КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 517.9:519.3

В.Е. КАПУСТЯН, И.С. ЛАЗАРЕНКО

ОПТИМАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫМ УПРАВЛЕНИЕМ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Рассмотрена задача оптимальной стабилизации со специальным критерием качества для задачи Самарского – Ионкина и получено ее решение, найдено непрерывное ядро обратной связи и исследованы его свойства.

Введение. В работе [1] рассмотрено однопараметрическое семейство начально-краевых задач для одномерного уравнении теплопроводности

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \ (x,t) \in \Pi, \tag{1}$$

$$y\left(x, t_0\right) = \varphi(x), \ 0 \le x \le 1, \tag{2}$$

$$y(0,t) = 0, \ \frac{\partial y(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial y(1,t)}{\partial x} + \alpha y(1,t), \ t > 0, \tag{3}$$

где

$$\Pi = \left\{\left(x,t\right) : 0 < x < 1, \ t > t_0 \ge 0\right\}, \ \alpha \in R.$$

При $\alpha = 0$ задача (1)–(3) известна как зада-ча Самарского – Ионкина. Последний в [2], используя метод разделения переменных, доказал теорему единственности решения, представил его в виде функционального ряда и тем самым получил достаточные условия существования классического решения. Основная трудность применения метода разделения переменных заключалась в том, что система собственных функций оператора второй производной, подчиненного краевым условиям, не образует базис Рисса в $L_2(0,1)$ и даже не является полной. Для получения указанных выше результатов система собственных функций дополнялась присоединенными функциями. В работе [1] вышеуказанные результаты распространены на задачи (1)–(3). В работе [3] для последней краевой задачи, используя метод Фурье, исследованы задачи с минимальной энергией.

В данной работе для задачи Самарского – Ионкина получено решение задачи оптимальной стабилизации со специальным критерием качества.

Постановка задачи. Формальное решение. Пусть процесс описывается функцией $y(x,t)$, которая удовлетворяет краевой задаче

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + p(x,t), \quad (x,t) \in \Pi, \tag{4}$$

$$y\left(x, t_0\right) = \varphi(x), \ 0 \le x \le 1, \tag{5}$$

$$y(0,t) = 0, \ \frac{\partial y(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial y(1,t)}{\partial x}, \ t > t_0, \tag{6}$$

где $p(x,t)$ – фиксированная функция.

Для краевой задачи (4) – (6) рассмотрим задачу оптимальной стабилизации с критерием качества

$$J(p) = 0.5\int_{t_0}^{\infty} \left(\| y(.,t) \|_D^2 + \| p(.,t) \|_D^2 \right) dt, \tag{7}$$

где

$$\|\Phi\|_D^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k^2, \ \Phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k X_k(x), \ \Phi_k = \int_0^1 \Phi(x) Y_k(x) \ \forall \Phi(x) \in L_2(0,1)$$

а системы функций

$$W_0 = \left\{ X_{2k-1}(x) = x\cos(2\pi kx), \ X_{2k}(x) = \sin(2\pi kx), \ k = 1,2,..., \ X_0(x) = x \right\},$$

$$R_0 = \left\{ Y_{2k-1}(x) = 4\cos(2\pi kx), \ Y_{2k}(x) = 4(1-x)\sin(2\pi kx), \ k = 1,2,..., \ Y_0(x) = 2 \right\}$$

образуют базисы Рисса в $L_2(0,1)$ и являются биортогональными.

Если $\varphi(x)$, $p(x,t)$ – непрерывные функции, то краевая задача (4)–(6) имеет единственное классическое решение, которое единственным образом представимо функциональным рядом по базису W_0

$$y(x,t) = y_0(t) X_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty} (y_{2k-1}(t) X_{2k-1}(x) + y_{2k}(t) X_{2k}(x)),$$

а критерий качества (7) принимает вид

$$J(p) = 0.5\int_{t_0}^{\infty} \left(y_0^2(t) + p_0^2(t) + y_{2k-1}^2(t) + p_{2k-1}^2(t) + y_{2k}^2(t) + p_{2k}^2(t) \right) dt, \tag{8}$$

