КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.21

Т.В. ПЕПЕЛЯЕВА

О НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ РЫНКА ЦЕННЫХ БУМАГ

Описан алгоритм решения нелинейных стохастических дифференциальных уравнений определенного вида. Получено решение некоторого дифференциального уравнения с дробным винеровским процессом.

Введение. Моделирование динамических процессов на финансовых рынках основывается на исследовании стохастических уравнений, в особенности нелинейных, что обусловлено стохастической природой этих процессов. В настоящей работе рассмотрим те уравнения, решения которых описывают динамику короткой процентной ставки во времени. Представленные в роботе методы дают решения в явном виде, поэтому они являются удобными для программной реализации со следующим практическим их применением. Метод базируется на возможности экспоненциального представления динамики стоимости бонда и дальнейшего исследования процентной ставки как функции, которая не зависит от времени.

При моделировании различных процессов, которые протекают на финансовом рынке, а именно моделировании динамики изменения во времени стоимости ценных бумаг, банковского счета, необходимо знать значения короткой процентной ставки в каждый момент времени, т. е. ее динамику.

Рассмотрим рынок ценных бумаг, на котором действуют бонды.

Бондом с датой выплаты T, или T-бондом, называют контракт, который гарантирует его владельцу, что в момент времени T ему будет выплачено 1 гривну.

Цену бонда в момент времени t с датой выплаты T обозначим $p(t, T)$. Короткая процентная ставка в момент времени t и цена T-бонда связаны между собой следующим соотношением:

$$r(t) = -\frac{\partial \log p(t,t)}{\partial t}.$$

Текущий банковский счет определяется с помощью процентной ставки, а именно

$$B_t = \exp\left\{\int_0^t r(s)ds\right\}, \text{ или } \begin{cases} dB(t) = r(t)B(t)dt; \\ B(0) = 1. \end{cases}$$

Для нахождения цены T-бонда в каждый момент времени t на рынке ценных бумаг, т. е. нахождения процесса $\{p(\cdot, T), T \geq 0\}$, а также для нахождения банковского счета в момент времени t необходимо исследовать поведение короткой процентной ставки, а точнее – определить ее динамику.

Динамика короткой процентной ставки задается стохастическим дифференциальным уравнением, общий вид которого следующий:

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW(t), \tag{1}$$

где $r(t)$ – стохастический процесс для короткой ставки, $\mu(t, r)$ – функция сноса, $\sigma(t, r)$ – диффузия уравнения, $W(t)$ – винеровский процесс.

Пусть дальше цена T-бонда задается с помощью некоторой функции

$$p(t, T) = R(t, r(t); T),$$

где R – гладкая функция от трех переменных.

Так как во время выплаты T собственник бонда должен получить 1 гривну, то естественно допустить, что для любого r $R(T, r; T)=1$.

На самом деле функция R зависит лишь от двух переменных, и T можно считать параметром, поэтому в дальнейшем будем писать $R(t, r)$.

В работе [1] показано, что цена T-бонда задается следующим образом:

$$p(t, T) = R(t, r(t); T) = E\left[e^{-\int_t^T r(s)ds}\right].$$

1. Основное место в методе, который изложен ниже, занимает понятие аффинной структуры модели.

Говорят, что модель цены T-бонда допускает аффинную структуру, если

$$p(t, T) = R(t, r(t); T),$$

где R имеет вид

$$R(t, r; T) = e^{A(t,T) - B(t,T)r}, \tag{2}$$

A, B – определенные функции, которые не зависят от r.

Имеет место следующее утверждение ([1]).

Теорема 1. Предположим, что в уравнении (1) μ и σ можно представить в виде

$$\begin{cases} \mu(t, r) = \alpha(t)r + \beta(t), \\ \sigma(t, r) = \sqrt{\gamma(t)r + \delta(t)}. \end{cases}$$

Тогда R допускает аффинную структуру (2).

Рассмотрим следующие нелинейные стохастические дифференциальные уравнения, которые чаще всего применяют для моделирования короткой процентной ставки на рынке ценных бумаг:

уравнение Кокса–Ингерсолла–Росса

$$dr(t)=ar(t)\,dt+\sigma\sqrt{r(t)}\,dW(t);$$

уравнение Халла-Вайта (расширение Васичека)

$$dr(t)=(\theta(t)-a(t)r(t))dt+\sigma(t)dW(t)\,,\quad (a(t)>0); \tag{3}$$

уравнение Халла–Вайта (расширение Кокса–Ингерсолла–Росса)

$$dr(t)=(\theta(t)-a(t)r(t))dt+\sigma(t)\sqrt{r(t)}\,dW(t),\quad (a(t)>0).$$

Опишем общий алгоритм решения нелинейных стохастических уравнений подобного рода.

Чтобы решить уравнения, общий вид которого задает (1), будем искать функцию $R(t, r)$ как решение некоторого стохастического уравнения. Далее проверяем, удовлетворяет ли исходное уравнение (1) условиям теоремы 1.

