КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.6

Т.А. ЛАЗЕБНАЯ

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ГУМОРАЛЬНОЙ ИММУННОЙ РЕАКЦИИ НА АНТИГЕН. I

Исследуются вопросы равномерной ограниченности, неотрицательности и непрерывной зависимости от начальных значений и параметров решений системы уравнений, представляющей модель гуморальной иммунной реакции на неразмножающийся молекулярно-дисперсный антиген. Модель основана на вероятностном подходе к описанию взаимодействий B-лимфоцитов и их продуктов с антигеном.

Введение. В реальных задачах, связанных с решением дифференциальных уравнений, начальные значения обычно известны лишь с некоторым приближением, так как они определяются экспериментально или вычисляются, а это неизбежно связано с появлением погрешностей. Кроме того, в правые части уравнений могут входить какие-либо параметры, характеризующие физическую природу изучаемой системы, и значения данных параметров также определяются приближенно. В связи с этим возникает вопрос о том, как изменяется решение начальной задачи при небольших изменениях начальных значений и параметров и зависит ли оно от этих величин непрерывно. Этому вопросу и посвящена настоящая статья, в которой рассматривается зависимость решений нижеприведенной системы уравнений (1) от начальных значений (2) и параметров [1].

Данная система уравнений представляет собой модель гуморальной иммунной реакции на неразмножающийся молекулярно-дисперсный антиген [1, 2], которая построена на основе вероятностного подхода к описанию взаимодействий B-лимфоцитов и их продуктов с антигеном с учетом допущений и постулатов, приведенных в [3]. Вопросы существования и единственности решений системы уравнений (1) с начальными условиями (2) подробно были исследованы в [1, 4].

Постановка задачи. Пусть дана система уравнений

$$\frac{d\overline{y}_1(t)}{dt} = \left\{-\alpha_1\overline{y}_1(t) - \overline{y}_2(t)\right\}\theta\left(y_1(t)\right),$$

$$\frac{d\overline{y}_2(t)}{dt} = \left\{-\alpha_2\overline{y}_2(t) - \overline{y}_1(t) + \alpha_3 y_3(t) + \alpha_4 y_4(t)\right\}\theta\left(y_2(t)\right),$$

$$\frac{dy_3(t)}{dt} = \left[\alpha_5 + \ell n\left(1 - \Phi_3(t)\right)\right]y_3(t),$$

$$\frac{dy_4(t)}{dt} = y_3(t-\gamma_1)\Phi_3(t-\gamma_1)\frac{\Phi_1\left(\ell g y_1(t-\gamma_1)\right)}{\Phi_1\left(\ell g y_1(t_0)\right)}\theta(t-\gamma_1) - \alpha_6 y_4(t),$$

$$\frac{dy_5(t)}{dt} = y_3(t)\Phi_3(t)\left(1 - \frac{\Phi_1\left(\ell g y_1(t)\right)}{\Phi_1\left(\ell g y_1(t_0)\right)}\right) \qquad (1)$$

с начальными условиями

$$y_1(t_0) = y_1^0;\ y_2(t_0) = y_2^0;\ y_4(t_0) = 0;\ y_5(t_0) = 0;\ \ y_3(t) = 0 \text{ для } t \in \left[t_0, t_0 + \gamma_2\right);$$

$$y_3(t_0+\gamma_2) = \left\{\alpha_0\Phi_1\left(\ell g y_1(t_0)\right)\left[1 - \Phi_2\left(\ell g y_1(t_0)\right)\right]\right\}\theta\left(y_3(t_0+\gamma_2)\right), \qquad (2)$$

где

$$0 < \alpha_i < 1;\quad i = \overline{1,6};\quad \theta\left(y_i(t)\right) = \begin{cases} 1, y_i(t) \ge 1 \\ 0, y_i(t) < 1 \end{cases},\ i = \overline{1,3};$$

$$\Phi_i(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i}\int_{-\infty}^{v}\exp\left(-\frac{(u-x_i)^2}{2\sigma_i^2}\right)du,$$

$$\overline{y}_i(t) = y_i(t)/y_1^0, i = \overline{1,2}. \qquad (3)$$

1. Утверждается, что решения системы уравнений (1) с начальными условиями (2) и при ограничениях (3) равномерно ограничены.

