КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

Теория и методы оптимизации

УДК 519.8

Л.Ф. ГУЛЯНИЦКИЙ, С.И. СИРЕНКО

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ВНЕШНЕГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ДОЛГА УКРАИНЫ

Сформулировано и формализировано проблему оптимизации объемов внешнего государственного долга Украины. Проанализировано сложность задачи и разработано ряд приближенных алгоритмов для ее решения. Реализованные алгоритмы исследованы экспериментально с целью разработки рекомендаций относительно их практического применения.

Введение. Для повышения эффективности управления обслуживанием внешнего государственного долга, его сокращения и уменьшения отрицательного влияния на бюджетный дефицит необходим государственный контроль за показателями долговой зависимости, которые определяются путем сопоставления объема задолженности и платежей по ней с величиной ВВП и объемом экспорта.

В случае отсутствия контроля за долговыми последствиями текущего привлечения средств может возникать недопустимо высокая концентрация долговых обязательств в определенные (хотя и достаточно короткие) моменты времени в будущем. Поэтому контроль за процессом текущего привлечения средств допускает выбор и выполнение таких условий их привлечения, которые бы в совокупности порождали минимально возможную неравномерность распределения долговых обязательств в будущем.

Несмотря на важность проблемы для управления экономикой Украины [1, 2], вопросам математического ее моделирования посвящено мало работ [3, 4].

В данной работе формализована в виде модели комбинаторной оптимизации проблема оптимального обслуживания внешнего государственного долга Украины с учетом ряда показателей имеющихся займов (объемов, сроков погашения и отсрочки выплат, процентных ставок и т.д.). Описан ряд реализованных приближенных алгоритмов ее решения. Проведен вычислительный эксперимент по сравнению реализованных алгоритмов.

Постановка проблемы. Имеем займы (зарубежные кредиты), которые определяют объемы выплат в каждый из будущих периодов, на которые разделяется весь срок планирования, – горизонт планирования. Считаем известными (закрепленными законодательно или прогнозируемыми) объемы средств, которые Правительство может выделить в каждом периоде на погашение кредитов из собственных (бюджетных) ресурсов.

Накопление выплат по существующим займам приводит к ситуации, когда в некоторые промежутки времени объемы выплат кредиторам могут превышать возможности госбюджета относительно их погашения. Одним из наиболее распространенных способов решения этой проблемы являются новые займы. Существует несколько возможных типов внешних займов, каждый из которых имеет свои характеристики (возможный объем кредита, сроки предоставления и отсрочки первой уплаты, процентная ставка и т.п.). Задача состоит в таком выборе типов кредитов и определении их характеристик, при которых минимизируются определенные критерии и выполняется ряд ограничивающих условий.

Формализация модели. Пусть известны имеющиеся на данный момент типы возможных займов. Примерами являются кредиты международных финансовых учреждений, правительств других стран или зарубежных коммерческих учреждений, банков. Обозначим K число возможных типов кредитов, которые возможно взять у зарубежных финансовых учреждений.

Обозначим T плановый горизонт, т.е. число месяцев (периодов), на которые осуществляется планирование; пусть L_t – множество номеров месяцев, которые относятся к году $t, t = 1,2,...P$, P – число календарных лет, месяцы которых входят в плановый горизонт. Таким образом предполагается, что планирование осуществляется на плановый горизонт, который состоит из одного или нескольких лет, причем первый и / или последний из них может быть неполным.

Каждый возможный тип кредита i, $i = 1, \dots, K$, можно охарактеризовать такими показателями: Q_i – объем кредита; T_i – продолжительность действия кредитного соглашения; τ_i – срок отсрочки его обслуживания; r_i – процентная ставка; $\varphi_{ij}\left(Q_i, T_i, r_i, \tau_i\right)$ – функция, которая определяет распределение выплат в периоды погашения кредита $j, j = 1,...,T$.

Не исключаются случаи, когда указанные параметры определяются путем указания соответствующих минимально и максимально допустимых значений.

