КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.21

И.Н. ПАРАСЮК, М.Ф. КАСПШИЦКАЯ

РАЗМЫТЫЙ АЛГОРИТМ МЕТОДА ВЕКТОРА СПАДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ НА ВЫБОРКАХ

Предложен класс нечетких алгоритмов метода вектора спада. Принципиальное отличие их состоит в представлении окрестностей, в которых действует метод, системой размытых множеств (окрестностей), что значительно расширило область применения алгоритмов. Приведены результаты исследований относительно конкретного класса задач комбинаторной оптимизации – оптимизационных задач на выборках.

Введение. Применение понятий и методов размытой математики позволяет значительно расширить круг решаемых практических задач, которые либо не поддаются решению средствами четкой математики, либо такое решение является слишком сложным и проблематичным. Эффективнее в этом плане могут быть так называемые размытые алгоритмы, которые можно применять для работы как в четком, так и в размытом информационном пространствах. Под нечетким алгоритмом вообще понимаем такой алгоритм, результатом которого является нечеткий математический объект – нечеткое число, нечеткое множество и т. п.

В работе [1] предложен класс нечетких алгоритмов метода вектора спада (МВС). Суть заключается в представлении системы окрестностей, в которых действует метод, системой размытых множеств (окрестностей). Это дало возможность значительно расширить область применения алгоритмов. В данной работе продолжаются исследования, начатые в [1], относительно конкретного класса задач комбинаторной оптимизации – оптимизационных задач на выборках.

Постановка задачи. Исследуем класс оптимизационных задач на выборках, общая формулировка которого звучит так.

Пусть задано конечное целочисленное множество $A = \{a_i\}_{i=1}^{n}$. Обозначим X={x} – множество всех подмножеств множества A.

Общая задача (основная) заключается в следующем. Нужно найти такой елемент $x^*\in X$, который предоставляет экстремум функции $F(x)$ при выполнении условия $U(x^*)\le C$.

Кроме этого, пусть задана матрица $\tilde{A} = \left\| \alpha(a_i, a_j) \right\|_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{n}$, которая характеризует связи (влияния) между элементами a_i, a_j; будем считать, что $0 \le \alpha(a_i, a_j) \le 1$ Понятно, что если некоторые a_{i_0}, a_{j_0} не связаны или эти связи не учитываются при формулировке задачи, то соответствующие $\alpha(a_{i_0}, a_{j_0}) = 0$.

Если такое предостережение касается всех элементов множества A, то соответствующая матрица связей вырождается в нуль-матрицу. В допущении этой работы матрица $\widetilde{A}$ имеет ненулевые элементы.

Заметим, что матрица $\widetilde{A}$ может быть употреблена для построения целевой функции $F(x)$ и ограничивающих условий $U(x)$, что будет проиллюстрировано дальше на примере двух типов задач.

Рассмотрим общую формулировку задачи. Отметим, что эта задача уже изучалась, относительно нее разработан алгоритм МВС, основывающийся на системе окрестностей, которые строятся на основе использования метричности пространства выборок X [1]. Расстоянием между двумя точками $x_1, x_2 \in X$ выбиралась величина $d(x_1, x_2) = |(x_1 \cup x_2)\backslash(x_1 \cap x_2)|$. Символ $|a|$ означает мощность множества a. Как отмечено в работе [2], этот алгоритм является индифферентным относительно условий задачи.

Будем считать, как и в работе [2], что система окрестностей в алгоритме МВС, адаптированном к рассмотренной задаче, является системой размытых множеств (окрестностей). Понятно, что эта система определяется совокупностью функций принадлежности (пример такой функции приведен в [2]). Отметим, что при построении указанных функций принадлежности использовалось множество $(x_1 \cup x_2)\backslash(x_1 \cap x_2)$, которое играло основную роль при построении классического алгоритма метода МВС. В этой работе рассмотрены функции принадлежности, основанные на других соображениях.

Элементы матрицы $\widetilde{A}$ могут входить в определение функций $F(x)$ и $U(x)$ или играть вспомогательную роль, как это было при определении функций принадлежности в работах [2, 3]. Здесь не выделены носители функций принадлежности, они определялись как элементы универсума X, предоставляющие функции принадлежности ненулевые значения. Впрочем, если универсум X имеет большую мощность, то целесообразно вводить ограниченный определенным образом носитель. Например, носитель можно определить как подмножество, что предоставляет позитивное значение функции принадлежности $\mu(x)$, если x принадлежит одному из подмножеств, полученных следующим образом:

1. Из точки x_0 удаляем поочередно по одному элементу, заменяя его на элементы из множества $A\backslash x_0$. Мощность носителя в этом случае не превышает $|x_0|\cdot|A\backslash x_0|$.

