КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 517.9:519.3

В.Е. КАПУСТЯН, О.П. КОГУТ

СОЛЕНОИДАЛЬНЫЕ УПРАВЛЕНИЯ В КОЭФФИЦИЕНТАХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Рассмотрены задачи оптимального управления в коэффициентах главной части нелинейных эллиптических уравнений. Показано, что такие задачи разрешимы на классе обобщенно соленоидальных управлений.

Введение. Основным объектом исследования данной работы выступает задача оптимального управления в коэффициентах главной части нелинейной эллиптической краевой задачи с условиями Дирихле либо Неймана на границе. Цель работы – установление условий разрешимости таких задач.

Исследованию такого класса задач посвящена достаточно обширная литература (см., например, [1–3]). Но, проблема их разрешимости (без предположения о гладкости допустимых управлений, как это сделано в работах [2, 3]) остается открытой (см. [1, 4]). Как правило, к несуществованию оптимальных решений даже в линейном случае приводит отсутствие непрерывной зависимости решений краевых задач от параметров управления (см. [1]).

Разрешимость задачи оптимального управления в коэффициентах нелинейной эллиптической задачи Дирихле. Рассмотрим эллиптическую задачу Дирихле. Пусть Ω – открытое ограниченное множество с границей $\partial\Omega$, непрерывной по Липшицу. Пусть ξ_1 и ξ_2 – элементы пространства $L_\infty(\Omega)$ такие, что

$$0 < \beta \le \xi_1(x) \le \xi_2(x) \text{ п. в. на } \Omega . \qquad (1)$$

Пусть $\alpha = \|\xi_1\|_{L_\infty(\Omega)}$, $p \in (1, +\infty)$ – заданное, а $M_p^{\alpha,\beta}(\Omega)$ – класс квадратных симметричных матриц $\mathcal{U}(x) = \{a_{i,j}(x)\}_{1 \le i,j \le n}$ таких, что

$$|a_{i,j}(x)|\le \xi_2(x) \text{ п. в. на } \Omega \ \forall i,j\in\{1,2,\ldots,n\}, \tag{2}$$

$$\left(\mathcal{U}(x)([\zeta^{p-2}]\zeta-[\eta^{p-2}]\eta),\zeta-\eta\right)_{\mathbb{R}^n}\ge 0 \text{ п. в. на } \Omega, \tag{3}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)|\eta_i|^{p-2}\eta_i\eta_j\ge\xi_1(x)|\eta|_p^p \text{ п. в. на } \Omega, \tag{4}$$

где $[\eta^{p-2}]=\operatorname{diag}\{|\eta_1|^{p-2},|\eta_2|^{p-2},\ldots,|\eta_n|^{p-2}\}$, $|\eta|_p^p=\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^p \quad \forall\eta\in\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим нелинейный оператор $B: M_p^{\alpha,\beta}(\Omega)\times \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)\to W_q^{-1}(\Omega)$:

$$B(\mathcal{U},y)=\operatorname{div}(\mathcal{U}(x)[(\nabla y)^{p-2}]\,\nabla y)+\mathrm{a}_0(x)|y|^{p-2}\,y, \tag{5}$$

$$\mathrm{a}_0(x)\ge\beta>0 \text{ для п. в. } x\in\Omega;\ \mathrm{a}_0(x)\in L_\infty(\Omega). \tag{6}$$

Свяжем с оператором B для произвольных $y,v\in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ форму:

$$\langle B(\mathcal{U},y),v\rangle_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)}=\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega\left(a_{ij}(x)\left|\frac{\partial y}{\partial x_j}\right|^{p-2}\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)\frac{\partial v}{\partial x_i}dx+\int_\Omega a_0(x)|y|^{p-2}\,yv\,dx. \tag{7}$$

