{x}(t), H(t)]$ и $f^T(t)Gf(t) \leq q^2 \forall t \geq 0$ формула (20) определяет образ $\tilde{W}(t + \tau)$ эллипсоида $E[\hat{x}(t), H(t)]$. Найдем оценку сверху для выпуклой оболочки $W(t + \tau)$ этого образа. По определению опорной функции [7] $\delta[l|W(t + \tau)]$ выпуклого множества имеем

$$\delta[l|W(t + \tau)] \leq S_1(x, t, \tau) + S_2(x, t, \tau), \quad (21)$$

где $S_1(x, t, \tau) = \max_{x \in E(t)} l^T \tilde{A}x + \tau l^T B(t)u(t)$, $S_2(x, t, \tau) = \tau \max_{f \in \tilde{E}(t)} l^T f + \tau \max_{\|f_0\| \leq \mu(\tau)} l^T f_0$,

$\tilde{E}(t) = E[0, \tilde{G}] = \{x : f^T \tilde{G}^{-1} f \leq 1\}$, $\tilde{G} = q^2 G^{-1}$. Воспользовавшись методом

неопределенных множителей Лагранжа и формулой [1, 12] для опорной функции эллипсоида вида (6), находим

$$S_1(x, t, \tau) \leq \delta\{l \mid E[\tilde{x}_1(t + \tau), \tilde{H}_1(t + \tau)]\}, \quad (22)$$

где

$$\delta\{l \mid E[\tilde{x}_1(t + \tau), \tilde{H}_1(t + \tau)]\} = l^T \tilde{x}_1(t + \tau) + \sqrt{l^T \tilde{H}_1(t + \tau) l}, \quad (23)$$

$$\tilde{x}_1(t + \tau) = \tilde{A}(t, \tau)\hat{x}(t) + \tau B(t)u(t), \quad \tilde{H}_1(t + \tau) = \tilde{A}(t, \tau)H(t)\tilde{A}^T(t, \tau).$$

Для оценки $S_2(x, t, \tau)$ аналогичным образом получаем

$$S_2(x, t, \tau) \leq \delta\{l \mid E[\tilde{x}_2(t + \tau), \tilde{H}_2(t + \tau)]\}, \tilde{x}_2(t + \tau) = 0, \quad (24)$$

$$\text{где} \quad \delta\{l \mid E[0, \tilde{H}_2(t + \tau)]\} = \sqrt{l^T \tilde{H}_2(t + \tau) l}, \quad \tilde{H}_2(t + \tau) = \tau^2 \alpha^2(\tau) q^2 G^{-1},$$

$$\alpha(\tau) = 1 + \mu(\tau)(e^T \tilde{G}^{-1} e)^{-9,5} \quad \forall e \in R^n, \|e\| = 1, \quad \alpha(\tau) \rightarrow 1 \text{ при } \tau \rightarrow 0.$$

Из соотношения (21) с учетом (20)–(24) получаем

$$\delta\{l \mid W(t + \tau)\} \leq \delta\{l \mid E[\tilde{x}_1(t + \tau), \tilde{H}_1(t + \tau)]\} + \delta\{l \mid E[0, \tilde{H}_2(t + \tau)]\}. \quad (25)$$

В правой части неравенства (25) имеется сумма опорных функций двух множеств-эллипсоидов вида (6). Как известно [9], сумме опорных функций двух множеств соответствует сумма Минковского этих множеств, в данном случае эллипсоидов. Напомним, что сумма Минковского двух множеств-эллипсоидов не является эллипсоидом. Она содержится в p -параметрическом семействе эллипсоидов $E[\hat{x}(t + \tau), H(t + \tau)]$ [10], где

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}(t + \tau) &= \tilde{x}_1(t + \tau), \\ H(t + \tau) &= (1 + p)\tilde{H}_1(t + \tau) + p^{-1}(1 + p)\tilde{H}_2(t + \tau) \quad \forall p > 0 \end{aligned} \right\}. \quad (26)$$

Полагая в (26) $p = \gamma\tau, \gamma > 0$ и подставляя приведенные выше значения $\tilde{x}_1(t + \tau), \tilde{H}_1(t + \tau)$, получаем

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}(t + \tau) &= \hat{x}(t) + \tau[A(t)\hat{x} + B(t)u(t)] + \tau\psi(\gamma, \tau), \\ H(t + \tau) &= H(t) + \tau[A(t)H + HA^T(t)] + \tau\gamma H + \frac{\tau}{\gamma} q^2 G^{-1} + \tau\Psi(\gamma, \tau) \quad \forall \gamma > 0 \end{aligned} \right\}, \quad (27)$$

