КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 680.3.06

Е.В. НАЗАРЕНКО, Т.М. ФЕСУН

ЛИНЕЙНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрен случай линейной интерполяции функций многих переменных и приведены примеры компьютерных расчетов. Изложен алгоритм решения частного случая указанной задачи полиномами первой степени.

Введение. Задача приближения функций возникает, когда исходная функция задана в дискретных точках исследуемого диапазона (это могут быть, например, замеры некоторой физической величины в определенные моменты времени), при этом необходимо вычислить значение функции в точках, отличных от заданных. Необходимость замены дискретного представления функции обусловлена тем, что во многих задачах, например, математического моделирования, требуется наличие аналитических выражений, характеризующих поведение функции. Кроме этого, наличие аналитического выражения позволяет при необходимости получать дополнительные значения функции в точках, не охваченных измерениями.

Для решения проблемы приближенного представления функции существуют три способа приближения, а именно, равномерное, среднеквадратичное и интерполяционное. *Равномерное* или *наилучшее чебышевское приближение* функции $f(x)$ функционалом $\varphi(x)$ обеспечивает выполнение неравенства $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ на всем интервале приближения. Мерой близости при *среднеквадратичном приближении* является величина

$$\delta = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\left(f(x_i) - \varphi(x_i)\right)^2},$$

где $p(x)$ – заданная неотрицательная функция (вес). Способ *интерполяции* состоит в построении для заданных значений функции $f(x)$ и точек X такой приближающей функции $\varphi(x)$, что для каждой точки $x^* \in X$ требуется совпадение значений этой функции и заданной; тогда точки x^* – суть узлы интерполяции.

В отличие от способа равномерного приближения, среднеквадратичный и интерполяционный способы гарантируют близость значений приближающей и приближаемой функций лишь на некотором конечном наборе точек, при этом между этими точками они могут сильно отличаться.

Несмотря на указанные недостатки этих способов, в силу простоты их реализации, они широко используются на практике в инженерных расчетах.

Далее рассмотрен случай линейной интерполяции функции многих переменных и приведены примеры компьютерных расчетов.

Постановка задачи. Выберем в пространстве R действительных функций, определенных на [a, b], конечную или счетную совокупность $\{\varphi_i\}$ его элементов, причем будем предполагать, что любая конечная система этих элементов линейно независима. Возьмем первые n+1 элементов $\{\varphi_i\}$ и образуем всевозможные линейные комбинации $\alpha_0\varphi_0+\alpha_1\varphi_1+\ldots+\alpha_n\varphi_n$ с действительными коэффициентами α_i. Они образуют линейное множество, которое обозначим через $\overline{R_n}$, $\overline{R_n}\subset R$. Выберем также некоторую конечную совокупность точек $x_0, x_1, \ldots, x_m$ $(x_i \neq x_j, i\neq j)$, принадлежащих [a, b]. Произвольной функции $f\in R$ требуется поставить в соответствие функцию $\varphi\in\overline{R_n}$, такую, чтобы $f(x_j)=\varphi(x_j)$, $j=\overline{0,m}$. [1].

Существует множество методов решения поставленной задачи, которые описаны, например в [1–4]. Для решения задачи можно использовать интерполяционную формулу Ньютона с разделенными разностями. Разделенные разности нулевого порядка $f(x_i)$ совпадают со значениями функции $f(x_i)$; разности 1-го порядка определяются равенством $f(x_i;x_j)=\dfrac{f(x_j)-f(x_i)}{x_j-x_i}$, разности 2-го порядка – равенством $f(x_i;x_j;x_k)=\dfrac{f(x_j;x_k)-f(x_i;x_j)}{x_k-x_i}$, разности k-го порядка определяются через разности (k–1)-го порядка по формуле

$$f(x_1;\ldots;x_{k+1})=\frac{f(x_2;\ldots;x_{k+1})-f(x_1;\ldots;x_k)}{x_{k+1}-x_1}.$$

Многочлен

$$L_n(x)=f(x_1)+f(x_1;x_2)(x-x_1)+\ldots+f(x_1;\ldots;x_n)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}) \qquad (1)$$

называется многочленом Ньютона с разделенными разностями [5].

Для случая многих переменных задача линейной интерполяции сформулирована так. Пусть сетка E_N n-мерного пространства задана значениями $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_{m_i}^{(i)}$ по каждой переменной:

$$E_N=\{x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{m_1}^{(1)}\}\times\{x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_{m_2}^{(2)}\}\times\ldots\times\{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_{m_n}^{(n)}\},$$

а в узлах сетки заданы значения функции n переменных $f(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)})$.