где функция $y_0(t)$ и вектор-функции $\left(Y_k(t)\right)' = \left(y_{2k-1}(t), y_{2k}(t)\right), \left(P_k(t)\right)' =$ $= \left(p_{2k-1}(t), p_{2k}(t)\right)$ определяются как решения задач Коши:

$$\dot{y}_0(t) = p_0(t), \ y_0(t_0) = \varphi_0; \tag{9}$$

$$\dot{Y}_k(t) = \widehat{A}_k Y_k(t) + P_k(t), \quad Y_k(t_0) = \Phi_k, \tag{10}$$

где $(\Phi_k)' = (\varphi_{2k-1}, \varphi_k)$, $\varphi_j = (\varphi, Y_j)$, $j = 2k-1, \ 2k$;

$$\widehat{A}_k = \begin{pmatrix} -\lambda_k & 0 \\ -2\sqrt{\lambda_k} & -\lambda_k \end{pmatrix}.$$

Задача (8)–(10) редуцируется к одномерной и последовательности двумерных линейно-квадратичных задач оптимального управления. Оптимальное управление и значения критерия для нулевой составляющей имеют вид

$$p_0[y_0] = -y_0(t),\ J_0(p_0) = 0.5\varphi_0^2.$$

Матричное алгебраическое уравнение Риккати для двумерной задачи оптимальной стабилизации запишется таким образом:

$$K_k^2 - K_k\widehat{A}_k - \widehat{A}_k' K_k - E_2 = 0. \qquad (11)$$

Единственное положительно определенное симметричное решение матричного уравнения Риккати (11) имеет вид

$$K_k^{1,1} = \frac{r_k - \lambda_k^2}{\alpha_k + \lambda_k},\ K_k^{1,2} = -\frac{\beta_k}{\alpha_k + \lambda_k},\ K_k^{2,2} = \frac{1}{\alpha_k + \lambda_k}, \qquad (12)$$

где

$$\alpha_k = \sqrt{\frac{r_k + \lambda_k^2 + 1}{2}},\ \beta_k = \sqrt{\frac{r_k - \lambda_k^2 - 1}{2}},\ r_k = \sqrt{\left(\lambda_k^2 + 1\right)^2 + 4\lambda_k}\ .$$

Для элементов матрицы K_k справедливы оценки

$$K_k^{1,1} < \frac{2}{\lambda_k},\ \left|K_k^{1,2}\right| = \frac{1}{2\lambda_k^{3/2}},\ K_k^{2,2} = \frac{1}{2\lambda_k}. \qquad (13)$$

Положим

$$\Re(x,\xi) = \sum_{l=0}^{4} R_l(x,\xi),$$

где

$$R_0(x,\xi) = X_0(x)Y_0(\xi),\ R_1(x,\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} X_{2k-1}(x)K_k^{1,1}Y_{2k-1}(\xi),$$

$$R_2(x,\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} X_{2k-1}(x)K_k^{1,2}Y_{2k}(\xi),$$

$$R_3(x,\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} X_{2k}(x)K_k^{1,2}Y_{2k-1}(\xi),\ R_4(x,\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} X_{2k}(x)K_k^{1,1}Y_{2k}(\xi).$$

Тогда оптимальное управление в форме синтеза имеет вид

$$p(x,t) = -\int_0^1 \Re(x,\xi)y(\xi,t)d\xi\,. \qquad (14)$$

Обоснование формализма синтеза оптимального управления. Покажем, что ядро $\Re(x,\xi)$ оператора обратной связи из представления (14) является непрерывной функцией. Действительно, используя оценки (13) и ограниченность функций из W_0 и R_0, получаем оценки

$$\left|R_1(x,\xi)\right| \le 4\sum_{k=1}^{\infty} K_k^{1,1} < \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2},$$

$$\left|R_2(x,\xi)\right|, \left|R_3(x,\xi)\right| \le 4\sum_{k=1}^{\infty}\left|K_k^{1,2}\right| < \frac{1}{4\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3},$$

$$\left|R_4(x,\xi)\right| \le 4\sum_{k=1}^{\infty}K_k^{2,2} < \frac{1}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2},$$