2. Из точки x_0 удаляем поочередно по одному элементу, заменяя двумя из множества $A\backslash x_0$. Максимальное количество таких образований будет $|x_0|\dfrac{|A\backslash x_0|\cdot(|A\backslash x_0|-1)}{2}$. Понятно, что мощность соответствующего носителя не будет превышать вышеуказанное число.

3. Из точки x_0 удаляем по два элемента, заменяя их одним элементом из множества $A\backslash x_0$. Таких элементов будет $\dfrac{|x_0|\cdot(|x_0|-1)}{2}\cdot|A\backslash x_0|$; мощность носителя ограничена сверху этим числом. Здесь, как и выше, x_0 – некоторый фиксированный элемент пространства X.

Возможны и другие варианты. Следует отметить, что в большинстве указанных в работах [1–3] случаях построение носителя и соответствующей функции принадлежности ведется ориентировочно к физическому содержанию решения задачи. Если такую ориентацию не проводить, то лучше воспользоваться одним из индифферентных алгоритмов.

Прежде чем рассмотрим основной аспект данной работы – решение одного класса комбинаторных задач вариантом размытого алгоритма МВС, приведем еще два примера функций принадлежности. Считаем $F(x) \ge 0$, $x \in X$.

При выполнении условия $U(x_0) \le C$

$$\mu(x,x_0) = \begin{cases} 1-\dfrac{F(x)}{F(x_0)}, & \text{если } F(x)\le F(x_0) \text{ и } U(x)\le C, \\ 0, & \text{если } F(x) > F(x_0), \\ 0, & \text{если } U(x) > C. \end{cases} \tag{1}$$

Если $U(x_0)>C$, то целесообразно воспользоваться функцией принадлежности

$$\mu(x,x_0) = \begin{cases} 1-\dfrac{F(x)}{F(x_0)}, & \text{если } F(x)\le F(x_0) \text{ и } U(x)\le C, \\ 0, & \text{если } F(x) > F(x_0), \\ 0, & \text{если } U(x))\ge U(x_0), \\ \max\left(1-\dfrac{F(x)}{F(x_0)}, \dfrac{U(x)-C}{U(x_0)-C}\right), & \text{если } C < U(x) < U(x_0). \end{cases} \tag{2}$$

Алгоритм МВС, использующий функцию принадлежности (2), „затягивает" текущие локальные экстремумы в область допустимых решений. Таким образом, исчезает необходимость поиска начального допустимого решения. В этом случае достаточно задать любую точку $x_0 \in X$.

Отметим, что признаком окончания вычислительного процесса на некотором шаге n_0 при вышесделанных допущениях относительно определенности функции принадлежности на всем универсуме X, является выполнение тождества $\mu(x, x_{n_0}) \equiv 0$ при всех $x \in X$, $x \neq x_{n_0}$. В частности, относительно функций принадлежности (1) и (2) имеем: если $1 - \dfrac{F(x)}{F(x_0)} \leq 0$, то, чтобы выражение $\max\left(1 - \dfrac{F(x)}{F(x_0)}, \dfrac{U(x) - C}{U(x_0) - C}\right)$ было отрицательным или равным нулю, необходимо, чтобы $\dfrac{U(x) - C}{U(x_0) - C}$ тоже было тождественно равно (или меньше) нуля. Учитывая вышесделанное допущение $U(x_{n_0}) > C$, необходимо, чтобы $U(x) - C \leq 0$, т. е. $U(x) \leq C$. Таким образом, тождество $\mu(x, x_{n_0}) \equiv 0$ является признаком локального решения.

Вообще говоря, можно доказать, что получить (гарантировано) глобальное решение можно только в случае, когда носителем является весь универсум X.

Рассмотрим три задачи.

Задача 1. Найти подмножество $m \leq n$ элементов множества A, имеющее наименьшую суммарную связь с другими элементами этого множества; m – фиксированное число.

Задача 2. Найти подмножество $m \leq n$ элементов множества A, имеющее наибольшую суммарную связь всех элементов, принадлежащих этому подмножеству.

Отметим, что задачи 1 и 2 широко применяются при построении приближенных алгоритмов решения основной задачи классификации.

