КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 539.3: 519.6

И.В. ДЕЙНЕКА

# ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СОСТАВНОГО ЦИЛИНДРА

*Построены явные выражения градиентов функционалов-невязок для реализации градиентных методов идентификации параметров осесимметричного напряженно-деформированного состояния составного кругового цилиндра.*



**Введение.** В работах [1, 2] предложена технология построения явных выражений градиентов функционалов-невязок для идентификации параметров задач теплопроводности.

В данной работе, следуя [1, 2], на основе теории оптимального управления [3–5] представлены явные выражения градиентов функционалов-невязок для решения некоторых задач идентификации параметров осесимметричного напряженно-деформированного состояния (НДС) составного кругового цилиндра градиентными методами О.М. Алифанова [6].

**1. Идентификация НДС полого кругового цилиндра по известным смещениям и напряжениям на внешней его стороне.** Рассмотрим длинный полый двухслойный изотропный круговой цилиндр. С учетом симметрии, следуя [7, 8], напряженно-деформированное состояние его составляющих описывается уравнением равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0, \quad r \in (r_1, \xi) \cup (\xi, r_2), \quad (1)$$

где $r_1, r_2 = \text{const} > 0$ – радиусы, соответственно, внутренней и внешней круговых поверхностей, $\xi$ – радиус поверхности идеального контакта составляющих цилиндра, $r$ – радиальная координата цилиндрической системы координат ($r$, $\varphi$, $z$), ось $z$ совпадает с осью вращения рассматриваемого тела.

Пусть $u$, $v$ и $w$ обозначают перемещения какой-либо точки, соответственно, в направлении радиуса $r$, в направлении перпендикуляра к меридиальному сечению и в направлении оси $z$.

В предположении независимости перемещений от угла $\varphi$, следуя [7], составляющие деформаций имеют вид

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right), \tag{2}$$

а составляющие тензора напряжений представляются так:

$$\sigma_{rr} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{rr}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{\varphi\varphi}, \quad \sigma_{zz} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{zz}, \quad \sigma_{rz} = \mu\varepsilon_{rz}, \tag{3}$$

где $\theta = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz}$ – объемное расширение; $\lambda$, $\mu$ – упругие постоянные Ляме, которые через модуль упругости $E$ и коэффициент Пуассона $\nu$ выражаются следующим образом: $\lambda = \dfrac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$.

Для рассматриваемого нами случая из четырех деформаций (2) отличны от нуля лишь две: $\varepsilon_{rr} = \dfrac{\partial u}{\partial r}$, $\varepsilon_{\varphi\varphi} = \dfrac{u}{r}$. Тогда [8]:

$$\begin{aligned} \sigma_r = \sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\varphi\varphi} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial r} + \lambda\frac{u}{r}, \\ \sigma_\varphi = \sigma_{\varphi\varphi} &= \lambda\varepsilon_{rr} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{\varphi\varphi} = \lambda\frac{\partial u}{\partial r} + (\lambda + 2\mu)\frac{u}{r}. \end{aligned} \tag{4}$$

Учитывая (4), уравнение (1), левая и правая части которого умножены на $r$, принимает вид

$$-\left\{(\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial y}{\partial r}\right) - (\lambda + 2\mu)\frac{y}{r}\right\} = 0, \quad r \in \Omega, \tag{5}$$

где $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 = (r_1, \xi)$, $\Omega_2 = (\xi, r_2)$, $y = y(r) = u(r)$.

Пусть на внутренней и внешней поверхностях цилиндра заданы напряжения

$$\sigma_r\Big|_{r=r_i} = -p_i, \quad i = 1,2, \tag{6}$$

где $p_1$ считаем неизвестным, а $p_2$ – задано.

В точке $r = \xi$ условия идеального контакта имеют вид

$$[y] = 0, \quad [\sigma_r] = 0, \tag{7}$$

где $[\varphi] = \varphi^+ - \varphi^-$, $\varphi^\pm = \varphi(\xi \pm 0)$.