Чтобы доказать равномерную (не зависящую от (t)) ограниченность всех решений системы уравнений (1), достаточно доказать равномерную ограниченность числа пролиферирующих клеток $y_3(t)$, так как остальные типы клеток (как видно из (1)) являются их производными.

Найдем $\max\limits_t y_3(t)$. Для этого запишем решение $y_3(t)$ в виде

$$y_3(t) = C_0 e^{\alpha_5(t-\gamma_2) + \int_{t_0+\gamma_2}^{t} \ell n\left(1-\Phi_3(v)\right)dv},$$

где $C_0 = a_0\Phi_1\left(\ell g y_1(t_0)\right)\left[1 - \Phi_2\left(\ell g y_1(t_0)\right)\right]$.

Очевидно, что

$$y_3(t) \le a_0 e^{\alpha_5(t-\gamma_2)+\int\limits_{t_0+\gamma_2}^{t} \ell n\left(1-\Phi_3(v)\right)dv} \approx a_0 e^{\alpha_5(t-\gamma_2)+\sum\limits_{i=t_0+\gamma_2}^{t} \ell n\left(1-\Phi_3(i)\right)} =$$

$$= a_0 e^{\alpha_5(t-\gamma_2)} \prod_{i=t_0+\gamma_2}^{t} \left(1-\Phi_3(i)\right) \le a_0 e^{\alpha_5(t-\gamma_2)} \left(1-\Phi_3(t)\right).$$

Очевидно, что $\lim\limits_{t\to\infty} e^{\alpha_5(t-\gamma_2)} \left(1-\Phi_3(t)\right) = 0$ и значение $y_3(t)$ будет отлично от нуля при $\Phi_3(t) < 1$. Таким образом, можно найти константу

$$C = \max_t a_0 e^{\alpha_5(t-\gamma_2)} \left(1-\Phi_3(t)\right).$$

Используя вышеполученный результат, получаем

$$C = \max_t y_3(t) = \max_t a_0 e^{\alpha_5(t-\gamma_2)}(1-\Phi_3(t)) = a_0 \cdot 0{,}19\cdot 10^4 = 1{,}52\cdot 10^5$$

при $x_3 = 114, \sigma_3 = 10, \alpha_5 = 0{,}086, \gamma_2 = 18$ (что соответствует реальным значениям параметров модели (1)).

Докажем теперь, что число плазматических клеток $y_4(t)$ равномерно ограничено. Решением дифференциального уравнения при $t \rangle \gamma_1$ и начальных условиях (2)

$$\frac{dy_4(t)}{dt} = y_3(t-\gamma_1)\Phi_3(t-\gamma_1)\frac{\Phi_1(\lg y_1(t-\gamma_1))}{\Phi_1(\lg y_1(t_0))}\theta(t-\gamma_1) - \alpha_6 y_4(t)$$

будет следующее выражение:

$$y_4(t) = \int\limits_{t_0}^{t-\gamma_1} y_3(\tau-\gamma_1)\Phi_3(\tau-\gamma_1)\frac{\Phi_1(\lg y_1(t-\gamma_1))}{\Phi_1(\lg y_1(t_0))} e^{-\alpha_6(t-\tau-\gamma_1)} d\tau.$$

Как было доказано выше, $y_3(t) \le 1{,}52\cdot 10^5$; $\Phi_1(\lg y_1(t)) \le \Phi_1(\lg y_1(t_0))$ – в силу того, что $y_1(t) \le y_1(t_0)$; $0 \langle \Phi_3(t) \langle 1$.

Отсюда $y_4(t) \le \max\limits_t y_3(t) \int\limits_{t_0}^{t-\gamma_1} e^{-\alpha_6(t-\tau-\gamma_1)} d\tau = Q_1 e^{-\alpha_6(t-\gamma_1)} \int\limits_{t_0}^{t-\gamma_1} e^{\alpha_6\tau} d\tau =$

$$= Q_1 e^{-\alpha_6(t-\gamma_1)} \frac{1}{\alpha_6}(e^{\alpha_6(t-\gamma_1)} - 1) = Q_1 \frac{1-e^{-\alpha_6(t-\gamma_1)}}{\alpha_6} \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{Q_1}{\alpha_6},$$

где $Q_1 = \max\limits_t y_3(t)$.