Пусть задан функционал стоимости $L: L_\infty^{n\times n}(\Omega)\times \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)\to\overline{\mathbb{R}}$. С множеством $M_p^{\alpha,\beta}(\Omega)$, оператором B, заданным распределением $f\in W_q^{-1}(\Omega)$ и функционалом L свяжем следующую задачу оптимального управления:

$$L(\mathcal{U}\ y)\to\inf, \tag{8}$$

$$B(\mathcal{U}\ y)=f, \tag{9}$$

$$(\mathcal{U}\ y)\in M_p^{\alpha,\beta}(\Omega)\times \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega). \tag{10}$$

Пару $(\mathcal{U}\ y)\in L_\infty^{n\times n}(\Omega)\times \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ будем называть допустимым решением для задачи (8)–(10), если она связана соотношениями (9)–(10). Пусть Ξ обозначает множество всех допустимых решений задачи (8)–(10). Задачу оптимального управления называют регулярной, если множество ее допустимых решений непустое. Из соотношений (3)–(6), используя известные оценки (см. [4]), имеем:

$$\langle B(\mathcal{U}\ y_1)-B(\mathcal{U}\ y_2),y_1-y_2\rangle_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)}\ge$$

$$\ge\beta\int_\Omega\left((|y_1|^{p-2}\,y_1-|y_2|^{p-2}\,y_2)(y_1-y_2)\right)dx>0 \text{ при } y_1\ne y_2. \tag{11}$$

Используя (11), схему доказательства свойств деминепрерывности и коэрцитивности для оператора $B(\mathcal{U},\cdot)$, взятую из работы [4], можно сделать следующий вывод.

Теорема 1. Пусть выполняются исходные предположения (1)–(4). Тогда задача оптимального управления (8)–(10) регулярна.

Замечание 1. Типичными представителями класса $M_p^{\alpha,\beta}(\Omega)$ являются матрицы:

$\mathcal{U} = \mathrm{diag}\{\delta_1(x),\delta_2(x),...,\delta_n(x)\}$, $\xi_1(x) \le \delta_i(x) \le \xi_1(x)$ п.в. на Ω, $\forall i = \overline{1,n}$.

Пусть τ – произведение $*$-слабой топологии в пространстве $L_\infty^{n\times n}(\Omega)$ и слабой топологии пространства $W_p^1(\Omega)$. Множество $M_p^{\alpha,\beta}$, как следует из его определения, секвенциально компактно относительно $*$-слабой топологии в $L_\infty^{n\times n}(\Omega)$. Вместе с тем, свойство τ-замкнутости для множества допустимых пар Ξ в общем случае не выполняется (см. контр-примеры в [1]), а значит задача оптимального управления (8)–(10) может не иметь решений.

С целью добиться выполнения свойства τ-замкнутости множества Ξ, следуя [4], введем в рассмотрение множество обобщенно соленоидальных матриц. Пусть $Q_1,Q_2,...,Q_n$ образуют совокупность непустых выпуклых компактных множеств пространства $W_q^{-1}(\Omega)$. Рассмотрим множество

$$V = \{\mathcal{U} = [\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n] \in L_\infty^{n\times n}(\Omega) : \mathrm{div}\mathbf{u}_i \in Q_i, \forall i = 1,2,\ldots,n\}, \tag{12}$$

где значение оператора div на векторе $\mathbf{u} \in L_q^n(\Omega)$ определяется как элемент пространства $W_q^{-1}(\Omega)$ такой, что $\langle \mathrm{div}\mathbf{u},\phi\rangle_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)} = -\int_\Omega (\mathbf{u},\nabla\phi)_{\mathbb{R}^n}\,dx \quad \forall\phi \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$.

Введем новое множество допустимых управлений

$$U_{sol} = V \cap M_p^{\alpha,\beta}(\Omega) \tag{13}$$

предполагая, что $V \cap M_p^{\alpha,\beta}(\Omega) \ne \varnothing$. Используя схему доказательства леммы 3 из [4], можно установить следующий результат.

Лемма 1. U_{sol} – секвенциально $*$-слабо компактное множество в $L_\infty^{n\times n}(\Omega)$.