Задача 3. Найти кратчайший путь из точки a_{i_0} в точку a_{j_0}. Исходя из содержания задач 1, 2 и 3, их уместно формализировать на множестве X, которое является множеством всех подмножеств множества A.

Следовательно, задача 1: найти подмножество $x^* \subset A$, которое предоставляет минимум функции

$$F(x) = \sum_{a_i \in x} \sum_{a_j \in A \setminus x} d(a_i, a_j), \tag{3}$$

при условии $|x| = m$.

Примем, что расстояние $d(a_i, a_j)$ равно элементу α_{ij} матрицы $\widetilde{A}$ или длине любой цепи, что соединяет элементы a_i и a_j . Понятно, что вообще таких „расстояний" будет одно, несколько или связь между элементами a_i, a_j отсутствует. В последнем случае точки a_i, a_j будем считать изолированными и положим $d(a_i,a_j) = \infty$. Отметим также, что матрица $\widetilde{A}$ не является симметричной, т. е. $\alpha_{ij} \neq \alpha_{ji}$. Этот факт следует учитывать в последующих вычислениях.

Для наглядности в задачах 1 и 2 допустим, что $d(a_i,a_j) = \alpha_{ij}$. Суть МВС при данных допущениях заключается в следующем.

1. Выбираем некоторое подмножество x_0 $|x_0|=m$. Определяем все возможные суммарные связи между элементами этого множества и элементами множества $A\backslash x_0$ и выбираем наилучший. (Можно определить не все, только некоторые из них и выбрать „лучший", но это нужно исследовать отдельно, поскольку здесь МВС будет применяться на двух этапах: выбор окрестности для нахождения x и выбор „лучшей стратегии" в окрестности). Соответствующее значение целевой функции будет $F(x_0)$.

2. Определим функцию принадлежности, от удачного выбора которой будет зависеть как точность полученного решения, так и время, ограниченное на его определение. Очевидно, что когда можно предложить функцию принадлежности „созвучную" задаче (адекватную), то решение задачи будет проходить более успешно. Следовательно, руководствуясь этими рассуждениями, предложим такие функции принадлежности.

Для небольших m, т. е. таких, для которых может быть выполнен полный перебор

$$\mu(x, x_0)=\frac{1}{2(m-1)}\min\sum_{\forall a_i\in x}\ \sum_{\forall a_j\in A\backslash x}\alpha_{ij}\,, \quad x\in\Omega(x_0). \tag{4}$$

Для больших m выбираем $m_0 < m$, таких $a_i \in X$, для которых соответствующие α_{ij} не меньше заданной величины $\alpha(x)$, и обозначим это множество $x(m_0)$. Тогда

$$\mu_{m_0}(x, x_0)=\frac{1}{2(m_0-1)}\min\sum_{\forall a_i\in x(m_0)}\ \sum_{\forall a_j\in A\backslash x(m_0)}\alpha_{ij}. \tag{5}$$

Областью определения $\Omega(x_0)$ функции принадлежности $\mu(x,x_0)$ будем считать все множество X подмножеств множества A, или ее часть, например, подмножество, элементы которого образуются путем замены каждого элемента $a_i\in x_0$ на элемент из множества $A\backslash x_0$. Количество таких точек будет $|x_0| \cdot |A\backslash x_0|$. Конечно, второй случай при значительных мощностях множества A (следовательно, и множества X) является более целесообразным с практической точки зрения. Область определения $\Omega(x_0)$ вычисляет носитель функции принадлежности $\mu(x,x_0)$, если из нее исключить точки, придающие этой функции нулевое значение. Обозначим его $\widetilde{\Omega}(x_0)$ и будем считать окрестностью точки x_0.

3. Следующий шаг в решении задачи A – нахождение минимума функции $F(x)$, определенной по формуле (3) в окрестности $\widetilde{\Omega}(x_0)$. Как следует из определения функции $F(x)$, между каждой парой точек $a_i \in x$ и $a_j \in A \backslash x$ находим кратчайшее из возможных расстояний, а затем – сумму всех таких расстояний $d(a_i, a_j)$. Напомним, что x принадлежит $\widetilde{\Omega}(x_0)$. Нахождение кратчайшего расстояния между парой точек a_i, $a_j \in A$ – задача достаточно сложная и этот вопрос дальше будет рассматриваться отдельно. Пока ограничимся случаем $d(a_i, a_j) = \alpha_{ij.}$ Отдельно рассмотрим случай, когда α_{ij} (элементы матрицы A) – величины размытые.