На сетке функцию *f* приближенно представим формулой, аналогичной (1) [6]:

$$L_n\left(x^{(1)},x^{(2)},\ldots,x^{(n)}\right)=\sum_{i_1=0}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{m_2}\cdots\sum_{i_n=0}^{m_n} f\left(x_0^{(1)};\ldots;x_{i_1}^{(1)};\ldots;x_0^{(n)};\ldots;x_{i_n}^{(n)}\right)\mathrm{P}_{i_1}^1\ldots\mathrm{P}_{i_n}^n,$$

$$\mathrm{P}_i^j=\begin{cases}1, i=0\\ \prod_{k=0}^{i-1}\left(x^{(j)}-x_k^{(j)}\right), i>0\end{cases}.$$

Ниже приведен алгоритм решения частного случая задачи линейной интерполяции функций многих переменных полиномами первой степени.

Алгоритм. Пусть известны значения функции $f\left(x^{(1)},x^{(2)},\ldots,x^{(n)}\right)$ в точках прямоугольной сетки E_N *n*-мерного пространства и пусть задана некоторая точка $\xi\left(\xi^{(1)},\xi^{(2)},\ldots,\xi^{(n)}\right)$ в пределах сетки. Требуется построить для области прямоугольника сетки, содержащей данную точку ξ, линейную интерполяционную функцию $\overline{f}\left(x^{(1)},x^{(2)},\ldots,x^{(n)}\right)=p_0+\sum_{i=1}^{n}p_i x^{(i)}$, которая совпадает с исходной в узлах интерполяции, и найти ее значение в точке ξ [6].

Прямоугольник

$$\Pi=\left[x_{j_1}^{(1)},x_{j_1+1}^{(1)}\right]\times\left[x_{j_2}^{(2)},x_{j_2+1}^{(2)}\right]\times\ldots\times\left[x_{j_n}^{(n)},x_{j_n+1}^{(n)}\right],\quad x_{j_i}^{(i)}\le\xi^{(i)}<x_{j_i+1}^{(i)},\quad i=\overline{1,n}$$

сетки E_N может быть разбит на 2^n прямоугольников вида $\Pi_k=\sigma_1\times\sigma_2\times\ldots\times\sigma_n$, где σ_i равно либо $\sigma_i^1=\left[x_{j_i}^{(i)},\left(x_{j_i}^{(i)}+x_{j_i+1}^{(i)}\right)/2\right)$, либо $\sigma_i^2=\left[\left(x_{j_i}^{(i)}+x_{j_i+1}^{(i)}\right)/2,x_{j_i+1}^{(i)}\right)$.

Пусть $\xi\in\Pi_{k^*}$. Тогда в прямоугольнике Π_{k^*} функцию *f* можно приближенно представить функцией

$$\overline{f}\left(x^{(1)},x^{(2)},\ldots,x^{(n)}\right)=f\left(x_{j_1+\theta_1}^{(1)},x_{j_2+\theta_2}^{(2)},\ldots,x_{j_n+\theta_n}^{(n)}\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(x^{(i)}-x_{j_i+\theta_i}^{(i)}\right)\times$$

$$\times f\left(x_{j_1+\theta_1}^{(1)};x_{j_2+\theta_2}^{(2)};\ldots;x_{j_{i-1}+\theta_{i-1}}^{(i-1)};x_{j_i+\theta_i}^{(i)};x_{j_i+1-\theta_i}^{(i)};x_{j_{i+1}+\theta_{i+1}}^{(i+1)};\ldots;x_{j_n+\theta_n}^{(n)}\right)=p_0+\sum_{i=1}^{n}p_i x^{(i)},\quad(2)$$

где $p_i=f\left(x_{j_1+\theta_1}^{(1)};\ldots;x_{j_{i-1}+\theta_{i-1}}^{(i-1)};x_{j_i+\theta_i}^{(i)};x_{j_i+1-\theta_i}^{(i)};x_{j_{i+1}+\theta_{i+1}}^{(i+1)};\ldots;x_{j_n+\theta_n}^{(n)}\right),\ i>0$,

$$p_0=f\left(x_{j_1+\theta_1}^{(1)};\ldots;x_{j_n+\theta_n}^{(n)}\right)-\sum_{i=1}^{n}x_{j_i+\theta_i}^{(i)}p_i,\quad \theta_i=\begin{cases}0,\ \text{если}\ \ \xi^{(i)}\in\sigma_i^1,\\ 1,\ \text{если}\ \ \xi^{(i)}\in\sigma_i^2\end{cases},$$