Дополнительно считаются известными:

1) необходимые выплаты по уже взятым ранее кредитам: $v_1,...v_T$;

2) средства из госбюджета и других внутренних источников $w_1,\dots,w_T$, которые могут быть направлены Правительством на погашение долга (абсолютные величины; процент от ВВП; процент от экспорта);

3) законодательно установленные ограничения на максимальный объем займов O_t, который разрешается сделать Правительству в год t, $t = 1,...,P$ (если некоторый календарный год не полностью входит в плановый горизонт,

то соответствующая величина O_t перерассчитывается относительно лишь того числа месяцев года, которые включены в плановый горизонт).

Вариант решения задачи опишем в виде прямоугольной матрицы $x = \left(x_{ij}\right)_{K \times T}$, где x_{ij} – это объем средств по кредиту i, который направляется на погашение задолженности в период j, $i = 1,...,K$, $j = 1,...,T$.

Тогда компоненты целевой функции, которые определяют степень эффективности займов, можно записать так:

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{T}\varphi_{ij}, \; f_2(x) = \sum_{j=1}^{T}\left(\max\{v_j + u_j - w_j - \sum_{i=1}^{K} x_{ij} - \delta_j, 0\}\right)^2, \quad (1)$$

где u_j – это объем фактических выплат по новым кредитам в период j, $u_j = \sum_{i=1}^{K}\varphi_{ij}(Q_i, T_i, r_i, \tau_i)$, а δ_j – недостаток / избыток средств, которые накопились на период j, $\delta_1 = 0, \delta_j = \sum_{s=1}^{j-1}\left(\sum_{i=1}^{K} x_{is} + w_s - v_s - u_s\right), j > 1$.

Ограничительные условия запишем так:

$$\sum_{j=1}^{T} x_{ij} \le Q_i, i = 1,...,K; \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{K}\sum_{j \in L_t} x_{ij} \le O_t, \quad t = 1,...,P; \quad (3)$$

$$x_{ij} \ge 0, \;\; i = 1,...,K, \; j = 1,...,T. \quad (4)$$

Условия (2) означают, что объем запросов на заем не должен превышать имеющиеся предложения. Неравенства (3) отображают условие не превышать в пределах года законодательный уровень максимально возможного займа.

Пусть $X = \{x\}$ – пространство вариантов решения задачи, тогда ограничения (2)–(4) определяют область допустимых вариантов $D \subseteq X$. Поскольку величина кредита (как и отдельных траншей) реально выражается в миллионах долларов, на практике целесообразно рассматривать изменения величин x_{ij} с определенным большим шагом. Поэтому, введя параметр b, который определяет минимально возможную вариацию указанных величин, можем считать, что X и D – это по сути конечные множества (см. условия (2)–(4)).

В итоге приходим к такой задаче комбинаторной оптимизации: найти

$$x_* = arg\min\left\{\bar{f}(x), x \in D \subseteq X\right\}, \quad (5)$$

$$\bar{f}(x) = f_1(x) + \lambda \cdot f_2(x), \quad (6)$$

где функция $\overline{f}(x)$ – векторная целевая функция, построенная на основе частичных критериев (1), а $\lambda > 0$ – весовой коэффициент.

Основным критерием эффективности любого плана займов является минимизация их суммарной величины и стоимости обслуживания, что отображает функция $f_1(x)$. Функция $f_2(x)$ штрафует решения с недостатком средств на обслуживание долга, а величина штрафа, который прибавляется к значению целевой функции, зависит от максимальной по всем периодам величины недостачи и от наличия такой недостачи в нескольких периодах одновременно. Функция $f_2(x)$ чувствительная не только к наличию нехватки в нескольких периодах, но и накладывает дополнительный штраф на вариант решения, если распределение нехватки неравномерное. Таким образом, оптимизация функции (6) будет приводить к минимизации суммарной величины объемов новых кредитов вместе с минимизацией наибольшей величины нехватки средств по периодам.

На основе полученных значений величин x_{ij} определяются: 1) число и объемы нужных займов с распределением по всем периодам планового горизонта; 2) оптимальное время займов по каждому из выбранных кредитов: 3) наиболее проблемные периоды относительно обслуживания имеющихся займов.

Исследование сложности. Проблема оптимального обслуживания внешнего государственного долга Украины принадлежит к числу сложных задач комбинаторной оптимизации. Количество вариантов решения в случае, если пренебречь ограничением на объем заимствования в год, составляет

$$|X| = \prod_{i=1}^{K} \left(\left\lfloor \frac{Q_i}{b} \right\rfloor \sum_{j=1}^{T} \min\{T_i, T - j + 1\} \right), \qquad (7)$$

где $\lfloor a \rfloor$ – наименьшее целое число, которое не превышает a.