Учитывая, что $Q_1 = 1{,}52\cdot 10^5$,

$$y_4(t) \le \frac{Q_1}{\alpha_6} \le \frac{1{,}52\cdot 10^5}{10^{-2}} = 1{,}52\cdot 10^7 \quad \text{при} \quad \alpha_6 = 0{,}01.$$

Аналогично можно доказать равномерную ограниченность количества антител и клеток-памяти, поскольку они также являются производными от количества пролиферирующих клеток. Число молекул антигена $\overline{y_1}(t)=\overline{y_1}(t_0)$ для всех $1\le \overline{y_1}(t_0)\le 10^{2,5}$ из исследуемого диапазона значений.

2. Утверждается, что решения системы уравнений (1) при неотрицательных условиях (2) – неотрицательны.

Решения первых двух уравнений системы (1) неотрицательны в силу условия, наложенного на них, а именно наличия функции $\theta(y_i(t)), i=1,2$, на которую умножаются правые части этих уравнений.

Очевидно, что три последующих уравнения системы (1) могут быть представлены в виде

$$\frac{dy_i}{dt}=\beta_i(t)y_i+g_i(Y,t), \tag{4}$$

где $Y=\{y_1,y_3\}$; $g_i(Y,t)\ge 0$, $i=\overline{3,5}$; $y_i(t_0)=y_{i0}\ge 0$; $t\ge 0$, $\beta_i(t)$ – постоянные либо ограниченные функции. Тогда, проинтегрировав (4), можно записать

$$y_i(t)=y_{i0}e^{\int_{t_0}^{T}\beta_i(\tau)d\tau}+\int_{t_0}^{T}g_i(Y,u)e^{\int_{u}^{T}\beta_i(\tau)d\tau}du\,. \tag{5}$$

В силу неотрицательности $y_{i0}, g_i(Y,t)$ и ограниченности $\beta_i(t)$ из (5) следует неотрицательность $y_i(t)$, $i=\overline{3,5}$.

Теперь перейдем к исследованию зависимости решения начальной задачи (1)–(2) от начальных значений (2) и параметров. Заметим, что исследование зависимости решения начальной задачи (1)–(2) от начальных значений (2) и t_0 можно свести к задаче об изучении зависимости от параметров в правой части системы (1). Поэтому сначала исследуем зависимость решений системы (1) от параметров α_j, $j=\overline{1,6}$. Для этого покажем, что справедлива следующая теорема.

Теорема. Решение начальной задачи (1)–(2), определенное на отрезке $[t_0,t_0+H]$, непрерывно по α_j при любом α_j из отрезка $\left|\alpha_j-\alpha_j^0\right|\le c_j$, $j=\overline{1,6}$.

Доказательство. При каждом фиксированном α_j, как показано в [2], на отрезке $[t_0,t_0+H]$ определены интегральные кривые – решение начальной задачи (1)–(2). Меняя α_j получаем на $[t_0,t_0+H]$ семейство кривых $y_i(t,\alpha_j)$, $i=\overline{1,4}$, $j=\overline{1,6}$. Теорема будет доказана, если убедимся, что для любого $\varepsilon_j>0$ существует $\delta_j(\varepsilon_j)$ такое, что при $\left|\Delta\alpha_j\right|<\delta_j$, $j=\overline{1,6}$ справедливо неравенство

$$| y_i(t,\alpha_j+\Delta\alpha_j)-y_i(t,\alpha_j)|\langle\varepsilon_j,\ i=\overline{1,4},\ \ j=\overline{1,6}$$

для любых α_j и $\alpha_j+\Delta\alpha_j$ из отрезка $\left|\alpha_j-\alpha_j^0\right|\le c_j$.

