DOI: https:// 10.15407/kvt195.01.036

UDC 550:531; 681.51

ЄФИМЕНКО М.В., канд. техн. наук,
доцент Запорізького національного технічного університету,
Головний конструктор
e-mail: nefimenko@gmail.com
Науково-виробниче підприємство «Хартрон-ЮКОМ»,
пр. Соборний, 166, м. Запоріжжя, 69035, Україна

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ КЕРУВАННЯ РУХОМ ТОЧКИ ПО СФЕРІ

Вступ. *Є ряд об'єктів керування, рух яких у просторі можна інтерпретувати як рух точки по сфері заданого радіусу. Як приклад такого руху можна привести кутовий рух космічного апарата. Якщо для опису кутового руху КА використовувати кватерніон орієнтації і його похідну, то кутовий рух можна представити у вигляді руху точки по одиничній сфері в просторі* R^4. *При керуванні такими об'єктами становлять інтерес методи розв'язання задач керування рухом точки по одиничній сфері в просторі* R^n.

Метою статті *є розроблення методів розв'язування таких задач керування рухом точки по сфері: задачі стабілізації руху точки по сфері щодо програмної траєкторії; задачі про швидкодію у разі руху точки по сфері; задачі термінального керування.*

Основним результатом *є методи розв'язки різних задач керування рухом точки вздовж сфери.*

Висновки. *В роботі з використанням основних властивостей руху точки по сфері наведено розв'язки таких задач керування: задачі стабілізації руху точки по сфері щодо програмної траєкторії; задачі про швидкодію у разі руху точки по сфері; задачі термінального керування. Застосування отриманих результатів продемонстровано на прикладі розв'язання задачі стабілізації кутового руху космічного апарата відносно заданої опорної системи координат. Отримані результати можуть бути корисними для розроблення різних систем керування, зокрема систем керування кутовим рухом космічного апарата.*

Ключові слова: *сфера, керування, проекція точки, кватерніон.*

ВСТУП

Є ряд об'єктів керування, рух яких у просторі R^n можна інтерпретувати як рух точки по сфері заданого радіусу. Як приклад такого руху можна навести кутовий рух космічного апарата (КА). Якщо для опису кутового руху КА використовувати кватерніон орієнтації і його похідну, то кутовий рух можна подати у вигляді руху точки по одиничній сфері в просторі R^4. Вперше цей підхід було використано у роботі [1], в якій із застосуванням псевдообернених і проекційних матриць [2–4] було отримано динамічне рівняння для кватерніону, яке описує множину керованих переміщень точки на поверхні сфери одиничного радіуса в просторі R^4. Подальший розвиток цей напрям отримав у роботі [5], де було досліджено властивості динамічного рівняння для кватерніону і запропоновано загальні підходи до розв'язання задач керування орієнтацією супутника з використанням цього рівняння. В зазначених роботах було запропоновано способи розв'язання задач керування рухом точки по сфері для випадку чотиривимірної одиничної сфери. У роботі отримано результати, узагальнені на випадок n-мірної одиничної сфери. У загальному випадку рівняння руху точки по сфері в просторі R^n має такий вигляд:

$$\ddot{X}_0 = \left(I_n - X_0 \cdot X_0^T\right) \cdot f - X_0 \cdot \left\|\dot{X}_0\right\|^2,$$

де $f \in R^n$ — вектор керування, $X_0 \in R^n$ — нормований вектор, що задає положення точки на сфері; I_n — одинична матриця розміру $n \times n$.

Рівняння (1) описує безліч керованих переміщень точки на поверхні сфери заданого радіуса в n-вимірному просторі. В роботі [5] для цього рівняння доведено такі твердження.

Твердження 1. Нехай задано нелінійну систему диференційних рівнянь $X^{(m)} = F\left(X, \dot{X}, \ddot{X}, \ldots, X^{(m-1)}\right)$. Будемо розглядати компоненти вектора $X(t) \in R^n$ як координати однойменної точки, яка рухається у просторі R^n за деякою траєкторією, яка визначається вектором $X(t)$. Водночас вектор функції $X(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ задовольняє умові $\|X(t)\| \neq 0$. Тоді рух проекції цієї точки на одиничну сферу в просторі R^n, яка визначається ортом $X_0(t) = \dfrac{X(t)}{\|X(t)\|}$ вектору $X(t)$, описується рівнянням

$$\ddot{X}_0 = \left(I_n - X_0 \cdot X_0^T\right) \cdot f - X_0 \cdot \left|\dot{X}_0\right|^2, \qquad f = \frac{\ddot{X}}{\delta} - 2\frac{\dot{\delta}}{\delta}\dot{X}_0 + \alpha X_0,$$

$$\delta = \sqrt{X^T \cdot X}, \quad \dot{\delta} = X_0^T \cdot \dot{X},$$

в якому змінна $\alpha(t)$ є довільною скалярною функцією часу.