При этом считаем, что на внешней поверхности цилиндра известны смещения, т. е.

$$y(r_2) = f_0\,. \tag{8}$$

Получена задача (5)–(8), состоящая в нахождении элемента $u = p_1 \in \mathcal{U} = (-\infty, +\infty)$, при котором решение $y = y(u) = y(u;r)$ задачи (5)–(7) удовлетворяет равенству (8).

При каждом фиксированном $u \in \mathcal{U}$ вместо классического решения $y = y(u)$ краевой задачи (5)–(7) будем использовать ее обобщенное решение. Для этого введем в рассмотрение пространство $V_0 = \{v(r) : v\big|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i),\ \ i = 1,\ 2;\quad [v] = 0\}$, где $[v] = [v]\big|_{r=\xi}$.

Пусть $y$ – классическое решение краевой задачи (5)–(7). После домножения обеих частей равенства (5) на $z \in V_0$ и интегрирования результата по $\Omega$, с учетом ограничений (6)–(7) имеем

$$-\int_{r_1}^{r_2} \left\{ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial r}\left( r \frac{\partial y}{\partial r} \right) - (\lambda + 2\mu) \frac{y}{r} \right\} z dr = -r\sigma_r(y) z \Big|_{r_1}^{\xi - 0} - r\sigma_r(y) z \Big|_{\xi+0}^{r_2} +$$

$$+\int_{r_1}^{r_2} r\{\sigma_r(y)\varepsilon_r(z) + \lambda\varepsilon_r(y)\varepsilon_\varphi(z) + (\lambda + 2\mu)\ \ \varepsilon_\varphi(y)\varepsilon_\varphi(z)\} dr =$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} r\{(\lambda + 2\mu)\varepsilon_r(y)\varepsilon_r(z) + \lambda(\varepsilon_\varphi(y)\varepsilon_r(z) + \varepsilon_r(y)\varepsilon_\varphi(z)) + (\lambda + 2\mu)\,\varepsilon_\varphi(y)\varepsilon_\varphi(z)\} dr +$$

$$+ r_2 p_2 z(r_2) - r_1 u z(r_1) = 0\,.$$

**Определение 1.** При каждом фиксированном $u \in \mathcal{U}$ обобщенным решением краевой задачи (5)–(7) называется функция $y = y(u) = y(u;r) \in V$, которая $\forall z \in V_0$ удовлетворяет тождеству

$$a(y,z) = l(u;z), \tag{9}$$

где $V = V_0$, $a(y,z) = \displaystyle\int_{r_1}^{r_2} r \left\{ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial r} + \lambda\left( \frac{y}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{z}{r} \right) + (\lambda + 2\mu)\frac{y}{r}\frac{z}{r} \right\} dr,$

$l(u;z) = -r_2 p_2 z(r_2) + r_1 u z(r_1)$.

**Теорема 1.** При каждом фиксированном $u \in \mathcal{U}$ решение задачи (9) существует и единственно, которое является единственной функцией, доставляющей на $V$ минимум функционалу

$$\Phi\,(u;v) = a(v,v) - 2(r_1 u v(r_1) - r_2 p_2 z(r_2))\,.$$

Зададим функционал-невязку

$$J(u) = \frac{1}{2}(y(u;r_2) - f_0)^2\,. \tag{10}$$

Вместо задачи (5)–(8) будем рассматривать задачу (9), (10), состоящую в нахождении элемента $u$, минимизирующего на $\mathcal{U}$ функционал-невязку (10) при ограничении (9). Задачу (9), (10) будем решать с помощью градиентных методов [6], где ($n$+1)-е приближение $u_{n+1}$ решения $u \in \mathcal{U}$ находим по формуле

$$u_{n+1} = u_n - \beta_n p_n \,, \tag{11}$$

начиная с некоторого приближения $u_0 \in \mathcal{U}$, где направление спуска $p_n$ и коэффициент $\beta_n$ определим, используя выражения:

– для метода минимальных ошибок

$$p_n = J'_{u_n}, \qquad \beta_n = \frac{\|e_n\|^2}{\|J'_{u_n}\|^2}\,, \tag{12}$$