Все примеры уравнений, которые приведены выше, удовлетворяют условиям этой теоремы, следовательно R допускает соответствующее экспоненциальное представление. После подстановки в уравнения вместо $R(t, r)$ его представление (2), получим некоторое уравнение и воспользуемся формулой Ито.

Формула Ито [2]. Пусть функция $\Phi(t, x)$ непрерывна и имеет непрерывные производные $\Phi'_t(t,x)$, $\Phi'_x(t,x)$, $\Phi''_{xx}(t,x)$, а $\xi(t)$ имеет стохастический дифференциал $d\xi(t)= a(t)dt+b(t)\,dW(t)$.

Тогда $\Phi(t, \xi(t))$ тоже имеет стохастический дифференциал:

$$d\Phi(t,\xi(t))=[\,\Phi'_t(t,\xi(t))+\Phi'_x(t,\xi(t))\,a(t)+\frac{1}{2}\Phi''_{xx}(t,\xi(t))\,b^2(t)]dt+\Phi'_x(t,\xi(t))\,b(t)dW(t).$$

Из формулы Ито вытекает, что в общем случае в уравнении (1) цена T-бонда $R(t,r)$ удовлетворяет такому стохастическому дифференциальному уравнению:

$$dR(t, r)=[\,R'_t(t,r)+\mu(t, r(t))\,R'_r(t,r)+\frac{1}{2}\sigma^2(t, r(t))\,R''_{rr}(t,r)\,]dt+\sigma(t, r(t))\,R'_r(t,r)\,dW(t).$$

После применения формулы Ито к функции $R(t, r)$ и проведения ряда преобразований, получаем систему дифференциальных уравнений относительно функций $A(t)$ и $B(t)$, которая имеет решение. При решении уравнения с функцией $R(t, r)$ после замены $z = \ln R$, также получаем его решение другим способом. После того, как в полученное соотношение подставим вместо $R(t, r)$ выражение $e^{(t)-r(t)}$, где $A(t)$ и $B(t)$ уже известно, и прологарифмируем обе части, получим квадратное или линейное уравнение относительно r, которое решается соответствующим образом.

Следует заметить, что в описанном методе решения нелинейных стохастических уравнений процентная ставка *r* рассматривается как функция, которая не зависит от времени *t* в процессе решения.

2. Стохастические процессы, которые используются в финансовой математике, часто оказываются марковскими, т. е. процессами, которые не зависят от прошлого. Но исследования показали [3], что реальное поведение стоимости ценных бумаг и многих других показателей фондовой биржи, которые моделируются с помощью стохастических процессов, в большинстве случаев являются процессами с зависимыми приращениями. Другими словами, поведение реального процесса в данный момент времени *t* зависит не только от ситуации в момент времени *t*, но и от всей истории процесса до времени *t*. Более того, оказывается, что пренебрежение этим свойством в действительности влияет на ожидаемое поведение глобальной системы. Поэтому более точное моделирование процессов экономики дают дробные винеровские процессы с параметром Харста.

Наряду с уравнением Халла-Вайта (расширение Васичека), которое имеет вид (3), рассмотрим обобщенное уравнение Халла-Вайта (расширение Васичека) с дробным белым шумом

$$dr(t)=(\theta(t)-a(t)r(t))dt+\sigma(t)dB_H(t). \tag{4}$$

где B_t^H – дробный винеровский процесс с параметром Харста $H\in(1/2,1)$, т. е. B_t^H – непрерывный гауссовский процесс, такой что $B_0^H=0$, $EB_t^H=0$, $t\geq 0$, и ковариационная функция задается следующим образом:

$$E(B_t^H,B_s^H)=\frac{1}{2}\left(t^{2H}+s^{2H}-|t-s|^{2H}\right),\ s,t\geq 0.$$

Следует заметить, что при H = 1/2 случайный процесс B_t^H – обычное броуновское движение.

Теорема 2. Пусть процентная ставка *r* удовлетворяет уравнению (4). Тогда *r* имеет такой вид:

$$r(t)=\frac{1}{B(t)}[A(t)-\int_t^T\left(a(s)-\frac{1}{2}B^2(s)\sigma_1^2(s)\right)ds+\int_t^T B(s)\sigma_1(s)dW(s)],$$

где $A(t)=\int_0^t a(s)\,ds+\int_0^t \theta_1(s)e^{\int_0^s a(u)du}ds-\frac{1}{2}\int_0^t\sigma_1^2(s)e^{2\int_0^s a(u)du}ds$, $B(t)=e^{\int_0^t a(s)ds}$,

$$\theta_1(t)=\theta(t)+\sigma(t)\,(c_H-C_H)(H-1/2)t^{H-3/2}\int_0^t(t-s)^{H-3/2}M_s\,ds,$$

$$\sigma_1(t)=(c_H\frac{1}{H-1/2}-C_H(H-1/2))t.$$

Доказательство. В работе [4] доказано следующее представление дробного винеровского процесса через обычный:

$$B^H(t)=c_H t^H-1/2\int_0^t (t-s)^{H-3/2} M_s ds - C_H(H-1/2)\int_0^t s^{H-3/2}\left(\int_0^s (s-v)^{H-3/2} M_v dv\right)ds,$$

где $M_t=\int_0^t s^{1/2-H} dW_s$ или $dM_t=t^{1/2-H}dW_t$., константы c_H и C_H определены в [5].