из которых и следует непрерывность ядра оператора обратной связи. В представлении (14) функция $y(x,t)$ – решение краевой задачи (4)–(6), в которой уравнение следует заменить уравнением

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \int_0^1 \Re(x,\xi)\, y(\xi,t)\, d\xi\,. \tag{15}$$

Теорема 1. Если функция $\varphi(x) \in \widehat{C}'^{\nu}(0,1) = \{\phi \in C'^{\nu}(0,1) : \phi(0) = 0, \phi'(1) = = \phi'(0);\ \left|\left|\left|\phi\right|\right|\right| = \max\{\max\left|\phi(x)\right|, ..., \max\left|\phi'^{\nu}(x)\right|\}\}$ – начальное условие краевой задачи (15), (5)–(6), то последняя имеет единственное классическое решение, которое является экспоненциально устойчивым в $C(0,1)$ относительно начальных условий, выделяемых нормой $\left|\left|\left|\cdot\right|\right|\right|$.

Доказательство. Единственность здесь очевидна. Применяя к краевой задаче (15), (5)–(6) метод разделения переменных, решение последней запишем в виде формального ряда

$$y(x,t) = \widehat{y}_0(t)X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\widehat{y}_{2k-1}(t)X_{2k-1}(x) + \widehat{y}_{2k}(t)X_{2k}(x)\right), \tag{16}$$

где

$$\widehat{y}_0(t) = \exp\left(-\left(t-t_0\right)\right)\varphi_0,$$

$$\widehat{y}_{2k-1}(t) = \exp\left(-\alpha_k\left(t-t_0\right)\right)\left(\left(\cos\left(\beta_k\left(t-t_0\right)\right) + \sin\left(\beta_k\left(t-t_0\right)\right)K_k^{1,2}\right)\varphi_{2k-1} + \right.$$
$$\left. + \sin\left(\beta_k\left(t-t_0\right)\right)K_k^{2,2}\varphi_{2k}\right),$$

$$\widehat{y}_{2k}(t) = v_k\exp(-\alpha_k(t-t_0))((\cos(\phi_k + \beta_k(t-t_0)) +$$
$$+ \sin(\phi_k + \beta_k(t-t_0))K_k^{1,2})\varphi_{2k-1} + \sin(\phi_k + \beta_k(t-t_0))K_k^{2,2}\varphi_{2k}),$$

причем,

$$v_k = \sqrt{\left(\alpha_k + \lambda_k\right)^2 + \beta_k^2},\ \cos\phi_k = \beta_k v_k^{-1},\ \sin\phi_k = \left(\alpha_k + \lambda_k\right)v_k^{-1}.$$

Для элементов последовательности $\left\{v_k\right\}$ справедлива оценка $v_k < 4\lambda_k$.

Ряд (16) при $t \ge t_0$, $x \in \left[0,1\right]$ мажорируется числовым рядом

$$\left|y(x,t)\right| \le \left|\varphi_0\right| + \sum_{k=1}^{\infty}\left(1+v_k\right)\left[\left(1+\left|K_k^{1,2}\right|\right)\ \left|\varphi_{2k-1}\right| + K_k^{2,2}\left|\varphi_{2k}\right|\right]. \tag{17}$$

Оценим правую часть неравенства (17). С этой целью установим неравенства

$$v_k\left|K_k^{1,2}\right| = \frac{\lambda_k^{1/2}}{\alpha_k}\sqrt{1+\frac{\lambda_k}{\alpha_k^2(\alpha_k+\lambda_k)^2}} < \frac{\lambda_k^{1/2}}{\alpha_k}\sqrt{1+\frac{1}{\alpha_k^3}} < \frac{\sqrt{2}}{\lambda_k^{1/2}},$$

$$v_k K_k^{2,2} = \sqrt{1+\frac{\lambda_k}{\alpha_k^2(\alpha_k+\lambda_k)^2}} < \sqrt{2}.$$

Полученных выше оценок недостаточно для равномерной сходимости ряда (17). Для этого нужна сходимость рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k\left|\varphi_{2k-1}\right|,\ \sum_{k=1}^{\infty}\left|\varphi_{2k}\right|.$$