– для метода скорейшего спуска

$$p_n = J'_{u_n}, \qquad \beta_n = \frac{\|J'_{u_n}\|^2}{\|AJ'_{u_n}\|^2}\,, \tag{13}$$

– для метода сопряженных градиентов

$$p_n = J'_{u_n} + \gamma_n p_{n-1} \;, \quad \gamma_0 = 0, \quad \gamma_n = \frac{\|J'_{u_n}\|^2}{\|J'_{u_{n-1}}\|^2}, \quad \beta_n = \frac{(J'_{u_n}, p_n)}{\|Ap_n\|^2}\,, \tag{14}$$

где $J'_{u_n}$ – градиент функционала $J(u)$ в точке $u = u_n$, $e_n = Au_n - f_0$, $A(u_n) = y(u_n; r_2)$.

Введем обозначения

$$\pi(u,v) = (Y(u) - Y(0), Y(v) - Y(0)),$$
$$L(v) = (f_0 - Y(0), Y(v) - Y(0)),$$

где $Y(v) = A(v)$.

Так как $2J(v) = \pi(v,v) - 2L(v) + (f_0 - Y(0), f_0 - Y(0))$, то

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda\to 0} \frac{J(u+\lambda(v-u)) - J(u)}{\lambda} &= \pi(u, v-u) - L(v-u) = \\ &= (Y(u) - f_0,\;\; Y(v) - Y(u)) = \langle J'_u, v-u \rangle. \end{aligned} \tag{15}$$

Следуя [1–5], для каждого приближения $u_n$ решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (9), (10) введем в рассмотрение следующую сопряженную задачу:

$$-r\frac{\partial}{\partial r}\sigma_r(\psi) - (\sigma_r(\psi) - \sigma_\theta(\psi)) = 0, \quad r \in \Omega,$$

$$[\psi]=0,\quad [\sigma_r(\psi)]=0,\quad r=\xi,$$
$$\sigma_r(\psi)\Big|_{r=r_2}=\frac{1}{r_2}(y(u_n;r_2)-f_0), \tag{16}$$
$$\sigma_r(\psi)\Big|_{r=r_1}=0.$$

**Определение 2.** Обобщенным решением краевой задачи (16) называется функция $\psi\in V$, которая $\forall z\in V_0$ удовлетворяет тождеству

$$a(\psi,z)=(y(u_n;r_2)-f_0)z(r_2)\,. \tag{17}$$

**Теорема 2.** Решение $\psi\in V$ задачи (17) существует и единственно.

Выбирая в тождестве (17) вместо функции $z$ разность $y(u_{n+1})-y(u_n)$, с учетом (9) получаем

$$\begin{aligned}&(y(u_n;r_2)-f_0,y(u_{n+1};r_2)-y(u_n;r_2))=a(\psi,y(u_{n+1})-y(u_n))=\\&=a(y(u_{n+1}),\psi)-a(y(u_n),\psi)=l(u_{n+1};\psi)-l(u_n;\psi)=r_1\Delta u_n\psi(z_1).\end{aligned} \tag{18}$$

С учетом (15) на основании (18) имеем

$$J'_{u_n}=\tilde{\psi}_n\,, \tag{19}$$

где $\tilde{\psi}_n=r_1\psi(z_1),\quad \left\|J'_{u_n}\right\|=\left|\tilde{\psi}_n\right|$.

Наличие градиента $J'_{u_n}$ позволяет использовать градиентные методы (11) для определения ($n$+1)-го приближения искомого решения $u\in\mathcal{U}$.

**2. Идентификация НДС по известным смещениям внутренних точек тела.** Пусть на области $\Omega$ определено уравнение (5). На внешней поверхности цилиндра известно напряжение

$$\sigma_r=-p_2,\quad r=r_2\,. \tag{20}$$

На внутренней поверхности напряжение считаем неизвестным

$$\sigma_r=-u,\quad r=r_1\,. \tag{21}$$

В точке $r=\xi$ заданы условия сопряжения (7). Предполагаем, что во внутренней точке $d_1\in\Omega$ и в точке $r=\xi$ известны смещения

$$y(d_1)=f_1,\quad y(\xi)=f_2\,. \tag{22}$$

Получена задача (5 – 7), (20)–(22), состоящая в определении вещественного числа $u\in\mathcal{U}$, при котором решение краевой задачи (5 – 7), (20), (21) удовлетворяет равенствам (22).