Например, в случае, когда все предложения имеют объем 100 единиц, срок действия по 10 месяцев, а параметр дискретизации $b = 1$, рассчитанная по (7) оценка времени работы полного перебора для ПК класса Pentium-IV 2.66GHz, 1Gb RAM, для вышеописанных задач исчисляется годами (рис. 1).

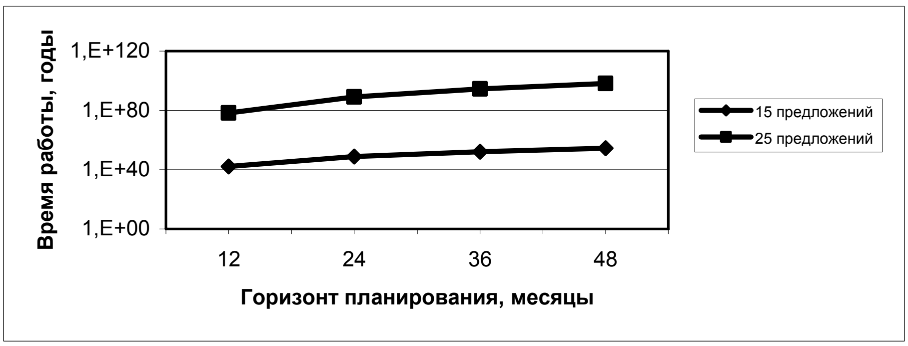

РИС. 1. Оценка времени работы метода полного перебора

Как видим, целевая функция (6) задачи (5) содержит минимакс (см. формулу 2), а размерность пространства X и ограничивающие условия (2) – (4) делают уместной разработку и применение специальных приближенных алгоритмов решения.

Алгоритмы решения. Для рассмотренной задачи управления внешним государственным долгом Украины были разработаны и реализованы программно такие приближенные алгоритмы комбинаторной оптимизации:

– алгоритм детерминированного локального поиска;
– алгоритм поиска в пульсирующих окрестностях;
– алгоритм ускоренного вероятностного моделирования;
– специальный алгоритм на базе случайного локального поиска;
– алгоритм H-метода.

Алгоритм детерминированного локального поиска. Одним из простейших универсальных приближенных методов является детерминированный локальный поиск [5]. При решении данной задачи использовались метрические окрестности единичного радиуса с метрикой, которая определена таким образом:

$$d_m(x,y)=\sum_{i=1}^{K}\left|x_{ij}-y_{ij}\right| \Big/ mb,$$

где b – параметр дискретизации, m – натуральное число. Размерность такой окрестности в общем случае составляет $2KT$. Непосредственно в алгоритме локального поиска для построения окрестностей использовалась метрика $d_1(x,y)$.

Алгоритм поиска в пульсирующих окрестностях. Одним из способов использовать преимущества больших окрестностей, не тратя при этом значительных ресурсов, является использование одной системы окрестностей до нахождения локального минимума, после чего алгоритм несколько раз переходит к использованию другой (обычно, большей) системы окрестностей, что может позволить продолжить процесс поиска решения. В алгоритме поиска в пульсирующих окрестностях системы окрестностей изменяются в пределах заведомо заданного перечня $N_1, N_2, ..., N_s$ [6]. Завершение работы происходит при исчерпании окрестностей в перечне. Была реализована модификация алгоритма в которой перечень окрестностей задавался таким образом: $N_i(x)=\{y\in X : d_{2^{p-i}}(x,y)=1\}$, $i=1,...,p$ где p – параметр алгоритма. Предварительный анализ показал, что ему целесообразно придавать значение 10.

Алгоритм ускоренного вероятностного моделирования. В схеме алгоритма ускоренного вероятностного моделирования [7] (G-алгоритма) осуществляется построение решений из окрестности текущего решения и варианты с лучшим значением целевой функции принимаются всегда, а варианты, которые отвечают ухудшению целевой функции, также могут быть выбраны с определенной вероятностью. Вероятность перехода к ухудшающему решению формируется на основе разности значений целевой функции текущего и построенного решения. Именно за счет возможности перехода к худшему (в понимании целевой функции) решению и обеспечивается выход из локального минимума для продолжения процесса решения и повышение таким образом эффективности алгоритма.