4. Полученный в п. 3 элемент, предоставляющий $F(x)$ минимум в окрестности $\widetilde{\Omega}(x_0)$ обозначим x_1 и возвращаемся к п.3, заменив x_0 на x_1.

5. Вычисление прекращаем, когда полученный на некотором шаге k итерационного процесса, который описывается пп. 3 и 4, элемент x_k совпадает с элементом $x_{k\text{-}1}$, полученным на предыдущем витке итерации, или решение x_k удовлетворяет требованиям пользователя.

Заметим, что в случае, когда вычислительный процесс прекратился, однако полученное решение не удовлетворяет, можно вычисление продолжить, изменив соответствующим образом функцию принадлежности.

Как вытекает с вышеупомянутого, элемент $x \in \widetilde{\Omega}(x_0)$ принадлежит размытому множеству $\widetilde{\Omega}(x_0)$ и характеризуется функцией принадлежности $\mu(x, x_0)$. Следовательно, $F(x, x_0)$ как функция от размытой величины будет также размытой величиной с определенной функцией принадлежности $\nu(F(x, x_0), \mu(x, x_0))$, которая определяется соответственно принципу обобщения [4].

Задачу 1 рассмотрим в двух аспектах: матрица

$$\widetilde{A} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \left| \begin{array}{ccccccc} 0 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}8 & 0{,}1 & 0 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0 & 0 & 0{,}3 & 0 & 0{,}7 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}9 & 0 & 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0.3 & 0 & 0{,}1 & 0 & 0{,}9 & 0{,}7 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}8 & 0{,}3 & 0 \end{array} \right|$$

будет представлена четкими числами и размытыми треугольными числами. Для четкой матрицы $\widetilde{A}$ используем классический вариант МВС и вариант МВС, который определяется функцией принадлежности

$$\mu(x,x_0) = \begin{cases} 1 - \min\alpha_{ij}, a_i \in x,\ a_j \in A \setminus (x, x_0),\ \text{если}\ \ x \in \tilde{\Omega}(x_0), \\ 0,\ \ \text{если}\ \ x \,\overline{\in}\, \tilde{\Omega}(x_0) \end{cases}$$

при $\mu(x, x_0) > 0{,}9$.

Данные расчетов относительно первых двух случаев представлены в табл. 1, 2. Третий случай рассмотрен детально.

ТАБЛИЦА 1. Решение задачи 1 классическим вариантом МВС

Номер итерации k	Окрестность			
	x_0	$\tilde{\Omega}(x_0)$	$F(x^*)$	x_0^*
1	(a_1,a_5,a_6)	$\{(a_1,a_5,a_6)$, (a_2,a_5,a_6), (a_1,a_2,a_6), (a_1,a_5,a_2), (a_3,a_5,a_6), (a_1,a_3,a_6), (a_1,a_5,a_3), (a_4,a_5,a_6), (a_1,a_4,a_6), (a_1,a_5,a_4), (a_7,a_5,a_6), (a_1,a_7,a_6), $(a_1,a_5,a_7)\}$	3,2	(a_1,a_5,a_4) (a_7,a_5,a_6)
2	(a_1,a_5,a_4) (a_7,a_5,a_6)	$\{(a_2,a_5,a_4)$, (a_1,a_2,a_4), (a_3,a_5,a_4),(a_1,a_3,a_4), (a_1,a_5,a_6), (a_7,a_5,a_4), (a_1,a_7,a_4), (a_7,a_2,a_4), (a_7,a_3,a_6), (a_7,a_5,a_6), $(a_7,a_4,a_6)\}^{*)}$	3,2	(a_1,a_5,a_4) (a_7,a_5,a_6)

ТАБЛИЦА 2. Данные вычислений по МВС при $\mu(x,x_0) = \begin{cases} 1 - \min\alpha_{ij},\ \ x \in \tilde{\Omega}(x_0) \\ 0,\ \ x \,\overline{\in}\, \tilde{\Omega}(x_0) \end{cases}$