Функционал-невязка имеет вид

$$J(u)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(y(u;d_i)-f_i)^2, \tag{23}$$

где $d_2=\xi$.

Вместо классического решения краевой задачи (5 – 7), (20), (21) будем использовать ее обобщенное решение, т.е. решение $y = y(u) = y(u;r)$ задачи (9). Задачу (23), (9) будем решать с помощью градиентных методов (11).

Для каждого приближения $u_n$ решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (9), (23) введем в рассмотрение следующую сопряженную задачу:

$$-\left\{(\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-(\lambda+2\mu)\frac{\psi}{r}\right\}=0, \quad r\in\Omega_d,$$

$$\sigma_r(\psi)\Big|_{r=r_i}=0, \quad i=1,\ 2, \tag{24}$$

$$[\psi]=0, \quad [\sigma_r(\psi)]=-\frac{1}{d_i}(y(u_n;d_i)-f_i), \quad r=d_i, \quad i=1,2,$$

где $\Omega_d = \bigcup_{i=1}^{3}\tilde{\Omega}_i$, при $d_1\in\Omega_1$ $\tilde{\Omega}_1=(r_1,d_1)$, $\tilde{\Omega}_2=(d_1,\xi)$, $\tilde{\Omega}_3=(\xi,r_2)$, при $d_1\in\Omega_2$ $\tilde{\Omega}_1=(r_1,\xi)$, $\tilde{\Omega}_2=(\xi,d_1)$, $\tilde{\Omega}_3=(d_1,r_2)$;

$[\varphi]=[\varphi]\big|_{d_i}=\varphi(d_i+0)-\varphi(d_i-0), \quad i=1,2$.

Пусть $\psi$ – классическое решение задачи (24). Умножим первое равенство системы (24) на произвольную функцию $z\in V_d$ и результат проинтегрируем по отрезку $[r_1,r_2]$. Имеем

$$-\int_{r_1}^{r_2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r\left((\lambda+2\mu)\frac{\partial\psi}{\partial r}+\lambda\frac{\psi}{r}-\lambda\frac{\psi}{r}\right)-(\lambda+2\mu)\frac{\psi}{r}\right)\right\}zdr=$$

$$=\int_{r_1}^{r_2}r((\lambda+2\mu)\varepsilon_r(\psi)\varepsilon_r(z)+\ \lambda(\varepsilon_\varphi(\psi)\varepsilon_r(z)+\varepsilon_r(\psi)\varepsilon_\varphi(z))+$$

$$+(\lambda+2\mu)\varepsilon_\varphi(\psi)\varepsilon_\varphi(z))dr+r\sigma_r(\psi)z(r_1)+\sum_{i=1}^{2}d_i\,[\sigma_r(\psi)]\big|_{d_i}\,z(d_i)-r\sigma_r(\psi)z(r_2)=0,$$

где $V_d=\{v(r): v\big|_{\tilde{\Omega}_i}\in W_2^1(\tilde{\Omega}_i), \quad i=\overline{1,\ 3}; \quad [v]\big|_{r=d_1,d_2}=0\}$.

Вместо классического решения краевой задачи (24) будем использовать ее обобщенное решение.

**Определение 3.** Обобщенным решением краевой задачи (24) называется функция $\psi\in V_d$, которая $\forall z\in V_d$ удовлетворяет тождеству

$$\int_{r_1}^{r_2}r\left((\lambda+2\mu)\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial r}+\lambda\left(\frac{\psi}{r}\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{z}{r}\right)+(\lambda+2\mu)\frac{\psi}{r}\frac{z}{r}\right)dr=$$
$$=\sum_{i=1}^{2}(y(u_n;d_i)-f_i)z(d_i). \tag{25}$$

Следуя [9], легко установить справедливость утверждения.