Для этого воспользуемся леммой о дифференциальных неравенствах [5]. Пусть функция $z(x)$ непрерывна и имеет кусочно-непрерывную при $z\in\left[x_0,X\right]$ производную, удовлетворяющую неравенству

$$\left|\frac{dz}{dx}\right|\le N\left|z+a\right|, \tag{6}$$

где $N\ge 0, a\ge 0$ – положительные постоянные. (В точках разрыва производной неравенству (6) удовлетворяют ее предельные значения). Тогда имеет место оценка

$$\left|z(x)\right|\le s(x), \qquad x\in(x_0,X),$$

где $s(x)$ – решение начальной задачи для линейного дифференциального уравнения

$$\frac{ds}{dx}=Ns+a, \qquad s(x_0)=b\ge\left|z(x_0)\right|\ge 0.$$

Доказательство вышеприведенной теоремы начнем с третьего уравнения системы (1). При каждом фиксированном α_5 согласно теореме существования [2] на отрезке $\left[t_0,t_0+H\right]$ определена интегральная кривая – решение начальной задачи (1)–(2). Меняя α_5, получаем на отрезке $\left[t_0,t_0+H\right]$ семейство интегральных кривых $y_3(t,\alpha_5)$. Теорема будет доказана, если убедимся, что для любого $\varepsilon\rangle 0$ существует $\delta(\varepsilon)$ такое, что при $\left|\Delta\alpha_5\right|\langle\delta_j$ справедливо неравенство

$$| y_3(t,\alpha_5+\Delta\alpha_5)-y_3(t,\alpha_5)|\langle\varepsilon$$

для любых α_5 и $\alpha_5+\Delta\alpha_5$ из отрезка $\left|\alpha_5-\alpha_5^0\right|\le c_5$. Для этого, используя вышеприведенную лемму о дифференциальных неравенствах, запишем

$$\frac{d}{dt}y_3(t,\alpha_5+\Delta\alpha_5)=(\alpha_5+\Delta\alpha_5+\ln(1-\Phi_3(t)))y_3(t,\alpha_5+\Delta\alpha_5),$$

$$\frac{d}{dt}y_3(t,\alpha_5)=(\alpha_5+\ln(1-\Phi_3(t)))y_3(t,\alpha_5).$$

Вычитая одно соотношение из другого, получаем для разности $\Delta y_3(t,\Delta\alpha_5)=y_3(t,\alpha_5+\Delta\alpha_5)-y_3(t,\alpha_5)$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Delta y_3(t,\Delta\alpha_5)&=(\alpha_5+\Delta\alpha_5+\ln(1-\Phi_3(t)))y_3(t,\alpha_5+\Delta\alpha_5)-\\&-(\alpha_5+\ln(1-\Phi_3(t)))y_3(t,\alpha_5)=\\&=(\alpha_5+\Delta\alpha_5+\ln(1-\Phi_3(t)))\Delta y_3(t,\Delta\alpha_5)+\Delta\alpha_5 y_3(t,\alpha_5).\end{aligned}$$

В силу равномерной ограниченности сверху (относительно t) $y_3(t,\alpha_5)$ и непрерывности $f_3(y_3(t,\alpha_5),t,\alpha_5)$ по совокупности аргументов для любого $\varepsilon_5 \rangle 0$ существует $\delta_5(\varepsilon_5)$ такое, что если $|\Delta\alpha_5| \langle \delta_5^{'}$, то

$$\left| f_3(y_3(t,\alpha_5),t,\alpha_5+\Delta\alpha_5) - f_3(y_3(t,\alpha_5),t,\alpha_5) \right| = \left|\Delta\alpha_5 y_3(t,\alpha_5)\right| \langle \varepsilon_5^{'}$$

равномерно относительно $t \in [t_0, t_0+H]$.

Исходя из того, что $\max\limits_t(\alpha_5+\Delta\alpha_5+\ln(1-\Phi_3(t))) = \alpha_5+\Delta\alpha_5 = N_4$,

получаем $\dfrac{d}{dt}\Delta y_3(t,\Delta\alpha_5) \langle N_4 \left|\Delta y_3(t,\Delta\alpha_5)\right| + \varepsilon_5^{'}$.

Согласно лемме о дифференциальных неравенствах

$$\left|\Delta y_3(t,\Delta\alpha_5)\right| \langle \frac{\varepsilon_5^{'}}{N_4}(e^{N_4(t-t_0)}-1) \le \frac{\varepsilon_5^{'}}{N_4}(e^{N_4 H}-1) = \varepsilon_5^{'}\Omega_5,$$

где Ω_5 – не зависящая от $\varepsilon_5^{'}$ постоянная.