где $\|\psi(\gamma, \tau)\| \rightarrow 0, \|\Psi(\gamma, \tau)\| \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$. Функция следа матрицы $H(t + \tau)$, определяемая правой частью формулы в (27) с учетом слагаемых первого порядка малости относительно τ (линейных по τ), $\varphi(\gamma) = SpH(t + \tau)$

является выпуклой и имеет минимум при $\gamma = \gamma_* = q \sqrt{\frac{SpG^{-1}}{SpH}}$. Составляя

согласно формулам (27) при $\gamma = \gamma_*$ разности $\tau^{-1}[\hat{x}(t + \tau) - \hat{x}(t)]$, $\tau^{-1}[H(t + \tau) - H(t)]$ и переходя к пределу при $\tau \rightarrow 0$, получаем формулы (18), (19). Утверждение 3 доказано.

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ УПРАВЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИЕЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ ДЕЙСТВИИ ОГРАНИЧЕННОГО ВНЕШНЕГО ВОЗМУЩЕНИЯ

Исследуем эффективность алгоритмов оценивания множеств достижимости ДС на примере задачи оценивания точности управления ориентацией твердого тела. Проведем сопоставление полученного решения с решением, получаемым с использованием аппарата функций Ляпунова. Под оценкой точности в первом случае понимается эллипсоид, определяемый установившимся значением матрицы $H(t)$ при достаточно больших значениях времени в уравнениях (18), (19) при гурвицевой матрице $A(t) \equiv A$ и $u(t) \equiv 0$. Во втором случае оценка точности определяется оценкой предельного множества системы. Напомним, что под предельным множеством ДС понимается множество в ее фазовом пространстве, в которое попадают (или к которому неограниченно приближаются) все ее фазовые траектории (диссипативность в целом) или стартующие из определенной области (диссипативность в области) [13, 14]. Воспользуемся математической моделью управляемого углового движения космического аппарата (КА), рассматриваемого как твердое тело [15], с дополнительным учетом ограниченного внешнего возмущения. Для простоты рассмотрим случай управления ориентацией относительно инерциальной системы координат. Целью управления ориентацией является совмещение связанной с КА системы координат (СК) с выбранной инерциальной. При этом уравнения углового движения из [15] имеют вид

$$\dot{\Phi} = A(\Phi)\omega, \quad J\dot{\omega} = M - \Omega(\omega)J\omega, \quad (28)$$

где $\Phi^T = (\gamma, \psi, \theta)$ — вектор углов Крылова (крен, рыскание, тангаж), определяющий положение связанной СК относительно инерциальной СК; $\omega^T = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — вектор проекций угловой скорости КА на оси связанной СК; $J = \text{diag}\{J_1, J_2, J_3\}$ — матрица представления тензора инерции КА в связанной СК; $M = u + f(t)$, где $u^T = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор моментов управления, заданный в связанной СК, $u = -\alpha\Phi - K\omega, K = \text{diag}\{k_1, k_2, k_3\}$, $\alpha > 0, k_i > 0$ — коэффициенты усиления в законе управления; $f^T(t) = (f(t)_1, f(t)_2, f(t)_3)$ — вектор неконтролируемых внешних возмущений, ограниченных заданной константой $f^T(t)Gf(t) \leq q^2 \quad \forall t \geq 0$. Матрицы $A(\Phi)$ и $\Omega(\omega)$ имеют вид

$$A(\Phi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ \sin \psi \operatorname{tg} \gamma & 1 & -\cos \psi \operatorname{tg} \gamma \\ -\frac{\sin \psi}{\cos \gamma} & 0 & \frac{\cos \psi}{\cos \gamma} \end{pmatrix}, \quad \Omega(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Управление $u = -\alpha\Phi - K\omega$ при отсутствии возмущения $F(t) \equiv 0$, $t \rightarrow \infty$ приводит ДС (28) в начало координат $\Phi = 0$, $\omega = 0$. При действии достаточно малого возмущения вектор фазового состояния системы будет находиться в области вблизи начала координат. Поэтому для нахождения множества достижимости будем рассматривать линеаризованную систему в окрестности начала координат. После линеаризации все три канала (крен, рыскание и тангаж) становятся независимыми. Для определенности рассмотрим канал тангажа. При этом получим систему $\dot{\theta} = \omega_3$, $J_3 \dot{\omega}_3 = u_3 + f_3(t)$, $u_3 = -\tilde{\alpha}\theta - \tilde{k}_3\omega_3$, векторно-матричная запись которой имеет вид ДС (4), (5):

$$\dot{x} = Ax + f(t), \quad f^T(t)Gf(t) \leq q^2, \quad (29)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & -k_3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} \theta \\ \omega_3 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f_3(t) \end{pmatrix}, \quad \alpha = J_3^{-1}\tilde{\alpha}, \quad k_3 = J_3^{-1}\tilde{k}_3.$$