**Теорема 3.** Решение $\psi(r)$ задачи (25) существует и единственное в $V_d$, которое доставляет на $V_d$ минимум функционалу

$$\Phi_\psi(v) = a(v,v) - 2l_\psi(v), \tag{26}$$

где $l_\psi(v) = \sum_{i=1}^{2} (y(u_n;d_i) - f_i)\, v(d_i)$.

Справедливость теоремы устанавливается на основе леммы Лакса – Мильграма.

Выбирая в тождестве (25) вместо функции $z = z(r)$ разность $y(u_{n+1}) - y(u_n)$, с учетом (9) получаем

$$\sum_{i=1}^{2} (y(u_n;d_i) - f_i)(y(u_{n+1};d_i) - y(u_n;d_i)) = r_1 \Delta u_n \psi(r_1).$$

Следовательно, $J'_{u_n} = \tilde{\psi}_n$, где $\tilde{\psi}_n = r_1\psi(r_1)$.

*Замечание* 1. Если кроме условий (22) также задано условие (8), то функционал-невязка имеет вид

$$J(u) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2} (y(u;d_i) - f_i)^2, \quad d_0 = r_2,$$

а при определении сопряженной задачи (24) кроме ограничений, заданных в точках $d_1, d_2$, необходимо задать:

$$\sigma_r(\psi)\Big|_{r=r_1} = 0, \quad \sigma_r(\psi)\Big|_{r=r_2} = \frac{1}{r_2}(y(u_n;r_2) - f_0).$$

В этом случае имеем

$$\langle J'_{u_n}, \Delta u_n\rangle = \sum_{i=0}^{2} (y(u_n;d_i) - f_i)(y(u_{n+1};d_i) - y(u_n;d_i)) = r_1 \Delta u_n \psi(r_1),$$

т. е. $J'_{u_n} = r_1 \quad \psi(r_1)$.

**3. Идентификация постоянной Ляме $\mu$ по известному смещению внешней поверхности цилиндра.** Пусть на интервале $\Omega = (r_1, r_2)$ определено уравнение

$$-\left\{(\lambda + 2u)\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial y}{\partial r}\right) - (\lambda + 2u)\frac{y}{r}\right\} = 0\,. \tag{27}$$

На внутренней и внешней поверхностях цилиндра известны напряжения

$$\sigma_r\Big|_{r=r_i} = -p_i, \quad i = 1,\ 2\,. \tag{28}$$

Считаем, что на внешней поверхности цилиндра известны смещения

$$y(r_2) = f_0\,. \tag{29}$$

Получена задача (27)–(29), состоящая в нахождении положительного вещественного числа $u \in \mathcal{U} = R_+ = (0, +\infty)$, минимизирующего на $\mathcal{U}$ функционал (10) при ограничениях (27), (28).

При каждом фиксированном $u \in \mathcal{U}$ вместо классического решения $y = y(u) = y(u;\, r)$ краевой задачи (27), (28) будем использовать ее обобщенное решение.

**Определение 4.** При каждом фиксированном $u \in \mathcal{U}$ обобщенным решением краевой задачи (27), (28) называется функция $y = y(u) = y(u;r) \in W_2^1(\Omega)$, которая $\forall z(r) \in W_2^1(\Omega)$ удовлетворяет тождеству

$$a(u; y, z) = l(z), \tag{30}$$

где

$$a(u; y, z) = \int_{r_1}^{r_2} r\left( (\lambda + 2u)\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial r} + \lambda\left( \frac{y}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{z}{r} \right) + (\lambda + 2u)\frac{y}{r}\frac{z}{r} \right) dr,$$
$$l(z) = -\ r_2 p_2 z(r_2) + r_1 p_1 z(r_1). \tag{31}$$

**Теорема 4.** При каждом фиксированном $u \in \mathcal{U}$ решение $y = y(u)$ существует и единственно.

Задачу (30), (10) будем решать с помощью градиентных методов (11).