Твердження 2. Нехай на одиничній сфері у просторі R^n задано точку $X_0(t)$, рух якої описується рівнянням $\ddot{X}_0 = \left(I_n - X_0 \cdot X_0^T\right) \cdot f - X_0 \cdot \left|\dot{X}_0\right|^2$. Одиничному вектору $X_0(t)$ можна поставити у відповідність вектор $X(t)$, зміна координат якого в часі описується системою рівнянь $\ddot{X}(t) = \Psi$, де відповідно до твердження 1, функція $\Psi(t)$ має вигляд $\Psi(t) = \delta f + 2\dot{\delta}\dot{X}_0 + \alpha X_0$, $\delta = \sqrt{X^T \cdot X}$. Якщо в початковий момент часу виконуються співвідношення $X(t_0) = X_0(t_0)$, $\dot{X}(t_0) = \dot{X}_0(t_0)$, то є взаємно-однозначна відповідність між векторами $X_0(t)$ і $X(t)$, яка визначається виразами

$$X_0(t)=\frac{X(t)}{\delta},\ \dot{X}_0(t)=\frac{d}{dt}\left(\frac{X(t)}{\delta}\right)=\left(I_n-X_0(t)X_0^T(t)\right)\frac{\dot{X}(t)}{\delta},$$

$$X(t)=\delta X_0(t),\quad \dot{X}(t)=\dot{\delta}X_0(t)+\delta\dot{X}_0(t).$$

Твердження 3. Нехай на одиничній сфері у просторі R^n задано точку $X_0(t)$, рух якої описується рівнянням $\ddot{X}_0=\Theta$, де прискорення точки Θ визначається виразом $\Theta=\left(I_n-X_0X_0^T\right)f-X_0\left\|\dot{X}_0\right\|^2$, а вектор f є вектором керування. Тоді вектори Θ та f пов'язані співвідношенням $f=\Theta+\alpha\cdot X_0$, де змінна α — довільна скалярна функція.

У роботі разом з використанням тверджень 1–3 запропоновано методи розв'язання основних задач керування рухом точки по одиничній сфері у просторі R^n, а саме:

– задача стабілізації руху точки відносно програмної траєкторії;
– задача про швидкодію;
– задача термінального керування.

СТАБІЛІЗАЦІЯ РУХУ ТОЧКИ ПО СФЕРІ ВІДНОСНО ПРОГРАМНОЇ ТРАЄКТОРІЇ

Постановка задачі. Нехай на одиничній сфері у просторі R^n задано точку $X_0(t)$, рух якої описується рівнянням

$$\ddot{X}_0=\left(I_n-X_0\cdot X_0^T\right)\cdot f-X_0\cdot\left|\dot{X}_0\right|^2,$$

і задано програмну траєкторію руху цієї точки рівнянням

$$\ddot{X}_0^*=\left(I_n-X_0^*\cdot X_0^{*T}\right)\cdot f^*-X_0^*\cdot\left|\dot{X}_0^*\right|^2,$$

де f^* — задане програмне керування.

Розглянемо таку задачу: знайти закон керування f, який забезпечує асимптотичну стійкість за Ляпуновим положенню рівноваги:

$$X_0=X_0^*.$$

Рішення поставленої задачі. Відповідно до твердження 3, рівняння руху точок $X_0(t)$ і $X_0^*(t)$ можна подати у вигляді:

$$\ddot{X}_0=f-\alpha(t)X_0, \tag{1}$$

$$\ddot{X}_0^*=f^*-\alpha(t)X_0^*. \tag{2}$$

Так як $\alpha(t)$ є довільною скалярною функцією, то для пошуку закону керування покладемо її рівною нулю:

$$\alpha(t)=0.$$

У цьому випадку рівняння (1–2) приймають вигляд:

$$\ddot{X}_0 = f \,, \tag{3}$$

$$\ddot{X}_0^* = f^* . \tag{4}$$

Введемо у розгляд помилку керування

$$E = X_0 - X_0^* .$$

З урахуванням (3–4) рівняння помилки має вигляд:

$$\ddot{E} = \Delta f \,. \tag{5}$$

У рівнянні (5)

$$\Delta f = f - f^* \tag{6}$$

з виразу (6) маємо

$$f = f^* + \Delta f \,.$$

Система рівнянь (5) є розділеною системою з *n* інтегрувальних ланок другого порядку. Входами цих ланок є керувальні сигнали Δf_i. Для *i*-ої ланки (*i*= 1, 2 ... *n*) можна записати рівняння

$$\ddot{e}_i = \Delta f_i \,, \tag{7}$$

де e_i — *i*-та координата вектору помилки E, Δf_i — *i*-та координата вектору Δf.