Для решения задачи был реализован алгоритм стохастического локального поиска, который состоит в последовательном рестарте *G*-алгоритма из начальных решений, сгенерированных случайным образом.

Специализированный алгоритм на основе случайного локального поиска. Одним из простейших способов развить детерминированный локальный поиск, так чтобы разрешить ухудшающие шаги, является осуществление на отдельных итерациях выбор следующего решения случайным образом из окрестности текущего решения [5]. В частности, это возможно выполнить, введя пороговый параметр, который определяет, какой тип перехода осуществляется на данной итерации. В отличие от вышеописанных алгоритмов на основе детерминированного локального поиска, в алгоритме случайного локального поиска был реализован переход к первому решению из окрестности, которое имеет лучшее, чем у текущего решения, значение целевой функции.

Особенность реализации этого подхода к данной задаче состояла в следующем. Метод сначала работает в суженном пространстве решений $\hat{X}$, где средства могут быть перечислены лишь одним траншем:

$$\hat{X} = \{x \in X : x_{ij} = Q_i \vee x_{ij} = 0, i = 1,...,K, j = 1,...,T\}.$$

Соответствующим образом изменяется используемая метрика:

$$\hat{d}_m(x, y) = \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{T} (1 - \delta_{xy}^{ij}), \delta_{xy}^{ij} = \begin{cases} 1, & x_{ij} = y_{ij}, \\ 0, & x_{ij} \neq y_{ij}. \end{cases}$$

После завершения работы алгоритма к найденному решению применялся алгоритм детерминированного локального поиска, так как общая схема случайного локального поиска не гарантирует нахождения на последней итерации работы метода локального минимума. После нахождения локального оптимума в суженном пространстве к нему применяется процедура перераспределения траншей по периодам с учетом функции недостачи / излишка в стандартном пространстве задачи X: избыточные средства из транша по определенному кредитному соглашению в определенный период переносятся в транш на следующий период, если это не противоречит ограничениям задачи. В случае наличия излишка средств в последний период горизонта планирования избыточные средства изымаются из предлагаемого варианта решения.

H-метод. В ряде развитых алгоритмов для избежания концентрации поиска в ограниченной подобласти пространства решений задачи и повышения точности получаемых решений используются процедуры возмущения или рекомбинации и мутации [6]. Отметим, что подобные процедуры порождают подмножества вариантов решений, которые не согласованы с топологией пространства *X*. В то же время примером подобного согласования является *H*-метод [8]. Осуществляемое в нем использование специальных отрезков дает возможность синтезировать поиск в окрестностях с глобальным сканированием пространства решений *X*, причем процедура сканирования, в отличие от общих операторов возмущения или рекомбинации большинства других метаэвристичесих методов, определена конкретно.

Экспериментальное сравнение реализованных алгоритмов. Был проведен вычислительный эксперимент по сравнению времени работы реализованных алгоритмов для задач из 15 кредитных предложений. В эксперименте вычислялось среднее время работы алгоритмов на основе 100 запусков (кроме 10 запусков для *H*-метода) (рис. 2). Здесь ***L*** – алгоритм детерминированного локального поиска; ***P*** – алгоритм поиска в пульсирующих окрестностях; ***G*** – алгоритм ускоренного вероятностного моделирования (*G*-алгоритм); ***S*** – специальный алгоритм на базе случайного локального поиска; ***H*** – алгоритм *H*-метода.