Найдем $dB_H(t)$ по формуле Ито. Для этого вычислим следующие частичные производные:

$$B'_t(t)=(c_H-C_H)(H-1/2)t^{H-3/2}\int_0^t (t-s)^{H-3/2} M_s ds + c_H(H-3/2)\, t^{H-1/2}\int_0^t (t-s)^{H-5/2} M_s ds,$$

$$B'_M(t)=(c_H-2C_H)\,\frac{1}{H-1/2}\,t^{2H-1},\ \ B''_M(t)=0.$$

По формуле Ито получаем, что

$$dB_H(t, M_t)=(c_H-C_H)(H-1/2)\left[t^{H-3/2}\int_0^t (t-s)^{H-3/2} M_s ds\right]dt+$$

$$+\left(c_H\frac{1}{H-1/2}-C_H(H-1/2)\right)t\,dW_t.$$

Подставим полученное выражение для $dB_H(t)$ в уравнение (4). Имеем

$$dr(t)=\left[\theta(t)-a(t)r(t)+\sigma(t)\,(c_H-C_H)(H-1/2)\,t^{H-3/2}\int_0^t (t-s)^{H-3/2} M_s ds\right]dt+$$

$$+\sigma(t)\left(c_H\frac{1}{H-1/2}-C_H(H-1/2)\right)t\,dW(t).$$

То есть мы пришли к уравнению Халла–Вайта (расширение Васичека) с обычным винеровским процессом вида (3), но с другими коэффициентами:

$$dr(t)=(\theta_1(t)-a(t)r(t))dt+\sigma_1(t)dW(t), \qquad (5)$$

где $\theta_1(t)=\theta(t)+\sigma(t)\,(c_H-C_H)(H-1/2)t^{H-3/2}\int_0^t (t-s)^{H-3/2} M_s ds$,

$$\sigma_1(t)=\left(c_H\frac{1}{H-1/2}-C_H(H-1/2)\right)t.$$

Уравнение (5) было решено в [6], причем решение получено в явном виде:

$$r(t)=\frac{1}{B(t)}[A(t)-\int_t^T\left(a(s)-\frac{1}{2}B^2(s)\sigma_1^{\,2}(s)\right)ds+\int_t^T B(s)\sigma_1(s)dW(s)],$$

где $$A(t)=\int_0^t a(s)\,ds+\int_0^t \theta_1(s)e^{\int_0^s a(u)du}ds-\frac{1}{2}\int_0^t \sigma_1^{\,2}(s)e^{2\int_0^s a(u)du}ds,\ B(t)=\mathrm{e}^{\int_0^t a(s)ds}.$$

Теорема доказана.

Заключение. Исследуются стохастические уравнения и их решения. Предложен общий метод решения таких уравнений. Доказана теорема, которая дает решение стохастического дифференциального уравнения с дробным винеровским процессом. Такой результат можно применять при моделировании процентной ставки на рынке ценных бумаг.

Т.В. Пепелясва

ДЕЯКІ НЕЛІНІЙНІ СТОХАСТИЧНІ МОДЕЛІ РИНКУ ЦІННИХ ПАПЕРІВ

Описано алгоритм розв’язування нелінійних стохастичних диференціальних рівнянь певного типу. Отримано розв’язок деякого диференційного рівняння з дробовим вінерівським процесом.

T.V. Pepelyaeva

SOME NONLINER STOCHASTIC MODELS OF THE MARKET OF SECURITIES

An algorithm for solving nonlinear stochastic differential equations of certain type is described. The solution to a differential equation with a fractional Wiener proces is obtained.

1. *Bjork T.* Arbitrage theory in continuous time. – Oxford: Oxford Univ. Press, 1988. – 312 p.
2. *Скороход А.В.* Лекції з теорії випадкових процесів. – К.: Либідь, 1990. – 168 с.
3. *Leland W.E., Taqqu M.S., Willinger W., Wilson D.* On the self-similar nature ethernet traffic // Trans. Networking 2. – 1994. – P. 1–15.
4. *Mishura Yu.* Fractional stochastic integration and Black-Scholes equation for fractional Brownian model with stochastic volatility: Prepr., Department of Mathematics, University of Helsinki. – Helsinki, 2002. – N 237 – 19 p.
5. *Mishura Yu. S.* Quasilinear stochastic differential equations with fractional-Brownian component // J. Probobility theory and Mathem. Statistics. – 2003. – N 68. – P. 95 – 106.
6. *Кнопова В.П., Пепеляева Т.В.* О некоторых стохастических моделях финансовой математики // Кибернетика и системный анализ. – 2001. – № 3. – С. 152 – 158.

Получено 22.12.2009

Об авторе:

Пепеляева Татьяна Владимировна,
кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.