Визначимо Δf_i як:

$$\Delta f_i = -k_{i1} \cdot e_i - k_{i2} \dot{e}_i \,. \tag{8}$$

Підставивши (8) в (7), отримаємо

$$\ddot{e}_i = -k_{i1} e_i - k_{i2} \dot{e}_i \,. \tag{9}$$

Система (9) є лінійною системою другого порядку і для того, щоб вона була асимптотично стійкою, необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови

$$k_{i1} > 0 \,, \; k_{i2} > 0 \,. \tag{10}$$

У разі виконання умов (10) керування $f = f^* + \Delta f$, де елементи вектору Δf визначаються виразом (8), забезпечує асимптотичну стійкість положенню рівноваги $X_0 = X_0^*$.

Для практичного використання закону керування (5) коефіцієнти k_{i1} і k_{i2} можна знайти, використовуючи відповідні методи теорії лінійних систем автоматичного керування [6]. На підставі вищевикладеного справедливим буде таке твердження.

Твердження 4. Нехай на одиничній сфері у просторі R^n задано точку $X_0(t)$, рух якої описується рівнянням $\ddot{X}_0 = \left(I_n - X_0 X_0^T \cdot\right) \cdot f - X_0 \cdot \left|\dot{X}_0\right|^2$ і задано програмну траєкторію руху цієї точки рівнянням $\ddot{X}_0^* = \left(I_n - X_0^* \cdot X_0^{*T}\right) \cdot f^* - X_0^* \cdot \left|\dot{X}_0^*\right|^2$. Тоді закон керування

$$f = -K_1 E - K_2 \dot{E} + f^*,$$

$$E = X_0 - X_0^*, \qquad \dot{E} = \dot{X}_0 - \dot{X}_0^*,$$

$$K_1 = diag(k_{i1}), \quad K_2 = diag(k_{i2}), \quad i=1, 2, \dots n,$$

де $k_{i1} > 0$, $k_{i2} > 0$ забезпечує асимптотичну стійкість положенню рівноваги $X_0 = X_0^*$.

ШВИДКОДІЯ ПІД ЧАС РУХУ ТОЧКИ ПО СФЕРІ

Постановка задачі. Для рівняння $\ddot{X}_0 = \left(I_n - X_0 X_0^T \cdot\right) \cdot f - X_0 \cdot \left|\dot{X}_0\right|^2$ знайти керування $f(t)$, яке забезпечує переведення точки з поточного стану $X_0(t_0)$, $\dot{X}_0(t_0)$ в заданий стан $X_0(t_1)$, $\dot{X}_0(t_1)$ за мінімально можливий час.

Розв'язання поставленої задачі. Відповідно до твердження 2, вектору X_0 можна поставити у відповідність вектор $X(t) \in R^n$ (ненормований вектор), рух якого у просторі R^n описується такою системою диференціальних рівнянь:

$$\ddot{X} = \Psi. \tag{11}$$

Будемо вважати, що для вектору X і його похідної $\dot{X}$ задано такі граничні умови для моментів часу t_0 і t_1:

$$X(t_0) = X_0(t_0), \ \dot{X}(t_0) = \dot{X}_0(t_0),$$

$$X(t_1) = X_0(t_1), \ \dot{X}(t_1) = \dot{X}_0(t_1).$$

У цьому випадку між векторами X_0 і X є взаємно однозначна відповідність. Визначимо програмну траєкторію руху точки по сфері (вектор $X_0(t)$) у такий спосіб:

$$X_0(t) = \frac{X(t)}{\|X(t)\|}. \tag{12}$$

Для визначення траєкторії руху рівнянням (12) задачу про переведення точки $X_0(t)$ з поточного стану $X_0(t_0)$, $\dot{X}_0(t_0)$ в заданий стан $X_0(t_1)$, $\dot{X}_0(t_1)$ за мінімальний проміжок часу можна сформулювати таким чином: *для системи* (11) *знайти закон керування* $\Psi(t)$, *який переводить систему* *зі стану* $X(t_0)=X_0(t_0)$, $\dot{X}(t_0)=\dot{X}_0(t_0)$ *в момент часу* t_0 *в стан* $X(t_1)=X_0(t_1)$, $\dot{X}(t_1)=\dot{X}_0(t_1)$ *в момент часу* t_1 *за мінімально можливий проміжок часу за умови обмеження* $\|\Psi(t)\|\le\psi_0$. Рівняння (11) має дуже простий вигляд і для нього існує аналітичний розв'язок задачі про швидкодію [7], тобто є вирази для розрахунку векторів $X(t)$, $\dot{X}(t)$ і $\Psi(t)$. Водночас, так як вектор X_0 є ортом вектору X, то в момент часу t_1 вектор X_0 і його похідна $\dot{X}_0$ приймуть задане значення $X_0(t_1)$, $\dot{X}_0(t_1)$. Відповідно до твердження 1, для вектору $X_0(t_0)$ є справедливим рівняння

$$\ddot{X}_0=\left(I_n-X_0X_0^T\right)\cdot\left(\frac{\Psi}{\delta}-2\frac{\dot{\delta}}{\delta}\dot{X}_0\right)-X_0\cdot\left\|\dot{X}_0\right\|^2,\ \delta=\|X_0\|.$$

Отже, керування $f=\frac{\Psi}{\delta}-2\frac{\dot{\delta}}{\delta}\dot{X}_0$ забезпечує переміщення точки X_0 по одиничній сфері зі стану $X_0(t_0)$, $\dot{X}_0(t_0)$ в заданий стан $X_0(t_1)$, $\dot{X}_0(t_1)$ за мінімально можливий проміжок часу. Маючи аналітичний розв'язок задачі про швидкодію для системи (11), можна легко знайти керування f. На підставі вищесказаного, справедливо таке твердження.

Твердження 5. Нехай на одиничній сфері у просторі R^n задано точку $X_0(t)$, рух якої описується рівнянням $\ddot{X}_0=\left(I_n-X_0X_0^T\cdot\right)\cdot f-X_0\cdot\left|\dot{X}_0\right|^2$. Тоді керування $f=\frac{\Psi(t)}{\delta(t)}-2\frac{\dot{\delta}(t)}{\delta(t)}\dot{X}_0(t)$, де вектор $\Psi(t)$ знаходиться як розв'язок задачі про швидкодію для системи $\ddot{X}=\Psi$, переводить точку $X_0(t)$ з поточного стану $X_0(t_0)$, $\dot{X}_0(t_0)$ в заданий стан $X_0(t_1)$, $\dot{X}_0(t_1)$ за мінімальний час.

ТЕРМІНАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ

Постановка задачі. Нехай на одиничній сфері у просторі R^n задано точку $X_0(t)$, рух якої описується в R^n рівнянням

$$\ddot{X}_0=\left(I_n-X_0X_0^T\cdot\right)\cdot f-X_0\cdot\left|\dot{X}_0\right|^2.$$

Необхідно знайти керування f, яке переводить точку $X_0(t)$ зі стану $X_0(t_0)$, $\dot{X}_0(t_0)$ в момент часу t_0 в стан $X_0(t_1)$, $\dot{X}_0(t_1)$ в момент часу t_1. Моменти часу t_0 і t_1 є фіксованими. В літературі ця задача є відомою як задача термінального керування.

Розв'язок поставленої задачі. Введемо у розгляд допоміжний вектор $X(t)\in R^n$ (ненормований вектор), рух якого у просторі R^n описується системою диференційних рівнянь

$$X^{(m)}=F\left(X,\dot{X},\ddot{X},\cdots,X^{(m)},\Psi\right), \qquad (13)$$

де Ψ — вектор керування. Будемо вважати, що для вектору X і його похідної $\dot{X}$ задано граничні умови для моментів часу t_0 і t_1.

$$X(t_0)=X_0(t_0),\ \dot{X}(t_0)=\dot{X}_0(t_0),$$

$$X(t_1)=X_0(t_1),\ \dot{X}(t_1)=\dot{X}_0(t_1).$$

Визначимо траєкторію руху точки по сфері (вектор $X_0(t)$) у такий спосіб:

$$X_0(t)=\frac{X(t)}{\|X(t)\|}. \qquad (14)$$

Для визначення траєкторії руху рівнянням (14) задачу про переведення точки з поточного стану на сфері в заданий стан на сфері можна сформулювати таким чином: знайти закон керування $\Psi(t)$, який переводить систему

$$X^{(m)}=F\left(X,\dot{X},\ddot{X},\cdots,X^{(m)},\Psi\right)$$

зі стану $X(t_0)=X_0(t_0)$, $\dot{X}(t_0)=\dot{X}_0(t_0)$ в момент часу t_0 в стан $X(t_1)=X_0(t_1)$, $\dot{X}(t_1)=\dot{X}_0(t_1)$ в момент часу t_1 і забезпечує мінімум функціоналу