Для построения множества достижимости системы (29) может быть использовано утверждение 3. При выполнении компьютерного моделирования динамики эволюции множества достижимости системы (29) были выбраны следующие значения ее параметров и начальных условий: $\alpha = 2$, $k_3 = 2$, $q = 0,1$, $G = I_2$, $\hat{x}(0) = (5,2)^T$, $H(0) = I_2$. «Неконтролируемое» возмущение полагалось равным $f_3 = q \sin(\lambda t)$, частота λ которого соответствовала резонансной частоте системы. При этом неизвестный истинный вектор начального состояния полагался равным $x^*(0) = (4,5; 2,5)^T$.

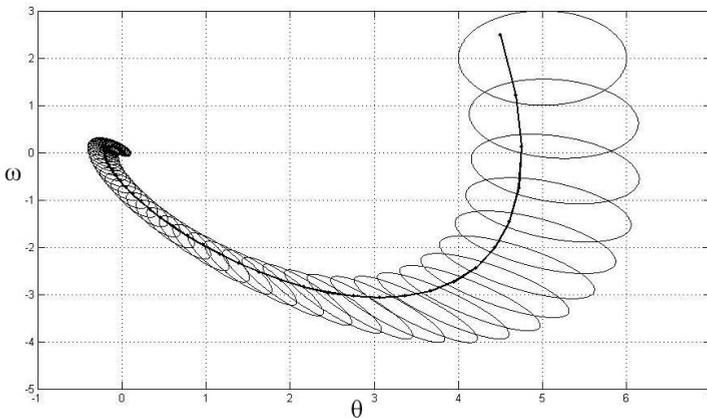


Рис. 1. Изменение аппроксимирующих эллипсоидов во времени

На рис. 1 изображена дискретная аппроксимация интегральной воронки [6] системы (29). Она представляет собой последовательность эллипсоидальных оценок множеств достижимости, построенных через промежуток времени 0,1 с. Каждому эллипсоиду принадлежит истинный вектор состояния $x^*(t)$ системы в соответствующий момент времени.

Истинная фазовая траектория системы изображена на рисунке жирной линией.

На рис. 2, 3 приведены графики изменения следа и определителя матриц H во времени. Видно, что в асимптотике значения следа и определителя сходятся к определенным константам, а эллипсоид — оценка множества достижимости системы в асимптотике приходит к некоторому установившемуся значению, определяющему гарантированную оценку точности стабилизации системы.