Исходя из переопределения множества допустимых управлений, перейдем к новой задаче оптимального управления: при заданном $f \in W_q^{-1}(\Omega)$ найти

$$L(\mathcal{U},y) \to \inf, \tag{14}$$

$$B(\mathcal{U},y) = f, \tag{15}$$

$$\mathcal{U} \in U_{sol},\ y \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega), \tag{16}$$

где оператор B задается правилом (5)–(6).

Множеством допустимых решений Ξ_{sol} задачи (14)–(16) будем называть совокупность пар $(\mathcal{U}, y) \in L_\infty^{n\times n}(\Omega)\times \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$, удовлетворяющих (15)–(16).

Важную роль при исследовании топологических свойств множества Ξ играют следующие результаты (см. схему доказательства в [4]):

Лемма 2. Пусть $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L_q^n(\Omega)$, $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L_p^n(\Omega)$ – последовательности вектор-функций такие, что $f_k \to f_0$ слабо в $L_q^n(\Omega)$ и $g_k \to g_0$ слабо в $L_p^n(\Omega)$ при $k\to\infty$ ($q = p/(p-1)$). Дополнительно предположим, что $\{\operatorname{div} f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ – компактная последовательность в $W_q^{-1}(\Omega)$, а $\operatorname{rot} g_k = 0$, $\forall k\in\mathbb{N}$. Тогда

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega \phi\big(f_k, g_k\big)_{\mathbb{R}^n}\,dx = \int_\Omega \phi\big(f_0, g_0\big)_{\mathbb{R}^n}\,dx, \quad \forall\phi\in C_0^\infty(\Omega).$$

Теорема 2. Пусть $f\in W_q^{-1}(\Omega)$ – заданное распределение. Пусть выполняются условия (1)–(4), а множество допустимых управлений U_{sol} для задачи (14)–(16) непустое. Тогда Ξ_{sol} – секвенциально τ-замкнутое подмножество пространства $L_\infty^{n\times n}(\Omega)\times \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$.

Теорема 3. Пусть $U_{sol}\neq\varnothing$, выполняются условия (1)–(4) и функционал $L: U_{sol}\times \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)\to\overline{\mathbb{R}}$ в задаче (14)–(16) τ-полунепрерывный снизу. Тогда задача оптимального управления (14)–(16) имеет непустое множество решений.

Заметим, что для доказательства теоремы 3 достаточно установить выполнение для оператора B не свойства $(\mathfrak{M})$, как это делалось в работах [4] (см. теорему 1) и [5], а его можно заменить более слабым свойством $(\mathfrak{M}_\Xi)$: из того, что $\Xi \ni (u_k, y_k)$, $u_k \to u$ $*$-слабо в U, $y_k\to y$ слабо в X, и неравенства $\overline{\lim_{k\to\infty}}\langle B(u_k, y_k), y_k\rangle_X \le \langle d, y\rangle_X$ следует, что $B(u_k, y_k)\to B(u, y)$ слабо в X^*.

Что касается необходимых условий оптимальности для задачи (14)–(16), то их можно получить, привлекая понятие квазисопряженной системы, (см. [6]).

Разрешимость задачи оптимального управления в коэффициентах эллиптической задачи Неймана. Рассмотрим задачу оптимального управления в коэффициентах эллиптической краевой задачи Неймана и покажем, что она разрешима на множестве U_{sol}. Основным базовым пространством в этой задаче выступает $L_\infty^{n\times n}(\Omega)\times W_p^1(\Omega)$. В этом случае пространство $\left(W_p^1(\Omega)\right)^*$ можно представить в виде прямой суммы $W_q^{-1}(\Omega)\oplus\left(B_p^{1/q}(\partial\Omega)\right)^*$, где $B_p^{1/q}(\partial\Omega)$ обозначает пространство Бесова, а именно, пространство следов на $\partial\Omega$ функций из $W_p^1(\Omega)$.