$$\Phi(t)=\int_{t_0}^{t_1}\varphi(X,\Psi)dt.$$

Моменти часу t_0 і t_1 є фіксованими. Для знаходження необхідної траєкторії необхідно визначитися з виглядом правої частини рівняння (13). У загальному випадку, праву частину рівняння (13) можна вибирати довільно, оскільки через дві точки на сфері можна провести нескінченну кількість траєкторій, відповідних нескінченній кількості правих частин рівняння вектору X. У виборі моделі руху вектору $X(t)$ єдиною обов'язковою вимогою є існування аналітичного розв'язку поставленої вище задачі оптимального керування. Знайдений вектор $X_0(t)=\frac{X(t)}{\|X(t)\|}$ приймемо за траєкторію переведення вектору з поточного стану на сфері в потрібний стан. Для знаходження керування f, яке забезпечує рух уздовж заданої траєкторії, скористаємося твердженням 1. Відповідно до твердження 1 існує нормований вектор $X_0=\frac{1}{\delta}\cdot X$, де $\delta=\|X(t)\|$, рух якого описується рівнянням

$$\ddot{X}_0=\left(I_n-X_0X_0^T\right)\cdot f-X_0\cdot\left\|\dot{X}_0\right\|^2,$$

де $f=\frac{\ddot{X}}{\delta}-2\frac{\dot{\delta}}{\delta}\dot{X}_0+\alpha X_0$. Так як α — довільна скалярна функція, то приймемо її рівною нулю. Тоді отримаємо

$$f = \frac{\ddot{X}}{\delta} - 2\frac{\dot{\delta}}{\delta}\dot{X}_0 . \tag{15}$$

У виразі (15) вектор $\dot{X}_0$ можна знайти за формулою

$$\dot{X}_0 = \left(I_n - X_0 X_0^T \cdot\right)\frac{\dot{X}}{\delta} .$$

За визначенням керування Ψ вибрано таким чином, що початок і кінець траєкторії руху точки X знаходяться на одиничній сфері. Водночас в момент часу t_1 для вектору X буде виконуватися співвідношення

$$X(t_1) = X_0(t_1), \quad \dot{X}(t_1) = \dot{X}_0(t_1) .$$

Так як вектор X_0 є ортом вектору X, то в момент часу t_1 вектор X_0 і його похідна $\dot{X}_0$ приймуть задане значення $X_0(t_1)$, $\dot{X}_0(t_1)$. Отже, керування f забезпечує переміщення точки X_0 по одиничній сфері зі стану $X_0(t_0)$, $\dot{X}_0(t_0)$ в заданий стан $X_0(t_1)$, $\dot{X}_0(t_1)$ за фіксований час $\tau = t_1 - t_0$. Тоді є справедливим таке твердження.

Твердження 6. Нехай у просторі R^n задано точку X, рух якої описується диференційним рівнянням

$$X^{(m)} = F\left(X, \dot{X}, \ddot{X}, \cdots, X^{(m)}, \Psi\right),$$

і $\Psi \in R^n$ є вектором керування. Для вектору X і його похідних до m-1 порядку включно задані граничні умови для фіксованих моментів часу t_0 і t_1. До того ж

$$X(t_0) = X_0(t_0), \quad \dot{X}(t_0) = \dot{X}_0(t_0),$$

$$X(t_1) = X_0(t_1), \quad \dot{X}(t_1) = \dot{X}_0(t_1),$$

де $X_0(t_0) = \dfrac{X(t_0)}{\|X(t_0)\|}$. Для заданих граничних умов знайдено вектор керування Ψ, який переводить вектор X і його похідні до m-1 порядку включно зі стану в момент часу t_0 в стан в момент часу t_1. Моменти часу t_0 і t_1 є заданими. Тоді керування

$$f = \frac{\ddot{X}}{\delta} - 2\frac{\dot{\delta}}{\delta}\dot{X}_0, \quad \delta = \|X(t)\|$$

забезпечує переміщення точки X_0 за фіксований час $\tau = t_1 - t_0$ зі стану $X_0(t_0)$, $\dot{X}_0(t_0)$ в заданий стан $X_0(t_1)$, $\dot{X}_0(t_1)$.