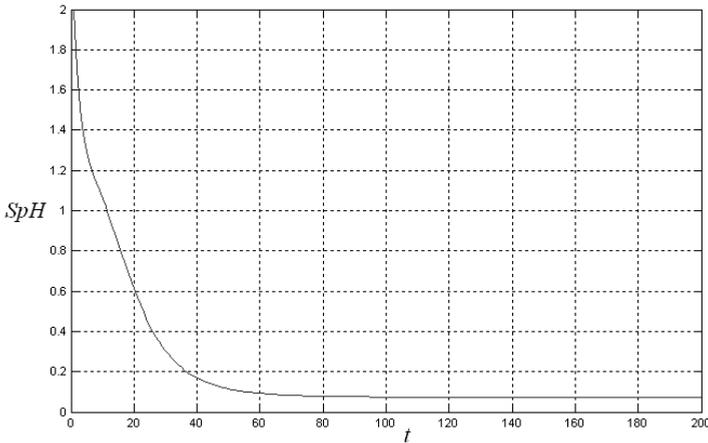


Рис. 2. Изменение следа матриц H во времени

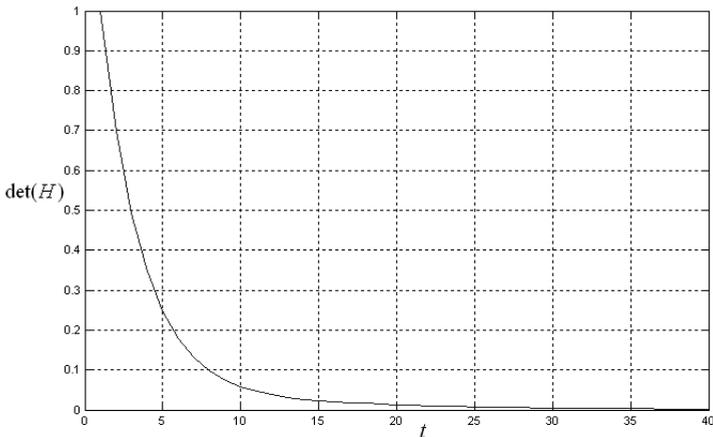


Рис. 3. Изменение определителя матриц H во времени

Получим теперь оценку предельного множества системы (29), которое по определению [13, 14], также является и оценкой точности системы в установившемся режиме. Воспользуемся для этого известными обобщениями [13, 14] прямого метода Ляпунова на исследование устойчивости множеств и выберем функцию Ляпунова в виде квадратичной формы $v(x) = x^T P x$, $P = P^T > 0$. Производная функции Ляпунова, вычисленная согласно уравнению (29), имеет вид

$$\dot{v}(x) = x^T (A^T P + P A)x + 2f^T P x. \quad (30)$$

Так как матрица A является Гурвицева, то матричное уравнение Ляпунова $A^T P + PA = -C$ имеет решение $P > 0$ при любой матрице $C = C^T > 0$. Полагая для определенности матрицу $C = I_2$, находим решение уравнения Ляпунова:

$$P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha^{-1} k_3 + k_3^{-1} (1 + \alpha) & \alpha^{-1} \\ \alpha^{-1} & \alpha^{-1} k_3^{-1} (1 + \alpha) \end{pmatrix}.$$

Найдем множество фазового пространства системы (29), на котором $\dot{v}(x) \leq 0$. Воспользовавшись соотношением (30) и полагая для простоты матрицу $G = I_2$, находим оценку

$$\dot{v}(x) \leq -\|x\|^2 + 2\|f\| \cdot \|Px\| \leq -\|x\|^2 + 2q\lambda_{\max}(P)\|x\| \leq 0, \quad (31)$$

где $\lambda_{\max}(P)$ — максимальное собственное значение матрицы P . Из цепочки неравенств (31) получаем, что $\dot{v}(x) \leq 0$ на множестве $\|x\| \geq \rho$, $\rho = 2q\lambda_{\max}(P)$. Согласно [13, 14], предельным множеством системы (29) будет множество, ограниченное поверхностью уровня функции Ляпунова $v(x) \leq \mu^2$, где $\mu^2 = \max_{\|x\|=\rho} v(x)$. Воспользовавшись оценками значений квадратичных форм на

шаре единичного радиуса [16], получаем $\mu^2 = 4q^2\lambda_{\max}^3(P)$. Таким образом, оценка сверху предельного множества системы определяется множеством

$$M = \left\{ x : x^T P x \leq \mu^2, \mu^2 = 4q^2\lambda_{\max}^3(P) \right\}. \quad (32)$$

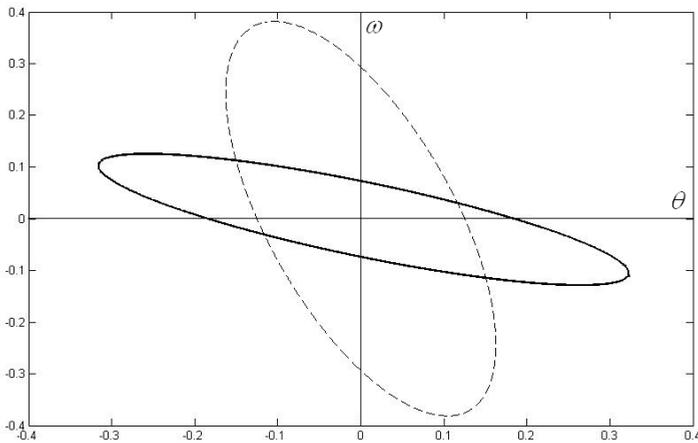


Рис.4 Оценка предельного множества системы и асимптотики оценки ее множества достижимости

На рис. 4 приведены эллипсоидальная оценка асимптотики множества достижимости системы и оценка ее предельного множества, изображенные соответственно жирной и штриховой линиями. Проектируя полученные эллипсоиды на оси координат согласно [17] можно получить представляющие наибольший интерес гарантированные интервальные

оценки точности управления по каждой из координат (по углу и угловой скорости) отдельно. Из рисунка непосредственно видно, что пересечения интервальных оценок существенно меньше каждой из них. Поэтому для оценки точности установившейся системы целесообразно использовать не только эллипсоидальные оценки предельного множества, но и оценки множества достижимости системы.