при $\mu(x,x_0) \geq 0{,}9$

Номер итерации k	Окрестность			
	x_0	$\tilde{\Omega}(x_0)$	$F(x^*)$	x_0^*
1	(a_1,a_5,a_6)	$\{(a_1,a_5,a_6)$, (a_2,a_5,a_6), (a_1,a_2,a_6), (a_3,a_5,a_6), (a_1,a_3,a_6), (a_1,a_5,a_3), (a_4,a_5,a_6), (a_1,a_4,a_6), (a_1,a_5,a_4), (a_7,a_5,a_6), (a_1,a_7,a_6), (a_1,a_5,a_7), $(a_1,a_5,a_4)\}$	3,2	(a_1,a_5,a_4) (a_7,a_5,a_6)
2	(a_1,a_5,a_4) (a_7,a_5,a_6)	$\{(a_2,a_5,a_4)$, (a_1,a_2,a_4), (a_3,a_5,a_4),(a_1,a_3,a_4), (a_1,a_5,a_6), (a_7,a_5,a_4), (a_1,a_7,a_4),(a_7,a_2,a_4), $(a_7,a_4,a_6)\}^{*)}$	3,2	(a_7,a_5,a_6)

В прикладных задачах часто возникает ситуация, когда элементы матрицы $\tilde{A}$ являются размытыми числами. Например, задача классификации, рассмотренная в [2], – подтверждение вышеизложенного, а задача 3 может быть рассмотрена как „стилизованная" задача классификации.

Следовательно, пусть элементы матрицы $\widetilde{A}$ – нечеткие числа. Таким образом, значение целевого функционала и ограничивающих функционалов тоже являются нечеткими, т. е. относительно задачи 1 функционал

$$F(x)= \sum_{\forall a_1 \in x} \sum_{\forall a_k \in A \setminus x} \alpha_{lk} \tag{6}$$

является нечетким числом, а ограничивающее условие $|x|=m$ будет звучать так: „$|x|$ приблизительно равен m", или, уточнено „$|x|$ не более $m \pm k$", где k – целое число, заданное ОПР.

Будем считать что α_{lk} является нечетким треугольным числом, т. е. таким, у которого график функции принадлежности приобретает вид треугольника с ядром core(α_{lk})= α_{lk}, где α_{lk} соответствующий четкий элемент таблицы $\widetilde{A}$, а носитель состоит из двух равных отрезков длиной β_{lk}, т.е. boun(α_{lk},)= β_{lk} (см. рис. 1, 2, а также [4]).

Примем β_{lk} = 0,1α_{lk}. При таких условиях для (6) ядро core($F(x)$) = $= \sum_{\forall a_1 \in x} \sum_{\forall a_k \in A \setminus x} \dot{\alpha}_{lk}$, а носитель sup$F(x)$=[$\sum_{\forall a_1 \in x} \sum_{\forall a_k \in A \setminus x} 0{,}9\dot{\alpha}_{lk}$, $\sum_{\forall a_1 \in x} \sum_{\forall a_k \in A \setminus x} 1{,}1\dot{\alpha}_{lk}$], $l = 1, 2, \ldots, |x|$, $k=1, 2, \ldots, A \setminus |x|$.

Поскольку треугольное нечеткое число является частным случаем нечеткого числа (L–R)-типа, то арифметические операции над треугольными числами $a_\Delta^i=(a^i, \alpha^i, \beta^i)$, I = 1, 2 осуществляются как над нечеткими числами (L–R)-типа: $a_\Delta^1 + a_\Delta^2 =< c, \delta, \gamma)$, где $c = a_1 + a_2$, $\delta = \alpha_1 + \alpha_2$, $\gamma = \beta_1 + \beta_2$, $a_\Delta^1 - a_\Delta^2 = < c, \delta, \gamma)$, где $c = a_1 - a_2$, $\delta = \alpha_1 + \beta_2$, $\gamma = \beta_1 + \alpha_2$.

Операции умножения и деления нечетких чисел (L–R)-типа определяются при выполнении некоторых дополнительных условий.

Расширенный максимум треугольных чисел a_Δ^1 і a_Δ^2 характеризуется такими параметрами: a=max{a_1,a_2}, $\alpha = a$-max{a_1–α_1, a_2–α_2}, β=max{a_1+β_1, a_2+β_2}–a.

Расширенный минимум треугольных чисел a_Δ^1, a_Δ^2: a=min{a_1,a_2}, $\alpha = a$–min{a_1–α_1, a_2–α_2}, β=min{a_1+β_1, a_2+β_2}–a.