Пусть в задаче (27), (28) искомое число $u$ получает приращение $\Delta u$. Следовательно, решение $y = y(u)$ получает приращение $\Delta y = \theta$. На основании (27), (28) можем записать равенства

$$-\left\{ (\lambda + 2u + 2\Delta u)\frac{\partial}{\partial r}\left( r\frac{\partial (y+\theta)}{\partial r} \right) - (\lambda + 2u + 2\Delta u)\frac{y+\theta}{r} \right\} = 0, \quad r \in \Omega,$$
$$\left( (\lambda + 2u + 2\Delta u)\frac{\partial (y+\theta)}{\partial r} + \lambda\frac{y+\theta}{r} \right)\Bigg|_{r=r_i} = -p_i, \quad i = 1, 2. \tag{32}$$

С учетом (27), (28), на основании (32) для приращения $\theta$, пренебрегая членами второго порядка малости, получаем краевую задачу:

$$-\left\{ (\lambda + 2u)\frac{\partial}{\partial r}\left( r\frac{\partial \theta}{\partial r} \right) - (\lambda + 2u)\frac{\theta}{r} \right\} = 2\Delta u\left( \frac{\partial}{\partial r}\left( r\frac{\partial y}{\partial r} \right) - \frac{y}{r} \right), \quad r \in \Omega,$$
$$\left\{ (\lambda + 2u)\frac{\partial \theta}{\partial r} + \lambda\frac{\theta}{r} \right\}\Bigg|_{r=r_i} = -2\Delta u\frac{\partial y}{\partial r}\Bigg|_{r=r_i}, \quad i = 1, 2. \tag{33}$$

**Определение 5.** Обобщенным решением краевой задачи (33) называется функция $\theta = \theta(r) \in W_2^1(\Omega)$, которая $\forall z \in W_2^1(\Omega)$ удовлетворяет тождеству

$$a(u; \theta, z) = l_\theta(y(u), \Delta u; z), \tag{34}$$

где

$$l_\theta(y(u),\Delta u;z)=2\Delta u\int_\Omega\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial y}{\partial r}\right)-\frac{y}{r}\right)\ zdr-$$

$$-2r_2\left.\frac{\partial y}{\partial r}\right|_{r=r_2}\Delta u\ z(r_2)+2r_1\left.\frac{\partial y}{\partial r}\right|_{r=r_1}\Delta u\ z(r_1). \tag{35}$$

Пренебрегая в (32) членами второго порядка малости, на каждом шаге итерационного процесса (11) определения ($n$+1)-го приближения $u_{n+1}$ решения $u\in\mathcal{U}$ задачи (30), (10) будем считать, что $y(u_{n+1})\approx\tilde{y}=\tilde{y}(u_n,\Delta u_n;r)$, где $\tilde{y}$ – решение краевой задачи:

$$-\left\{(\lambda+2u_n)\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\tilde{y}}{\partial r}\right)-(\lambda+2u_n)\frac{\tilde{y}}{r}\right\}=$$

$$=2\Delta u_n\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial y(u_n)}{\partial r}\right)-\frac{y(u_n)}{r}\right),\quad r\in\Omega, \tag{36}$$

$$\left.\left\{(\lambda+2u_n)\frac{\partial\tilde{y}}{\partial r}+\lambda\frac{\tilde{y}}{r}\right\}\right|_{r=r_i}=-p_i-2\Delta u_n\left.\frac{\partial y(u_n)}{\partial r}\right|_{r=r_i},\quad i=1,2.$$

**Определение 6.** Обобщенным решением краевой задачи (36) называется функция $\tilde{y}\in W_2^1(\Omega)$, которая $\forall z\in W_2^1(\Omega)$ удовлетворяет тождеству

$$a(u_n;\ \tilde{y},z)=l(z)+l_\theta(y(u_n),\Delta u_n;\ z). \tag{37}$$

Пусть $u_n+\Delta u_n\in\mathcal{U}$. Тогда $\forall\lambda\in(0,1)$ $u_n+\lambda\Delta u_n\in\mathcal{U}$. С учетом краевой задачи (36) или соответствующей ей обобщенной задачи (37) имеем

$$y(u_n+\lambda\Delta u_n)\approx\tilde{y}(u_n+\lambda\Delta u_n)=y(u_n)+\lambda y_0(\Delta u_n), \tag{38}$$