Последнее обеспечивается увеличением требований к функции $\varphi(x)$:

$$\varphi_{2k-1} = -\frac{4}{\lambda_k^2}\left(\varphi'''(1)-\varphi'''(0)\right)+\frac{4}{\lambda_k^2}\int_0^1 \varphi'^{v}(x)\cos(2\pi kx)dx,$$

$$\varphi_{2k} = -\frac{4}{\lambda_k^2}\int_0^1\left(\varphi''(x)(1-x)-2\varphi'(x)\right)\sin\left(\lambda_k^{1/2}x\right)dx.$$

Тогда ряд из (17) имеет оценку

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(3+4\lambda_k\right)\left|\varphi_{2k-1}\right|+3\left|\varphi_{2k}\right|\right] < \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{12\max\left|\varphi''(x)\right|}{\lambda_k}+\frac{16}{\lambda_k}(2\max\left|\varphi'''(x)\right|+\right.$$

$$\left.+\max\left|\varphi'^{v}(x)\right|)+\frac{12}{\lambda_k}\left(\max\left|\varphi''(x)\right|+2\max\left|\varphi'(x)\right|\right)\right] < 4\left\|\left|\varphi\right|\right\|.$$

Ряды для производных внутри области определения задачи сходятся за счет экспонент. Тем самым представление (16) является единственным классическим решением краевой задачи (15), (5)–(6).

Покажем экспоненциальную устойчивость решения (16) в пространстве $C(0,1)$. С этой целью оценим $\left|y(x,t)\right|$. Из (16) получим при $t > t_0$

$$\left|y(x,t)\right| < \exp\left(-\left(t-t_0\right)\right)\left|\varphi_0\right|+\exp\left(-\alpha_1\left(t-t_0\right)\right)\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+v_k\right)\left[\left(1+\left|K_k^{1,2}\right|\right)\left|\varphi_{2k-1}\right|+K_k^{2,2}\left|\varphi_{2k}\right|\right] < 5\exp\left(-\left(t-t_0\right)\right)\left\|\left|\varphi\right|\right\|.$$

Значение критерия качества определяется сходящимся рядом

$$J = 0.5\left(\varphi_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\varphi_{2k-1}^2K_k^{1,1}+2\varphi_{2k-1}\varphi_{2k}K_k^{1,2}+\varphi_{2k}^2K_k^{2,2}\right)\right).$$

Приближенное решение задачи оптимальной стабилизации. Построенное нами управление (14) нереализуемо, так как его ядро представлено сходящимся рядом. Поэтому ограничимся в указанном ряде конечным (четным) числом слагаемых, т. е. рассмотрим приближенное управление

$$p^n(x,t) = -\int_0^1 \Re^n(x,\xi) y^n(\xi,t) d\xi, \tag{18}$$

где $y^n(x,t)$ – решение краевой задачи,

$$\frac{\partial y^n(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 y^n(x,t)}{\partial x^2} - \int_0^1 \Re^n(x,\xi) y^n(\xi,t) d\xi,$$

$$y^n(x,t_0) = \varphi(x),\ y^n(0,t) = 0,\ \frac{\partial y^n(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial y^n(1,t)}{\partial x}\ . \tag{19}$$

Оценим качество управления (18). Справедлива

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1, а числа $n = 2N+1$, ε и $|||\varphi|||$ связаны неравенством

$$\frac{16|||\varphi|||}{\pi^2(2N+1)} \max\left\{|||\varphi|||, \frac{33}{8}\right\} < \varepsilon.$$

Тогда решение краевой задачи (19) является экспоненциально устойчивым в $C(0,1)$ относительно начальных условий, выделяемых нормой $|||\cdot|||$ и справедлива оценка

$$\max\left\{ \left|J - J^n\right|, \left\|y - y^n\right\|_{C(\Pi)}, \left\|p - p^n\right\|_{C(\Pi)} \right\} < \varepsilon,$$

где J^n – значение критерия качества на приближенном управлении.