В случае k чисел, a_Δ^i, i=1, . . . , k, имеем: для расширенного максимума a=max{a_1,a_2, . . .,k}, $\alpha = a$-max{a_1–α_1, a_2–α_2, . . ., a_k–α_k}, β=max{a_1+β_1, a_2+β_2, . . , . . . , a_k+α_k}–a; для расширенного минимума a=min{a_1,a_2, . . . ,k}, α = = a–min{a_1 – α_1, a_2 –. . .α_2, . . . , a_k–α_k}, β = min{a_1+β_1, a_2+β_2, . . . , a_k+α_k} – a. В частности, значение целевой функции $F(x)$ при $x = x_0$=(a_1, a_5, a_6)., согласно допущениям, сделанным в этом примере, о размытости чисел α_{ij} матрицы $\widetilde{A}$, является треугольным размытым числом.

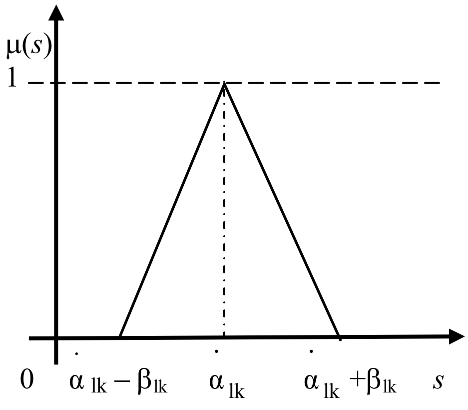

РИС. 1. Пример нечеткого треугольного числа

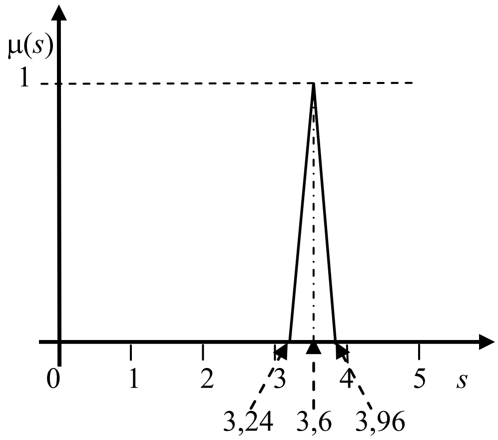

РИС. 2. Треугольное размытое число $F_1^{\Delta}(x_0)$ к примеру 3

$F_1^{\Delta}(x_0) = (\alpha_{12}+\alpha_{13}+\alpha_{14}+\alpha_{17}) + (\alpha_{52}+\alpha_{53}+\alpha_{54}+\alpha_{57}) + (\alpha_{62}+\alpha_{63}+\alpha_{64}+\alpha_{67})$, которое определяется параметрами $a(x_0) = (\dot{\alpha}_{12}+\dot{\alpha}_{13}+\dot{\alpha}_{14}+\dot{\alpha}_{17}) + (\dot{\alpha}_{52}+\dot{\alpha}_{53}+\dot{\alpha}_{54}+\dot{\alpha}_{57}) +$
$+(\dot{\alpha}_{62}+\dot{\alpha}_{63}+\dot{\alpha}_{64}+\dot{\alpha}_{67}) = (0{,}5+0{,}1+0{,}2+0{,}1) + (0+0{,}3+0{,}6+0{,}8) + (0{,}3+0+0{,}4+0{,}3) =$
$= 0{,}9+1{,}7+1{,}0=3{,}6;$

$\gamma(x_0) = \delta(x_0) = (0{,}1\,\dot{\alpha}_{12}+0{,}1\,\dot{\alpha}_{13}+0{,}1\,\dot{\alpha}_{14}+0{,}1\,\dot{\alpha}_{17}) + (0{,}1\,\dot{\alpha}_{52}+0{,}1\,\dot{\alpha}_{53}+0{,}1\,\dot{\alpha}_{54}+0{,}1\,\dot{\alpha}_{57}) +$
$+ (0{,}1\,\dot{\alpha}_{62}+0{,}1\,\dot{\alpha}_{63}+0{,}1\,\dot{\alpha}_{64}+0{,}1\,\dot{\alpha}_{67}) = 0{,}1\,a(x_0) = 0{,}1\cdot 3{,}6 = 0{,}36.$

При этих допущениях проследим расчеты примера 1. Заметим, что значение $F(x)$ будет нечетким числом. Чтобы не осложнять расчетов, оставим число m четким. Допущение о нечеткости m не изменит существенно алгоритма решения задачи, однако несколько осложнит его.

Следовательно, как и в примерах 1, 2 положим $x_0 = (a_1, a_5, a_6)$; $A\backslash x_0 = (a_2, a_3, a_4, a_7)$; $n = 7$; $m = 3$.