$$f\left(x_{j_1+\theta_1}^{(1)};x_{j_2+\theta_2}^{(2)};\ldots;x_{j_{i-1}+\theta_{i-1}}^{(i-1)};x_{j_i+\theta_i}^{(i)};x_{j_i+1-\theta_i}^{(i)};x_{j_{i+1}+\theta_{i+1}}^{(i+1)};\ldots;x_{j_n+\theta_n}^{(n)}\right)=$$

$$=\frac{f\left(x_{j_1+\theta_1}^{(1)},x_{j_2+\theta_2}^{(2)},\ldots,x_{j_{i-1}+\theta_{i-1}}^{(i-1)},x_{j_i+1-\theta_i}^{(i)},x_{j_{i+1}+\theta_{i+1}}^{(i+1)},\ldots,x_{j_n+\theta_n}^{(n)}\right)-f\left(x_{j_1+\theta_1}^{(1)},x_{j_2+\theta_2}^{(2)},\ldots,x_{j_n+\theta_n}^{(n)}\right)}{x_{j_i+1-\theta_i}^{(i)}-x_{j_i+\theta_i}^{(i)}}.\quad(3)$$

Программная реализация. Входные данные программы – массив сетки и последовательность значений функции, заданные следующим образом:

$$f\left(x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots, x_1^{(n)}\right),\quad f\left(x_2^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots, x_1^{(n)}\right), \ldots,\quad f\left(x_{m_1}^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots, x_1^{(n)}\right),$$

$$f\left(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, x_1^{(3)}, \ldots, x_1^{(n)}\right), f\left(x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, x_1^{(3)}, \ldots, x_1^{(n)}\right),\ \ldots,\ f\left(x_{m_1}^{(1)}, x_2^{(2)}, x_1^{(3)}, \ldots, x_1^{(n)}\right), \ldots,$$

$$\ldots, f\left(x_{m_1}^{(1)}, x_{m_2}^{(2)}, x_1^{(3)}, \ldots, x_1^{(n)}\right), \ldots, f\left(x_{m_1}^{(1)}, x_{m_2}^{(2)}, x_{m_3}^{(3)}, \ldots, x_{m_{n-1}}^{(n-1)}, x_1^{(n)}\right), \ldots, f\left(x_{m_1}^{(1)}, x_{m_2}^{(2)}, x_{m_3}^{(3)}, \ldots, x_{m_n}^{(n)}\right),$$

где m_i – количество точек сетки по i-й координате.

Значение $f\left(x_{j_1}^{(1)}, x_{j_2}^{(2)}, \ldots, x_{j_n}^{(n)}\right)$ является

$$N\left(j_1, j_2, \ldots, j_n\right) = j_1 + \sum_{i=2}^{n}\left(j_i - 1\right)\prod_{k=1}^{i-1} m_k \text{ -м} \tag{4}$$

элементом последовательности [6], причем номер $N\left(j_1, j_2, \ldots, j_{l-1}, j_l - 1, j_{l+1}, \ldots, j_n\right)$ может быть вычислен через номер $N\left(j_1, j_2, \ldots, j_n\right)$ по рекуррентной формуле

$$N\left(j_1, j_2, \ldots, j_{l-1}, j_l - 1, j_{l+1}, \ldots, j_n\right) = N\left(j_1, j_2, \ldots j_n\right) - \prod_{k=1}^{l-1} m_k\,. \tag{5}$$

Исходя из (4), имеем

$$N\left(j_1, j_2, \ldots, j_{l-1}, j_l - 1, j_{l+1}, \ldots, j_n\right) = j_1 + \sum_{i=2}^{l-1}\left(j_i - 1\right)\prod_{k=1}^{i-1} m_k + \left(j_l - 2\right)\prod_{k=1}^{l-1} m_k +$$

$$+\sum_{i=l+1}^{n}\left(j_i - 1\right)\prod_{k=1}^{i-1} m_k = j_1 + \sum_{i=2}^{l-1}\left(j_i - 1\right)\prod_{k=1}^{i-1} m_k + \left(j_l - 1\right)\prod_{k=1}^{l-1} m_k - \prod_{k=1}^{l-1} m_k + \sum_{i=l+1}^{n}\left(j_i - 1\right)\prod_{k=1}^{i-1} m_k =$$

$$= j_1 + \sum_{i=2}^{n}\left(j_i - 1\right)\prod_{k=1}^{i-1} m_k - \prod_{k=1}^{l-1} m_k = N\left(j_1, j_2, \ldots j_n\right) - \prod_{k=1}^{l-1} m_k\,.$$