где $y_0(\Delta u_n)=\theta$ – решение задачи (34) при $u=u_n$. Поскольку $\lambda y_0(\Delta u_n)=$ $=\lambda(\tilde{y}(u_{n+1})-y(u_n))$, то

$$\bar{Y}(u_n+\lambda\Delta u_n)-\bar{Y}(u_n)\approx\lambda(\ \bar{\bar{Y}}(u_{n+1})-\bar{Y}(u_n)), \tag{39}$$

где $\bar{\bar{Y}}(u_{n+1})=\tilde{y}(u_{n+1};r_2)$.

На каждом шаге определения приближения $u_{n+1}$ решения $u\in\mathcal{U}$ задачи (30), (10) функционал (10) $\forall v\in\mathcal{U}$ представим в виде

$$2J(v)=\pi(v,v)-2L(v)+\left\|f_0-\bar{Y}(u_n)\right\|^2, \tag{40}$$

где

$$\begin{gathered}\pi(u,v)=(\bar{Y}(u)-\bar{Y}(u_n),\ \ \bar{Y}(v)-\bar{Y}(u_n)),\\ L(v)=(f_0-\bar{Y}(u_n),\ \ \bar{Y}(v)-\bar{Y}(u_n)),\qquad \bar{Y}(v)=y(v;r_2).\end{gathered} \tag{41}$$

С учетом (40), (41), (39) имеем

$$\langle J'_{u_n},\Delta u_n\rangle=\lim_{\lambda\to0}\frac{J(u_n+\lambda\Delta u_n)-J(u_n)}{\lambda}\approx(\bar{Y}(u_n)-f_0,\ \ \bar{\bar{Y}}(u_{n+1})-\bar{Y}(u_n)). \tag{42}$$

Для каждого приближения $u_n$ решения $u\in\mathcal{U}$ задачи (30), (10) введем в рассмотрение следующую сопряженную задачу:

$$-\left\{(\lambda+2u_n)\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-(\lambda+2u_n)\frac{\psi}{r}\right\}=0,\quad r\in\Omega,$$

$$\left\{(\lambda+2u_n)\frac{\partial\psi}{\partial r}+\lambda\frac{\psi}{r}\right\}\Bigg|_{r=r_1}=0, \tag{43}$$

$$\left\{(\lambda+2u_n)\frac{\partial\psi}{\partial r}+\lambda\frac{\psi}{r}\right\}\Bigg|_{r=r_2}=\frac{1}{r_2}(y(u_n);r_2)-f_0).$$

Вместо классического решения краевой задачи (43) будем рассматривать ее обобщенное решение.

**Определение 7.** Обобщенным решением краевой задачи (43) называется функция $\psi\in W_2^1(\Omega)$, которая $\forall z\in W_2^1(\Omega)$ удовлетворяет тождеству

$$a(u_n;\psi,z)=l_\psi(y(u_n);z), \tag{44}$$

где $l_\psi(y(u_n);z)=(y(u_n);\ \ r_2)-f_0)z(r_2)$.

Выбирая в тождестве (44) вместо функции $z$ разность $\tilde{y}(u_{n+1})-y(u_n)$, с учетом (34), (42) получаем

$$\langle J'_{u_n},\ \ \Delta u_n\rangle\approx(\bar{Y}(u_n)-f_0,\ \ \bar{\tilde{Y}}(u_{n+1})-\bar{Y}(u_n))=a(u_n;\tilde{y}-y(u_n),\psi)=$$

$$=l_\theta(y(u_n),\Delta u_n;\ \ \psi)=2\Delta u_n\left(\ r_1\frac{\partial y(u_n)}{\partial r}\bigg|_{r=r_1}\psi(r_1)-r_2\frac{\partial y(u_n)}{\partial r}\bigg|_{r=r_2}\psi(r_2)\right)+$$

$$+2\Delta u_n\int_\Omega\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial y(u_n)}{\partial r}\right)-\frac{y(u_n)}{r}\right)\psi dr.$$