$\widetilde{\Omega}(x_0) = \{(a_1, a_5, a_6); (a_2, a_5, a_6); (a_1, a_2, a_6); (a_1, a_5, a_2); (a_3, a_5, a_6); (a_1, a_3, a_6); (a_1, a_5, a_3); (a_4, a_5, a_6); (a_1, a_4, a_6); (a_1, a_5, a_4); (a_7, a_5, a_6); (a_1, a_7, a_6); (a_1, a_5, a_7)\}.$

Аналогично для всех других точек окрестности $\widetilde{\Omega}(x_0)$, воспользовавшись вышепроведенными вычислениями, имеем

$F^{\Delta}(x_0^1) = F^{\Delta}(a_2, a_5, a_6)$ = <4,5; 0,45; 0,45>; $F^{\Delta}(x_0^2) = F^{\Delta}(a_1, a_2, a_6)$ = <4,1; 0,41;0,41>;

$F^{\Delta}(x_0^3) = F^{\Delta}(a_1, a_5, a_2$ = <4,2; 0,42; 0,42>; $F^{\Delta}(x_0^4) = F^{\Delta}(a_3, a_5, a_6)$ = <5,5; 0,55; 0,55>;

$F^{\Delta}(x_0^5) = F^{\Delta}(a_1, a_3, a_6)$ = <5,4; 0,54; 0,54>; $F^{\Delta}(x_0^6) = F^{\Delta}(a_1, a_5, a_3)$ = <5,6; 0,56; 0,56>;

$F^{\Delta}(x_0^7) = F^{\Delta}(a_4, a_5, a_6)$ = <3,5; 0,35; 0,35>; $F^{\Delta}(x_0^8) = F^{\Delta}(a_1, a_4, a_6)$ = <3,5; 0,35; 0,35>;

$F^{\Delta}(x_0^9) = F^{\Delta}(a_1, a_5, a_4)$ = <3,2; 0,32; 0,32>; $F^{\Delta}(x_0^{10}) = F^{\Delta}(a_7, a_5, a_6)$ = <3,2; 0,32; 0,32>;

$F^{\Delta}(x_0^{11}) = F^{\Delta}(a_1, a_7, a_6)$ = <4,6; 0,46; 0,46>; $F^{\Delta}(x_0^{12}) = F^{\Delta}(a_1, a_5, a_7)$; $\mu(x_0^{12})$ =
= <3,7; 0,37; 0,37>.

В случае нечетких данных матрицы $\widetilde{A}$ получим

$$\min_{x \in \widetilde{\Omega}(x_0)} F^{\Delta}(\mathrm{x}) = <3{,}2;\ 3{,}2–3{,}2+032;\ 3{,}2+0{,}32–3{,}2> = <3{,}2;0{,}32;0{,}32>.$$

Таким образом, решением задачи 1 при нечетких значениях элементов матрицы $\widetilde{A}$ и других допущениях, сделанных выше, точками локального экстремума в окрестности $\widetilde{\Omega}(x_0)$ остаются множества $x_0^9 = \{a_1, a_5, a_4\}$, $x_0^{10} = \{a_7, a_5, a_6\}$ со значениями целевой функции $F^{\Delta}(x_0^9) = F^{\Delta}(x_0^{10})$ = < 3,2; 0,32; 0,32>.

Аналогичные действия проводятся на следующих итерациях МВС. Если для определения окрестности воспользоваться функцией принадлежности, например,

$$\mu(x,x_0) = \begin{cases} \max\limits_{\substack{a_i \in x \\ a_j \in A \setminus x}} \alpha_{ij}, & x \in \widetilde{\Omega}(x_0), \\ 0, \text{ если } & x \,\overline{\in}\, \widetilde{\Omega}(x_0), \\ 0, \text{ если } & \max\limits_{\substack{a_i \in x \\ a_j \in A \setminus x}} \alpha_{ij}, \le 0{,}5, \quad x \in \widetilde{\Omega}(x_0), \end{cases}$$

то в этом случае сокращается перебор в окрестности $\widetilde{\Omega}(x_0)$. Решение остается таким, как и в предыдущих случаях.

В случае треугольных нечетких чисел вычисления значительно упрощаются по сравнению, например, с нечеткими числами, представленными колоколообразными функциями принадлежности. В связи с этим следует заметить также, что треугольные нечеткие числа часто используются при решении практических нечетких задач.