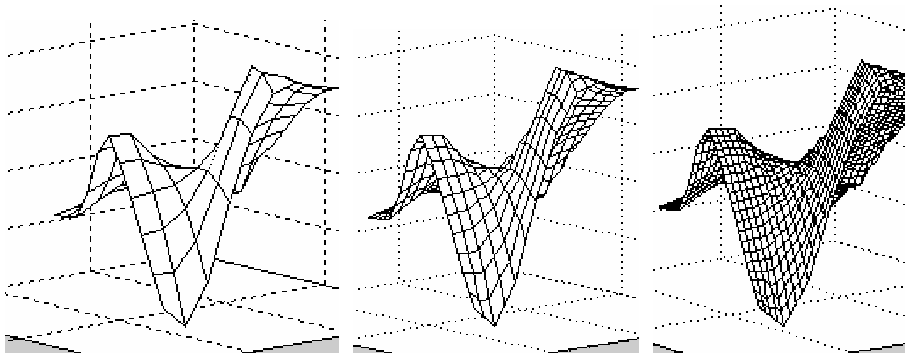
Аналогично имеем

$$N\left(j_1, j_2, \ldots, j_{l-1}, j_l + 1, j_{l+1}, \ldots, j_n\right) = N\left(j_1, j_2, \ldots j_n\right) + \prod_{k=1}^{l-1} m_k\,. \tag{6}$$

Вычислив за n итераций по формуле (4) номер $N\left(j_1, j_2, \ldots, j_n\right)$, за n итераций (учитывая, что $\prod_{k=1}^{l} m_k = m_l \prod_{k=1}^{l-1} m_k$) по формулам (5) и (6) получим номера остальных n узлов интерполяции. Имея номера узлов интерполяции и вычислив разделенные разности по формуле (3), согласно (2) вычислим коэффициенты интерполирующей функции.

Задача в такой постановке реализована в виде С++-функции и входит в состав библиотеки **many_var_interp.a** для кластерного комплекса СКИТ.

Для иллюстрации работы программы рассмотрим следующий пример. Пусть имеем решетку с постоянным шагом Δ_x и Δ_y по осям x и y соответственно, в узлах которой заданы значения функции. Необходимо вычислить значения функции в узлах решетки с шагом Δ_x^* и Δ_y^*, причем $\Delta_x = k\Delta_x^*$, а $\Delta_y = t\Delta_y^*$, $k > 1$ и $t > 1$ – целые числа. Для этого алгоритм, по которому вычисляется значение функции только в одной точке, фактически работает многократно для получения значений функции в выбранных точках. На рисунке изображены исходная решетка и решетки, полученные из исходной с коэффициентами k = 2, t = 2 и k = 4 и t = 4.



РИСУНОК

Заключение. На практике используют способ интерполяционного приближения функции многих переменных при решении разного рода задач, например, связанных с картографией. Отметим, что этот способ можно при необходимости также использовать для частного случая увеличения количества значений сетки начального задания функции с учетом погрешности вычислений.

Є.В. Назаренко, Т.М. Фесун

ЛІНІЙНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Розглянуто випадок лінійної інтерполяції функцій багатьох змінних та наведено приклади комп'ютерних розрахунків. Викладено алгоритм розв'язування часткового випадку вказаної задачі поліномами першої степені.

Ye.V. Nazarenko, T.M. Fesun

LINEAR INTERPOLATION OF MULTIVARIABLE FUNCTIONS

A case of linear interpolation of multivariable functions is presented. Examples of computations are given. An algorithm solving a special case of the problem using linear polynomials is described.

1. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. – М.: – Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. – 464 с.
2. *Стефенсен И.Ф.* Теория интерполяции. – Л.: Главная редакция общетехнической литературы и номографии, 1935. – 235 с.
3. *Микеладзе Ш.Е.* Численные методы математического анализа. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953. – 527 с.
4. *Гончаров В.Л.* Теория интерполирования и приближения функций. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1954. – 327 с.
5. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. – Спб: Нев. Диалект, 2000. – 630 с.
6. *Порханова А.А., Фесун Т.М.* Линейное интерполирование функций многих переменных // Материалы IV республ. науч. конф. молодых исследователей по системотехнике.– 1970. – Т. 3. – С. 68 – 74.

Получено 02.12.2009

Об авторах:

Назаренко Евгений Владимирович,
младший научный сотрудник Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины,
Фесун Татьяна Михайловна,
младший научный сотрудник Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.