Доказательство. Критерий качества на приближенном управлении принимает вид

$$J^n = 0.5\left(\varphi_0^2 + \sum_{k=1}^{2N}\left(\varphi_{2k-1}^2 K_k^{1,1} + 2\varphi_{2k-1}\varphi_{2k} K_k^{1,2} + \varphi_{2k}^2 K_k^{2,2}\right)\right) +$$

$$+0.5\sum_{k=2N+1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\lambda_k}\varphi_{2k}^2 - \frac{1}{\lambda_k^{3/2}}\varphi_{2k-1}\varphi_{2k} + \left(\frac{1}{2\lambda_k} + \frac{1}{\lambda_k^2}\right)\varphi_{2k-1}^2\right).$$

Тогда

$$\left|J - J^n\right| < \sum_{k=2N+1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_k}\varphi_{2k}^2 + \frac{2}{\lambda_k}\varphi_{2k-1}^2\right) < \frac{16}{\pi^2(2N+1)}|||\varphi|||^2 .$$

Задавая произвольно малое $\varepsilon > 0$, из неравенства

$$\frac{16}{\pi^2(2N+1)}|||\varphi|||^2 < 0$$

находим число слагаемых $n = 2N+1$ в ядре приближенного управления, которое обеспечивает заданную точность вычисления критерия качества.

Разность $\delta y^n(x,t) = y(x,t) - y^n(x,t)$ удовлетворяет краевой задаче

$$\frac{\partial \delta y^n(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \delta y^n(x,t)}{\partial x^2} - \int_0^1 \Re^n(x,\xi)\delta y^n(\xi,t)d\xi - \int_0^1 \left(\Re(x,\xi) - \Re^n(x,\xi)\right) y(\xi,t)d\xi,$$

$$\delta y^n(x,t_0) = 0,\ \delta y^n(0,t) = 0,\ \frac{\partial \delta y^n(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial \delta y^n(1,t)}{\partial x}.$$

Тогда

$$\left|\delta y^n(x,t)\right| < \frac{14}{\pi^2(2N+1)}\left\|\varphi\right\| < \varepsilon,$$

$$\left|\delta p^n(x,t)\right| = \left|p(x,t) - p^n(x,t)\right| \le \frac{66}{\pi^2(2N+1)}\left\|\varphi\right\| < \varepsilon.$$

В.О. Капустян, І.С. Лазаренко

ОПТИМАЛЬНА СТАБІЛІЗАЦІЯ РОЗПОДІЛЕНИМ КЕРУВАННЯМ РОЗВ'ЯЗКІВ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З НЕЛОКАЛЬНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

Розглядається задача оптимальної стабілізації зі спеціальним критерієм якості для задачі Самарського – Іонкіна та отримано її розв'язок. Знайдено неперервне ядро зворотного зв'язку та досліджені його властивості.

V.O. Kapustyan, I.S. Lazarenko

OPTIMAL STABILIZATION BY DISTRIBUTED CONTROL SOLUTIONS OF PARABOLIC EQUALIZATIONS WITH NON-LOCAL BOUNDARY-VALUE CONDITIONS

The problem of optimal stabilization with special quality criteria for the Samarsky – Ionkin problem is considered and its solution is found. The continuous kernel of feedback connection extracted and its characteristics are investigated.

1. *Мокин А.Ю.* Об одном семействе начально-краевых задач для уравнения теплопроводности // Дифференциальные уравнения. – 2009. – **45**, № 1. – С. 123–137.
2. *Ионкин Н.И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Там же. – 1977. – **13**, № 2. – С. 294–304.
3. *Капустян В.Е., Лазаренко И.С.* Задачи с минимальной энергией для параболических уравнений с нелокальными краевыми условиями // Вісн. Дніпропетровського ун-ту. Сер. моделювання. – 2009. – Вип. 1. – **17,** № 8. – С. 47–60.

Получено 29.04.2010

Об авторах:

Капустян Владимир Емельянович,

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математическкго моделирования экономических систем НТУ Украины «КПИ»,
e-mail: kapustyanv@ukr.net

Лазаренко Ирина Сергеевна,

ассистент кафедры математического моделирования экономических систем НТУ Украины «КПИ».