Отметим также основные положительные моменты введения расширенного понятия окрестности:

1) в случае четкой функции принадлежности, как функции характеристической, получим возможность разработки схем новых алгоритмов;

2) в случае четкой функции принадлежности со значениями в интервале [0,1], кроме позитива, отмеченного в п. 1), получаем возможность сокращения перебора значений критерия в окрестности;

3) если функция принадлежности является нечеткой, то, кроме 1) и 2), значительно расширяется спектр практических задач, которые можно решить МВС.

Представленный в этой работе вариант МВС при надлежащем определении функции принадлежности может обобщать другие известные методы. Например, пусть задан ряд функций, удовлетворяющих определению функций принадлежности

$$\mu(x,x_0),\ \mu(x,x_1),\ldots,\mu(x,x_k),\ldots,$$

где $x\in X$; $x_i\in X$, i=0,1,..,k являются параметрами. Пусть основной вариант МВС действует в окрестностях $\Omega(x_0)$, $\Omega(x_1)$, . . . , $\Omega(x_k)$, где x_i – локальные решения определенной задачи в окрестности $\Omega(x_{i-1})$. Обозначим $S_i=\Omega(x_0)\cup\Omega(x_1)\cup\ldots\cup\cup\,\Omega(x_{i-1})\cup\Omega(x_i)$. Тогда функция принадлежности $\nu(x,x_i)$, что определяет окрестности $\widetilde{\Omega}(x_i)$, примет вид

$$\nu(x,x_i)=\begin{cases}\mu(x,x_i), & \text{если } x\,\overline{\in}\,S_i,\\ 0, & \text{если } x\in S_i.\end{cases}$$

Таким образом определен один из вариантов метода запретов [5].

Заключение. Так как большинство практических задач формулируются в нечеткой математической среде, то разработка нечетких алгоритмов для их решения весьма целесообразна в связи с тем, что переход к четким моделям приводит к частичной потере информации, а это отрицательно сказывается на точности полученных решений. С другой стороны, многие нечеткие задачи вообще не могут быть представлены в четком виде. Наглядным примером может служить одна из задач, возникающих в растениеводстве [6].

І.М. Парасюк, М.Ф. Каспшицька

РОЗМИТИЙ АЛГОРИТМ МЕТОДУ ВЕКТОРА СПАДУ ДЛЯ РІШЕННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ НА ВИБОРКАХ

Запропоновано клас нечітких алгоритмів методу вектора спаду, принципова відмінність якого полягає у представленні околів, в яких діє метод, системою розмитих множин (околів), що значно розширило область застосування алгоритмів. Отримані результати досліджень щодо конкретного класу задач комбінаторної оптимізації – оптимізаційних задач на виборках.

I.N. Parasyuk, *M.F. Kaspschicka*

FUZZY ALGORITHM FOR SLUMP-VECTOR METHOD FOR SOLVING OPTIMIZATION PROBLEMS ON SAMPLES

A class of fuzzy algorithms for slump-vector method is proposed. The main feature of these algorithms is the representation of the neighborhoods of method's operation by the system of fuzzy sets (neighborhoods), that considerably extends the range of application of the algorithms. The results of investigation of a particular class of combinatorial optimization problems, i.e., sample optimization problems, are presented.

1. *Парасюк И.Н.*, *Каспшицкая М.Ф.* О развитии метода вектора спада на случай размытых окрестностей // Компьютерная математика. – 2008. – № 2. – С . 145–155.
2. *Каспшицкая М.Ф.*, *Парасюк И.Н.* О некоторых классах размытых задач классификации: формализация, методы решения // Компьютерная математика. – 2004. – № 1. – С. 73–90.
3 *Каспшицкая М.Ф.*, *Глушкова В.В.* О формализации некоторых задач выбора и принятия решений в математической среде // Компьютерная математика. – 2006. – № 2. – С. 19–31.
4. *Леоненков А.В.* Нечеткое моделирование в среде MATLAB u fuzzy TECH. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2005. – 736 с.
5. *Сергиенко И.В.*, *Шило В.П.* Задачи дискретной оптимизации.–Киев: Наук. думка, 2003. – 259 с.
6. *Сыч З.*, *Бобось И.*, *Гопчак В.* Как правильно выбрать сорт // Овощеводство. – 2008. – № 4. – С. 18–23; № 5. – С. 12–17.

Получено 26.11.2008

Об авторах:

Парасюк Иван Николаевич,
член-корреспондент НАН Украины, заведующий отделом
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины,
E-Mail: *ivpar1@i.com.ua*

Каспшицкая Мария Фадеевна,
кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.