ЗАДАЧА СТАБІЛІЗАЦІЇ КУТОВОГО РУХУ КОСМІЧНОГО АПАРАТУ ВІДНОСНО ЗАДАНОЇ ОПОРНОЇ СИСТЕМИ КООРДИНАТ

Застосування запропонованих способів розв'язання задач керування рухом точки на сфері продемонструємо на прикладі розв'язання задачі стабілізації кутового руху космічного апарату відносно заданої опорної системи координат. Як вже йшлося вище, якщо для опису кутового руху КА використовувати кватерніон орієнтації і його похідну, то кутовий рух можна подати у вигляді такого рівняння руху точки по одиничній сфері у просторі R^4 [1]:

$$\ddot{\Lambda}=\left(I_4-\Lambda\cdot\Lambda^T\right)\cdot U-\Lambda\cdot\left\|\dot{\Lambda}\right\|^2,$$

де Λ — векторна форма подання кватерніона зі скалярною частиною λ_0 і векторною частиною $\lambda\in R^3$, яка визначає орієнтацію зв'язаної з КА системи координат відносно опорної; $U\in R^4$ — вектор кватерніоного керування, зв'язаний з моментом керування $M_u\in R^3$ виконавчих органів залежністю [8]

$$M_u=2JA(\Lambda)U+\omega\times J\omega;$$

де ω — вектор абсолютної кутової швидкості КА; J — тензор інерції; $A(\Lambda)$, $\Phi(\lambda)$ — матриці вигляду

$$A=(-\lambda\quad \lambda_0 I_3-\Phi(\lambda)),\qquad \Phi(x)=\begin{pmatrix} 0 & -\lambda_3 & \lambda_2\\ \lambda_3 & 0 & -\lambda_1\\ -\lambda_2 & \lambda_1 & 0\end{pmatrix}.$$

Розглянемо таку задачу: знайти керування U, яке забезпечує асимптотичну стійкість режиму тривісної орієнтації $\Lambda=(1\quad 0\quad 0\quad 0)^T$.

Так як рівняння для вектора Λ є рівнянням руху точки по одиничній сфері у просторі R^4, тоді для цього рівняння є справедливим твердження 4. Згідно з цим твердженням, закон керування

$$U=-K_1E-K_2\dot{E},$$

$$E=\Lambda-\Lambda^*,\qquad \dot{E}=\dot{\Lambda},$$

$$\Lambda^*=(1\quad 0\quad 0\quad 0)^T$$

забезпечує асимптотичну стійкість положенню рівноваги $\Lambda=\Lambda^*$. Було проведено чисельне моделювання роботи запропонованого закону керування. Для КА, який знаходиться на круговій орбіті, проведено моделювання процесу побудови орбітальної орієнтації. Передбачалося, що на борту супутника є інформація про поточні значення кватерніона Λ і вектора кутової швидкості ω. Початкові умови для побудови орієнтації були такі: кут тангажу дорівнює мінус 90 градусів, кут крену — плюс 60 градусів, кут рискання — плюс 90 градусів. Залежність кутів орієнтації від часу зображено на рис.1. Відповідні кутові швидкості зображено на рис. 2.