Выбирая $\varepsilon_5^{'} \langle \delta_5^{''}(\varepsilon_5) = \dfrac{\varepsilon_5}{\Omega_5}$ получаем,

$$\left|\Delta y_3(t,\Delta\alpha_5)\right| \langle \varepsilon_5 \text{ при } \left|\alpha_5-\alpha_5^0\right| \langle \delta_5^{'}(\delta_5^{''}(\varepsilon_5)) = \delta_5(\varepsilon_5),$$

что и требовалось доказать.

Для четвертого уравнения системы уравнений (1) (простоты ради не учитываем временное запаздывание) запишем

$$\frac{d}{dt}y_4(t,\alpha_6+\Delta\alpha_6) = y_3(t)\Phi_3(t)\frac{\Phi_1(\lg y_1(t))}{\Phi_1(\lg y_1(t_0))} - (\alpha_6+\Delta\alpha_6)y_4(t,\alpha_6+\Delta\alpha_6),$$

$$\frac{d}{dt}y_4(t,\alpha_6) = y_3(t)\Phi_3(t)\frac{\Phi_1(\lg y_1(t))}{\Phi_1(\lg y_1(t_0))} - (\alpha_6+\Delta\alpha_6)y_4(t,\alpha_6).$$

Вычитая одно соотношение из другого, получаем для разности $\Delta y_4(t,\Delta\alpha_6) = y_4(t,\alpha_6+\Delta\alpha_6) - y_4(t,\alpha_6)$:

$$\frac{d}{dt}\Delta y_4(t,\Delta\alpha_6) = -(\alpha_6+\Delta\alpha_6)y_4(t,\alpha_6+\Delta\alpha_6) + \alpha_6 y_4(t,\alpha_6) =$$
$$= -(\alpha_6+\Delta\alpha_6)\Delta y_4(t,\Delta\alpha_6) + \Delta\alpha_6 y_4(t,\alpha_6).$$

В силу равномерной ограниченности (относительно t) $y_4(t,\alpha_6)$ и непрерывности $f_4(y_4(t,\alpha_6),t,\alpha_6)$ по совокупности аргументов для любого $\varepsilon_6 \rangle 0$ существует $\delta_6(\varepsilon_6)$ такое, что если $|-\Delta\alpha_6| \langle \delta_6^{'}$, то

$$\left| f_4(y_4(t,\alpha_6),t,\alpha_6+\Delta\alpha_6) - f_4(y_4(t,\alpha_6),t,\alpha_6) \right| = \left|-\Delta\alpha_6 y_4(t,\alpha_6)\right| \langle \varepsilon_6^{'}$$

равномерно относительно $t \in [t_0, t_0+H]$.

Обозначая $\left|-(\alpha_6+\Delta\alpha_6)\right|=N_5$, получаем

$$\frac{d}{dt}\Delta y_4(t,\Delta\alpha_6)\langle N_5\left|\Delta\, y_4(t,\Delta\alpha_6\,)\right|+\varepsilon_6^{'} .$$

Согласно лемме о дифференциальных неравенствах

$$\left|\Delta y_4(t,\Delta\alpha_6)\right|\langle\frac{\varepsilon_6^{'}}{N_5}(e^{N_5(t-t_0)}-1)\le\frac{\varepsilon_6^{'}}{N_5}(e^{N_5H}-1)=\varepsilon_6^{'}\Omega_6 ,$$

где Ω_6 – не зависящая от $\varepsilon_6^{'}$ постоянная.

Выбирая $\varepsilon_6^{'}\langle\delta_6^{''}(\varepsilon_6)=\dfrac{\varepsilon_6}{\Omega_6}$ получаем,

$\left|\Delta\, y_4(t,\Delta\alpha_6\,)\right|\langle\varepsilon_6$ при $\left|\alpha_6-\alpha_6^{\,0}\right|\langle\delta_6^{'}(\delta_6^{''}(\varepsilon_6))=\delta_6(\varepsilon_6)$, что и требовалось доказать.

Аналогично можно доказать непрерывность решения задачи (1)–(2) на отрезке $\left[t_0,t_0+H\right]$ по другим параметрам α_j, $j=\overline{1,4}$ [6].

Следствие. Решение начальной задачи (1)–(2), определенное на отрезке $\left[t_0,t_0+H\right]$, непрерывно зависит от начальных значений y_i^0, $i=\overline{1,5}$ и t_0.