Для каждой матрицы $\mathcal{U}=\{a_{ij}(x)\}_{1\le i,j\le n,}\in M_p^{\alpha,\beta}(\Omega)$ и заданных функций $f\in L_q(\Omega)$ и $g\in\left(B_p^{1/q}(\partial\Omega)\right)^*$ рассмотрим краевую задачу Неймана

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\left|\frac{\partial y}{\partial x_j}\right|^{p-2}\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)+a_0(x)\,|\,y\,|^{p-2}\,y=f \quad \text{в } \Omega, \tag{17}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \nu_B}=g \quad \text{на } \partial\Omega, \tag{18}$$

где $\dfrac{\partial y}{\partial \nu_B}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\left|\dfrac{\partial y}{\partial x_j}\right|^{p-2}\dfrac{\partial y}{\partial x_j}\cos(\nu,x_i)$, ν – вектор единичной внешней нормали к границе $\partial\Omega$. С задачей (17)–(18) будем связывать оператор

$$B:M_p^{\alpha,\beta}(\Omega)\times W_p^1(\Omega)\to W_q^{-1}(\Omega)\oplus\left(B_p^{1/q}(\partial\Omega)\right)^*,\ B(\mathcal{U},y)=B_1(\mathcal{U},y)\oplus B_2(\mathcal{U},y), \tag{19}$$

$$B_1(\mathcal{U},y)=-\mathrm{div}\Big[\mathcal{U}(x)[(\nabla y)^{p-2}]\nabla y\Big]+a_0(x)\,|^{p-2}\,y,$$

$$B_2(\mathcal{U},y)=\Big(\mathcal{U}(x)\Big[(\Delta\gamma_0 y)^{p-2}\Big]\Delta\gamma_0 y,\nu\Big)_{\mathbb{R}^n}, \tag{20}$$

где $\gamma_0:W_p^1(\Omega)\to B_p^{1/q}(\partial\Omega)$ – оператор следа для функций из $W_p^1(\Omega)$ на $\partial\Omega$. Для того, чтобы определить слабое решение задачи (17)–(18) введем в рассмотрение класс вектор-функций $X(\Omega)=\left\{\mathbf{u}\in L_q^n(\Omega)\,|\,\mathrm{div}\mathbf{u}\in L_q(\Omega)\right\}$.

Используя аргументы, приведенные в [7], легко показать, что для элементов этого пространства можно определить понятие слабого следа на $\partial\Omega$, и для произвольной пары функций $(\mathbf{u},v)\in X(\Omega)\times W_p^1(\Omega)$ справедлива формула Стокса $\int_\Omega\Big[(\mathbf{u},\nabla v)_{\mathbb{R}^n}+v\,\mathrm{div}\mathbf{u}\Big]dx=\langle\gamma_{\mathbf{u}},\gamma_0 v\rangle_{B_p^{1/q}(\partial\Omega)}$, где $\gamma_{\mathbf{u}}$ – слабый след $(\mathbf{u},\nu)_{\mathbb{R}^n}$ на $\partial\Omega$. Исходя из этой формулы, с оператором B можно связать форму (7) для любых $y,v\in W_p^1(\Omega)$. Тогда, при каждом $\mathcal{U}\in M_p^{\alpha,\beta}(\Omega)$ слабым решением задачи Неймана будем называть элемент $y\in W_p^1(\Omega)$, который при всех $v\in W_p^1(\Omega)$ удовлетворяет тождество

$$\int_\Omega \left(\mathcal{U}(x)\left[(\nabla y)^{p-2}\right]\nabla y, \nabla v\right)_{\mathbb{R}^n} dx + \int_\Omega a_0(x)\,|\,y\,|^{p-2}\; yv dx =$$

$$= \int_\Omega f v dx + \langle g, \gamma_0 v\rangle_{B_p^{1/q}(\partial\Omega)}. \tag{21}$$

Рассмотрим задачу оптимального управления:

$$L(\mathcal{U}, y) \to \inf, \tag{22}$$

$$B_1(\mathcal{U}, y) = f, \quad B_2(\mathcal{U}, y) = g, \tag{23}$$

$$\mathcal{U} \in U_{sol}, \quad y \in W_p^1(\Omega). \tag{24}$$

Множеством допустимых решений Ξ_{sol} задачи (22)–(24) будем называть совокупность пар $(\mathcal{U}, y) \in U_{sol} \times W_p^1(\Omega)$, связанных между собой интегральным тождеством (21). По аналогии с предыдущим разделом можно показать, что оператор $B : M_p^{\alpha,\beta}(\Omega) \times W_p^1(\Omega) \to \left(W_p^1(\Omega)\right)^*$ – строго монотонен, коэрцитивен и деминепрерывен. Следовательно задача (22)–(24) регулярна. Тогда, основываясь на лемме 4, несложно получить следующий результат.