Следовательно,

$$J'_{u_n}\approx\tilde{\psi}_n, \tag{45}$$

где
$$\tilde{\psi}_n=2\ \left(r_1\frac{\partial y(u_n)}{\partial r}\ \bigg|_{r=r_1}\psi(r_1)-r_2\frac{\partial y(u_n)}{\partial r}\ \bigg|_{r=r_2}\psi(r_2)+\right.$$

$$\left.+\int_\Omega\ \left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial y(u_n)}{\partial r}\right)-\frac{y(u_n)}{r}\right)\psi dr\right),\quad \left\|J'_{u_n}\right\|\approx\left|\psi_n\right|.$$

Наличие градиента $J'_{u_n}$ (45) позволяет использовать метод минимальных ошибок (11), (12) для определения ($n$+1)-го приближения $u_{n+1}$ решения $u\in\mathcal{U}$ задачи (30), (10).

Решив задачу определения функции $y\in W_2^1(\Omega)$, которая $\forall z\in W_2^1(\Omega)$ удовлетворяет тождеству

$$a(\tilde{\psi}_n;\,y,z)=l(z), \tag{46}$$

получим $AJ'_{u_n} = y(J'_{u_n}) = y(J'_{u_n}; r_2)$, что позволит использовать метод скорейшего спуска (11), (13) для определения ($n$+1)-го приближения $u_{n+1}$ решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (30), (10). Определив направление спуска $p_n$ с помощью выражений (14) и решив задачу вида (46), где вместо $\tilde{\psi}_n$ используем $p_n$, получим $Ap_n$, что позволит применить метод сопряженных градиентов (11), (14) для нахождения ($n$+1)-го приближения $u_{n+1}$ решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (30), (10).

**Заключение.** Для идентификации НДС кругового цилиндра по известным смещениям внутренних и поверхностных точек тела получены явные выражения градиентов функционалов-невязок.

*І.В. Дейнека*

ІДЕНТИФІКАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ ОСЕСИМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ СКЛАДЕНОГО ЦИЛІНДРА

Побудовані явні вирази градієнтів функціоналів-нев'язок для реалізації градієнтних методів ідентифікації параметрів осесиметричного напружено-деформованого стану складеного кругового циліндра.

*I.V. Deineka*

IDENTIFICATION OF THE PARAMETERS OF THE AXISYMMETRICAL PROBLEM OF THE COMPOUND CYLINDER DEFLECTED MODE

The explicit expressions of the functional-residuals gradients for the realization of the gradient methods of identification of the compound circular cylinder axisymmetrical deflected mode parameters are constructed.


1. *Сергиенко И.В., Дейнека В.С.* Решение граничных обратных задач теплопроводности для составного стержня // Проблемы управления и информатики. – 2007. – № 2. – С. 75–97.
2. *Сергиенко И.В., Дейнека В.С.* Решение коэффициентных обратных задач теплопроводности для составной пластины // Там же. – 2007. – № 3. – С. 21–48.
3. *Дейнека В.С., Сергиенко И.В.* Оптимальное управление неоднородными распределенными системами. – Киев: Наук. думка, 2003. – 506 с.
4. *Sergienko I.V., Deineka V.S.* Optimal Control of Distributed Systems with Conjugation Conditions. – New York: Kluwer Academic Publishers, 2005. – 400 p.
5. *Дейнека В.С.* Оптимальное управление эллиптическими многокомпонентными распределенными системами. – Киев: Наук. думка, 2005. – 364 с.
6. *Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1988. – 288 с.
7. *Тимошенко С.П.* Курс теории упругости. – Киев: Наук. думка, 1972. – 508 с.
8. *Коваленко А.Д.* Основы термоупругости. – Киев: Наук. думка, 1970. – 308 с.
9. *Дейнека В.С., Сергиенко И.В.* Модели и методы решения задач в неоднородных средах. – Киев: Наук. думка, 2001. – 606 с.


Получено 14.04.2009

***Об авторе:***

*Дейнека Игорь Васильевич*,
кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.
*e-mail* vdeineka@ukr.net