Выводы

Метод эллипсоидальной аппроксимации множеств достижимости непрерывных и дискретных динамических систем, подверженных действию неконтролируемых ограниченных внешних возмущений, основан на использовании формализованных методов выпуклого анализа, а именно на теории опорных функций выпуклых множеств.

Эффективность оценки точности стабилизации системы по асимптотике ее множеств достижимости иллюстрируется на примере системы управления ориентацией КА. Для получения оценки предельного множества системы управления ориентацией КА используются известные обобщения прямого метода Ляпунова на исследование устойчивости инвариантных множеств динамических систем. Полученные оценки сопоставляются с асимптотикой множества достижимости системы.

Гарантированные интервальные оценки точности ориентации, полученные при совместном использовании оценок множеств достижимости и оценок предельных множеств, существенно лучше по сравнению с оценками, полученными при использовании каждого из них в отдельности.

1. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов / Ф.Л. Черноусько. — М. : Наука, 1988. — 320 с.
2. Кунцевич В.М. Области достижимости линейных и некоторых классов нелинейных дискретных систем и управления ими / В.М. Кунцевич, А.Б. Куржанский // Проблемы управления и информатики. — 2010. — № 1. — С. 5–20.
3. Кунцевич В.М. Инвариантные множества (области диссипативности) нелинейных дискретных систем в задачах анализа и синтеза систем управления / В.М. Кунцевич // Пленарные доклады Межд. мультikonференции «Теория и системы управления». Москва, 26-30 января 2009 г. — М. : Институт управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2009. — С. 206–217.
4. Овсеевич А.И. Свойства оптимальных эллипсоидов, приближающих области достижимости систем с неопределенностями / А.И. Овсеевич, Ф.Л. Черноусько // Изв. РАН «Теория и системы управления». — 2004. — № 4. — С. 8–18.
5. Гусев М.И. Оценки множеств достижимости многомерных управляемых систем с нелинейными перекрестными связями / М.И. Гусев // Труды ИММ УрО РАН, 2009. — 16, — № 1. — С. 223–232.
6. Ушаков В.Н. Аппроксимация множеств достижимости и интегральных воронок дифференциальных включений / В.Н. Ушаков, А.Р. Матвийчук, А.В. Ушаков // Вестн. Удмуртского ун-та. — 2011. — Вып. 4. — С. 23–39.
7. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ / Р. Рокафеллар. — М. : Мир, 1973. — 470 с.
8. Пшеничный Б.Н. Численные методы в экстремальных задачах / Б.Н. Пшеничный, Ю.М. Данилин. — М. : Наука, 1975. — 320 с.
9. Половинкин Е.С. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа / Е.С. Половинкин, М.В. Балашов. — М. : Физматлит, 2004. — 416 с.

10. Scheweppe F.C. Recursive state estimation: unknown but bounded error and system inputs// IEEE Trans. Automat Control. 1968. — Vol. AC-13, No 1. — P. 22–28.
11. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. — М. : Наука, 1987. — 600 с.
12. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности / А.Б. Куржанский. — М. : Наука, 1977. — 392 с.
13. Зубов В.И. Устойчивость движения / В.И. Зубов. — М. : Высшая школа, 1973. — 272с.
14. Кунцевич В.М. Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова / В.М. Кунцевич, М.М. Лычак. — М. : Наука, 1978. — 400 с.
15. Волосов В.В. Об управлении ориентацией космического аппарата в орбитальной системе координат с использованием эллипсоидальных оценок его вектора состояния / В.В. Волосов // Проблемы управления и информатики. — 1998. — № 5. — С. 31–41.
16. Воеводин В.В. Матрицы и вычисления / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. — М. : Наука, 1984. — 320 с.
17. Волосов В.В. Исследование алгоритма одновременного оценивания фазового состояния и параметров дискретного динамического объекта / В.В. Волосов, А.С. Калита // Кибернетика и вычисл. техника. — 1988. — Вып. 79. — С. 23–28.

Получено 23.06.2014