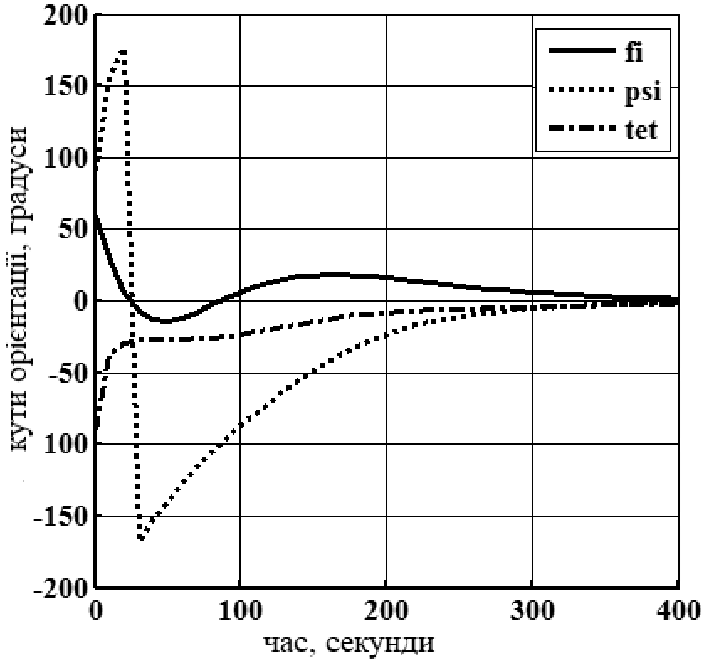

Рис. 1. Кути орієнтації КА відносно орбітальної системи координат

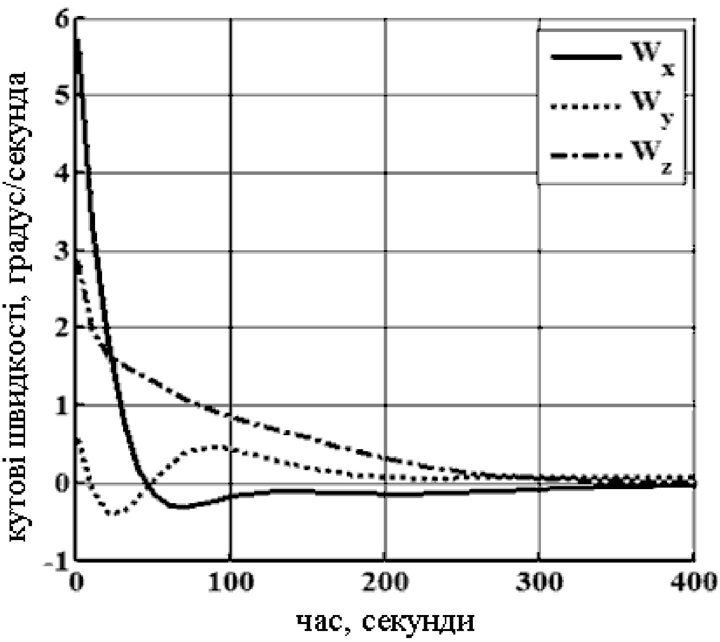

Рис. 2. Абсолютні кутові швидкості КА

Отже, як видно з наведених графіків, параметри кутового руху наприкінці перехідного процесу відповідають режиму орбітальної орієнтації. Це підтверджує працездатність запропонованих алгоритмів.

ВИСНОВКИ

З врахуванням основних властивостей руху точки по сфері запропоновано методи розв'язання задач керування рухом точки по сфері в *n*-вимірному просторі. Знайшли розв'язок такі задачі керування:

– задачі стабілізації руху точки відносно програмної траєкторії;
– задачі про швидкодію;
– задачі термінального керування.

На прикладі керування кутовим рухом космічного апарата продемонстровано працездатність способів побудови законів керування рухом точки по сфері. Отримані результати можуть бути корисними під час розроблення різних систем керування, зокрема систем керування кутовим рухом КА.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кириченко Н.В., Матвиенко В.Т. Алгоритмы асимптотической, терминальной и адаптивной стабилизации вращательных движений твердого тела. *Проблемы управления и информатики.* 2003. № 1. С. 5–15.
2. Кириченко Н.Ф., Лепеха Н.П. Возмущение псевдообратных и проекционных матриц и их применение к идентификации линейных и нелинейных зависимостей. *Проблемы управления и информатики.* 2001. № 1. С. 6–22.
3. Кириченко Н.Ф., Лепеха Н.П. Псевдообращение в задачах управления и наблюдения. *Автоматика.* 1993. № 5. С. 69–81.
4. Кириченко Н.Ф., Матвиенко В.Т. Оптимальный синтез структур для линейных систем. *Проблемы управления и информатики.* 1996. № 1–2. С. 162–171.
5. Ефименко Н.В. Математическая модель углового движения КА в параметрах Родрига-Гамильтона и ее свойства. *Электронное моделирование.* 2018. Т. 40. №6. С. 21–36.
6. Х. Квакернаак, Р.Сиван. Линейные оптимальные системы управления М: Мир, 1977. 650 с.
7. Ефименко Н.В. Синтез оптимального по времени пространственного разворота космического аппарата с использованием динамического уравнения вращательного движения твердого тела в параметрах Родрига–Гамильтона. *Проблемы управления и информатика.* 2017. №3. С. 109–128.
8. Ефименко Н.В. Синтез алгоритмов управления пространственной переориентацией космического аппарата с использованием динамических уравнений вращательного движения твердого тела в параметрах Родрига–Гамильтона. *Проблемы управления и информатика.* 2015. №3. С. 145–155.

Отримано 27.11.2018

REFERENCES

1. Kirichenko N.V., Matvienko V.T. Algorithms of asymptotic terminal and adaptive stabilization of the rotational motions of a rigid body. *Problems of Control and Informatics.* 2003. No 1. P. 5–15. (in Russian).
2. Kirichenko N.F., Lepekha N.P. Perturbation of pseudoinverse and projection matrices and their application to the identification of linear and nonlinear dependencies. *Problems of Control and Computer Science.* 2001. № 1. P. 6–22.
3. Kirichenko N.F., Lepekha N.P. Pseudo-inversion in control and observation problems. *Automation.* 1993. № 5. P. 69–81.
4. Kirichenko N.F., Matvienko V.T. Optimal synthesis of structures for linear systems. *Problems of Control and Informatics.* 1996. № 1–2. P. 162–171.
5. Yefimenko N.V. Mathematical model of the angular motion of the spacecraft in the parameters of Rodrigues-Hamilton and its properties. *Electronic modeling.* 2018. Vol. 40. No 6. P. 21–36 (in Russian).
6. X. Quakernaak, R. Sivan. *Linear optimal control systems.* Moscow: Mir, 1977. 650 p. (in Russian).