Теорема 4. Пусть выполняются предположения (1)–(4), а множество U_{sol} непустое. Тогда для любых $f \in L^q(\Omega)$ и $g \in \left(B_p^{1/q}(\partial\Omega)\right)^*$ множество допустимых решений Ξ_{sol} задачи (22)–(24) непустое и секвенциально τ-замкнутое.

Следует отметить, что в этом случае доказательство разрешимости задачи (22)–(24) полностью укладывается в схему доказательства теоремы 1 из [4]. Поэтому, привлекая свойство $(\mathfrak{M}_\Xi)$ для оператора *B*, которое является следствием теоремы 4, можно сделать вывод.

Утверждение. Пусть множество допустимых обобщенно соленоидальных управлений U_{sol} непустое и функционал $L : U_{sol} \times W_p^1(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ в задаче (14)–(16) τ-полунепрерывен снизу. Тогда для любых $f \in L^q(\Omega)$ и $g \in \left(B_p^{1/q}(\partial\Omega)\right)^*$ задача оптимального управления (22)–(24) разрешима.

Необходимые условия оптимальности для задачи (22)–(24) можно получить, используя методику из [6].

Заключение. Таким образом, в работе показано, что задачи оптимального управления коэффициентами главной части нелинейных эллиптических уравнений разрешимы в классе обобщенно соленоидальных матриц.

В.О. Капустян, О.П. Когут

СОЛЕНОЇДАЛЬНІ КЕРУВАННЯ В КОЕФІЦІЄНТАХ
НЕЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Розглядаються задачі оптимального керування коефіцієнтами головної частини нелінійних еліптичних рівнянь. Показана їх розв'язність на класі узагальнено соленоїдальних керувань.

V.O. Kapustyan, O.P. Kogut

SOLENOIDAL CONTROLS IN COEFFICIENTS OF NONLINEAR ELLIPTIC BOUNDARY-VALUE PROBLEMS

In the paper, the problems of optimal control of coefficients of the main part of nonlinear elliptic equations are considered. Solvability of such problems in the class of generalized solenoidal controls is proved.

1. *Райтум У.Е.* Задачи оптимального управления для эллиптических уравнений. – Рига: Зинатне, 1989. – 274 с.
2. *Литвинов В.Г.* Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике. – М.: Наука, 1987. – 366 с.
3. *Тагиев Р.К.* Оптимальное управление коэффициентами в параболических системах // Дифференциальные уравнения. – 2009. – **45,** № 10. – С. 1492–1501.
4. *Капустян В.О., Когут О.П.* Про розв'язність одного класу задач оптимального керування коефіцієнтами в головній частині нелінійного еліптичного оператора // Нелінійні коливання. – 2009. – **12**, № 1. – С. 59 – 72.
5. *Иваненко В.И., Мельник В.И.* Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами. – Киев: Наук. думка, 1988. – 324 с.
6. *Серовайский С.Я.* Вариационнные неравенства в нелинейных задачах оптимального управления // Методы и средства математического моделирования. – Алма-Ата, 1977. – С. 156–169.
7. *Anzellotti G.* Pairings Between Measures and Bounded Functions and Compensated Compactness. – New York: Academic Press, 1975. – 245 p.

Получено 07.04.2009

Об авторах:

Капустян Владимир Емельянович,
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой
математического моделирования экономических систем НТУ Украины «КПИ»,
e-mail: kapustyanv@ukr.net

Когут Ольга Петровна,
ассистент кафедры математического моделирования экономических систем
НТУ Украины «КПИ».
e-mail: kogut_olga@bk.ru