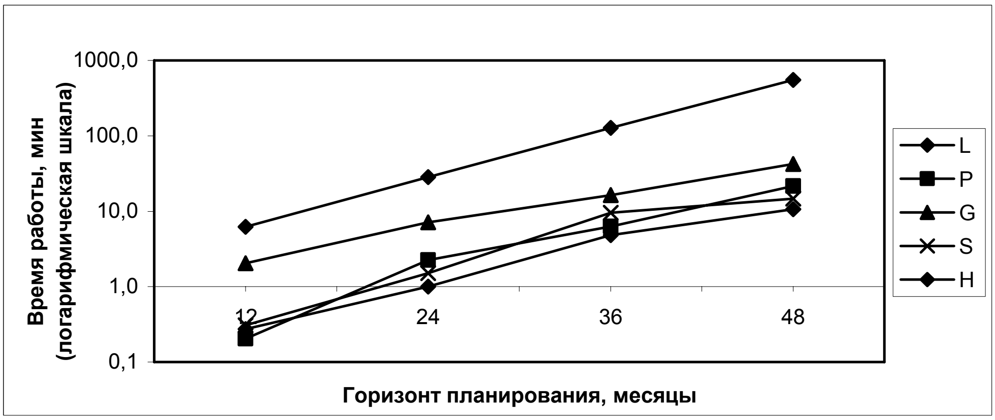

РИС. 2. Оценка времени работы реализованных алгоритмов для 15 предложений

Вычислительный эксперимент показал, что несмотря на приемлемое время работы приближенных алгоритмов на задачах небольшой размерностью, характер его зависимости от размерности задачи – экспоненциальный. Это делает целесообразной с практической точки зрения разработку эффективных параллельных версий реализованных приближенных алгоритмов.

Заключение. Предложенную модель динамики погашения долговых обязательств и разработанные алгоритмические средства можно использовать для решения задачи стабилизации долговой нагрузки Украины, в частности, при разработке долгосрочной сбалансированной бюджетной политики и поиска оптимального плана погашения долгов, установления четких правил регулирования финансовых обязательств государства, действенного контроля за их соблюдением.

При соответствующей интерпретации понятий планового горизонта и периода, разработанную модель можно использовать и для помесячного моделирования процесса управления внешними заимствованиями государства.

Трудоемкость задачи требует эффективной параллельной реализации приближенных методов решения.

Л.Ф. Гуляницький, С.І. Сіренко

МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ ЗОВНІШНЬОГО ДЕРЖАВНОГО БОРГУ УКРАЇНИ

Сформульовано та формалізовано задачу оптимального управління зовнішнім державним боргом України. Проаналізовано складність задачі та розроблено ряд наближених алгоритмів для її розв’язання. Реалізовані алгоритми досліджено експериментально з метою розробки рекомендацій щодо їх практичного застосування.

L.F. Hulianytskyi, S.I. Sirenko

MODELING AND OPTIMIZATION OF FOREIGN STATE DEBT OF UKRAINE

The problem of optimal foreign debt of Ukraine management is stated and formalized. Problem complexity is analyzed, and a number of approximate algorithms are developed. Implemented algorithms were studied experimentally in order to work out recommendations on algorithms application.

1. *Харазішвілі Ю.М.* Теоретичні основи системного моделювання соціально-економічного розвитку України. – К.: ТОВ "ПоліграфКонсалтинг", 2007. – 324 с.
2. *Лук'яненко І.* Системне моделювання показників бюджетної системи України. – К.: ВД "Києво-Могилянська академія", 2004. – 542 с.
3. *Саух С.Е.* Особенности моделирования долговых обязательств Правительства Украины // Электронное моделирование. – 2000. – № 3. – С. 53–59.
4. *Гуляницький Л.Ф.* Моделювання та управління зовнішнім державним боргом України // Пр. IV Міжнар. шк.-семінару "Теорія прийняття рішень" (Ужгород, 29 вересня – 4 жовтня 2008 р.). – Ужгород: УжНУ, 2008. – С. 72–75.
5. *Пападимитриу Х., Стайглиц К.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. – М.: Мир, 1984. – 512 с.
6. *Hoos H.H., Stützle T.* Stochastic Local Search: Foundations and Applications. – San Francisco: Morgan Kaufmann Publ., 2005. – 658 p.
7. *Гуляницкий Л.Ф.* Решение задач комбинаторной оптимизации алгоритмами ускоренного вероятностного моделирования // Компьютерная математика. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 2004. – № 1. – С. 64–72.
8. *Гуляницкий Л.Ф., Сергиенко И.В.* Метаэвристический метод деформируемого многогранника в комбинаторной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 6. – С. 70–79.

Получено 15.03.2009

Об авторах:

Гуляницкий Леонид Федорович,

доктор технических наук, ведущий научный сотрудник
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины,
hulianytsky@voliacable.com

Сиренко Сергей Игоревич,

аспирант Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.
s.sirenko@gmail.com