Исследование зависимости решения начальной задачи (1)–(2) от начальных значений y_i^0 и t_0 довольно просто сводится к задаче об изучении зависимости от параметров в правой части системы путем замены $y_i=y_i^0+z_i$, $i=\overline{1,5}$, $t=t_0+\tau$. Учитывая, что $z_i=y_i-y_i^0$, записываем

$$\frac{dz_i}{d\tau}=\varphi_i\left(\left\{z_i,i=\overline{1,5}\right\},\tau,\left\{\alpha_j,\,j=\overline{1,6}\right\},\left\{y_i^0,i=\overline{1,5}\right\},t_{\,0}\right),\ i=\overline{1,5}, \qquad (7)$$

$$\varphi_i\left(\left\{z_i,i=\overline{1,5}\right\},\tau,\left\{\alpha_j,\,j=\overline{1,6}\right\},\left\{y_i^0,i=\overline{1,5}\right\},t_{\,0}\right)\equiv$$

$$\equiv\ f_i\left(\left\{y_i^0+z_i,i=1,5,\,t_0+\tau,\left\{\alpha_j\,j=\overline{1,6}\right\}\right\}\right).$$

При $t=t_0$ переменная $\tau=0$ и начальные значения для z_i являются фиксированными, т.е. $z_i(0)=y_i(t_0)-y_i^0=0$.

Значения y_i^0 и t_0 входят в правые части (7) как параметры наряду с параметрами α_j, $j=\overline{1,6}$. Таким образом, задача сводится к исследованию зависимости z_i от параметров y_i^0 и t_0.

Т.О. Лазебна

АНАЛІТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ МОДЕЛІ ГУМОРАЛЬНОЇ ІМУННОЇ РЕАКЦІЇ НА АНТИГЕН. І

Досліджуються питання рівномірної обмеженості, невід'ємності та неперервної залежності від початкових значень і параметрів рішень системи рівнянь, яка описує модель гуморальної імунної реакції на молекулярно-дисперсний антиген, що не розмножується. Модель базується на ймовірнісному підході до опису взаємодій *B*-лімфоцитів та їх продуктів з антигеном.

T.A. Lazebna

AN ANALITICAL INVESTIGATION OF HUMORAL IMMUNE REACTION ON ANTIGEN MODEL. I

The aspects of non-negativity, uniform boundarity and continuous dependency on initial conditions and parameters of the solutions of system of equations are investigated. The system presented describes the model of humoral immune reaction on non-reproducting molecular-disperse antigen, which is based on probability approach to the description of *B*-lymphocytes and its products with antigen interaction.

1. *Лазебная Т.А.* О некоторых вопросах моделирования иммунной реакции гуморального типа // Теорія оптимальних рішень. – 2009. – № 8. – С. 154–160.
2. *Иванов В.В.*, *Яненко В.М.*, *Дынько Т.А.* О математическом и программном обеспечении для моделирования иммунной реакции организма гуморального типа // Математическое обеспечение и программно-технические средства для моделирования развивающихся систем. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова АН УССР, 1986. – С. 133–143.
3. *Иванов В.В.*, *Яненко В.М.*, *Фонталин Л.Н.*, *Нестеренко В.Г.* Моделирование идиотип-антиидиотипических взаимодействий иммунной сети с учетом деления лимфоцитов на субпопуляции // Математические модели в иммунологии и медицине. – М.: Мир, 1986. – С. 123–135.
4. *Дынько Т.А.* Исследование математической модели гуморальной иммунной реакции на антиген // Моделирование функционирования развивающихся систем с изменяющейся структурой. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова АН УССР, 1989. – С. 49–57.
5. *Тихонов А.Н.*, *Васильева А.Б.*, *Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1985. – 231 с.
6. *Дынько Т.А.* Исследование математической модели гуморальной иммунной реакции на антиген (зависимость решений от начальных значений и параметров) // Распознавание и оптимальное управление развитием систем. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова АН УССР, 1990. – С. 23–27.

Получено 15.12.2009

Об авторе:

Лазебная Татьяна Александровна,

научный сотрудник Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.

E-Mail: tanyalazebna@yahoo.com