7. Yefimenko N.V. Synthesis of the space-optimal time-reversal of a spacecraft using the dynamic equation of the rotational motion of a rigid body in the Rodrig Hamilton parameters. *Problems of Control and Computer Science.* 2017. No 3. P. 109–128. (in Russian).
8. Yefimenko N.V. Synthesis of spacecraft reorientation control algorithms using the dynamic equations of the rotational motion of a rigid body in the Rodrig Hamilton parameters. *Problems of Control and Computer Science.* 2015. No 3. P. 145–155. (in Russian).

Received 27.11.2018

Yefymenko M.V., PhD.,
associate professor of Zaporizhzhya National Technical University,
Chief Designer
e-mail: nefimenko@gmail.com
Scientific Production Enterprise "HARTRON-YUKOM"
Soborny av., 166, Zaporozhye, 69035, Ukraine

SOLUTION OF THE PROBLEMS OF CONTROLLING
THE MOTION OF A POINT ON A SPHERE

Introduction*. There are a number of control objects, the movement of which in space can be interpreted as the movement of a point along a sphere of a given radius. As an example of such a motion, the angular motion of a spacecraft can be considered. Using the orientation quaternion and its derivative to describe the angular motion of a spacecraft, the angular motion can be represented as the motion of a point along a unit sphere in* R^4.

While controlling such objects, the methods for solving the basic problems of controlling the motion of a point along the unit sphere in the R^n *space are of interest.*

The purpose *of the article is to build the following algorithms for controlling the motion of a point along the sphere:*

– *algorithm of a point motion stabilization with respect to program trajectory;*

– *algorithm of a point relocation from the current position to a specified position in minimum time;*

– *algorithm of a point relocation from the current position to a specified position in fixed time.*

Results. *The methods for solving the various problems of controlling the motion of a point along the sphere have been proposed.*

Conclusion*. On the basis of main properties of point along the sphere movement, the methods for solving the problems of controlling the motion of a point along the unit sphere in n-dimensional space have been proposed. Using the proposed methods, the solutions for the following control tasks have been found:*

– *problems of stabilizing the motion of a point along the sphere with respect to program trajectory;*

– *speed problems taking place when a point moves on along the sphere;*

– *problems of a point on the sphere relocation from the current position to a specified position in fixed time.*

The efficiency of the proposed algorithms has been demonstrated on the example of spacecraft angular motion control. The results obtained can be applicable in the development of various control systems, the spacecraft angular motion control systems in particular.

Keywords: *sphere, control, point projection, quaternion.*

Ефименко Н.В., канд. техн. наук,
доцент Запорожского национального технического университета
главный конструктор
e-mail: nefimenko@gmail.com
НПП «ХАРТРОН-ЮКОМ»,
пр. Соборный, 166, г. Запорожье, 69035, Украина

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ ТОЧКИ ПО СФЕРЕ

Введение. Существует целый ряд объектов управления, движение которых в пространстве можно интерпретировать как движение точки по сфере заданного радиуса. Как пример такого движения можно привести угловое движение космического аппарата (КА). Если для описания углового движения КА использовать кватернион ориентации и его производную, то угловое движение можно представить в виде движения точки по единичной сфере в пространстве R^4. При управлении такими объектами представляют интерес методы решения задач управления движением точки по единичной сфере в пространстве R^n.

Целью статьи является разработка методов решения следующих задач управления движением точки по сфере: задачи стабилизации движения точки по сфере относительно программной траектории; задачи о быстродействии при движении точки по сфере; задачи терминального управления.

Основным результатом являются методы решения различных задач управления движением точки вдоль сферы.

Выводы. В работе с использованием основных свойств движения точки по сфере приведены решения следующих задач управления: задачи стабилизации движения точки по сфере относительно программной траектории; задачи о быстродействии при движении точки по сфере; задачи терминального управления. Применение полученных результатов продемонстрировано на примере решения задачи стабилизации углового движения космического аппарата относительно заданной опорной системы координат. Полученные результаты могут быть полезны при разработке различных систем управления, в том числе систем управления угловым движением КА.

Ключевые слова: *сфера, управление, проекция точки, кватернион.*