

**Оптимизация
вычислений**

Кратко описаны постановка задачи определения принадлежности сигнала к определенному классу и схема оптимизированного алгоритма синтеза систем классификации. Рассмотрены сравнительные результаты применения базового и оптимального алгоритмов синтеза систем классификации при решении задачи распознавания сигналов на примере данных, полученных в результате ультразвукового зондирования.

© А.С. Гавриленко, 2011

УДК 519.685.3

А.С. ГАВРИЛЕНКО

**ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМОВ
СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ
КЛАССИФИКАЦИИ
ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ
РАСПОЗНАВАНИЯ СИГНАЛОВ**

Введение. Данная работа – логическое продолжение работ [1 – 3], в которых была сделана попытка постановки рассматриваемых задач классификации, приведено теоретическое обоснование алгоритмов их решения [1]. В работе [2] приводится оптимизационный алгоритм синтеза гиперплоскостных кластеров, который базируется на понятии полосной делимости и позволяет получить решение задачи классификации в более общих случаях. Разработана детальная схема программной реализации алгоритмов синтеза систем классификации [3]. В данной работе основное внимание будет уделено разработкам конкретных вычислительных схем программной реализации алгоритмов классификации и синтеза оптимальных систем классификации, которые базируются на линейном и нелинейном преобразовании, предложенном в вышеуказанных работах, а также будет продемонстрирован результат применения разработанных программных реализаций для решения конкретных прикладных задач. В качестве примера здесь выбрана задача распознавания объектов по данным ультразвукового зондирования.

Теоретические предпосылки алгоритмов классификации

В основе предложенных в указанных работах алгоритмов заложен принцип обучения на некоторой обучающей выборке $x(j)$,

$j = \overline{1, n}$ в выбранном пространстве признаков. А именно, на начальном этапе алгоритма полагается известным, к какому из классов относится каждый вектор обучающей выборки $x(j)$, $j = \overline{1, n}$. В работе [2] делаются постановки и в той или иной степени прорабатываются алгоритмы решения таких задач, связанных с разработкой систем классификации, как определение необходимых и достаточных условий для линейной отделимости конечного множества точек в многомерном пространстве, необходимых и достаточных условий линейной полосной разделимости точек $x(j)$, $j = \overline{1, n}$ на два класса, а также нахождение оптимальной по толщине нелинейной полосы разделимости точек $x(j)$, $j = \overline{1, n}$.

В случае целесообразности привлечения для решения задачи классов нелинейных преобразований предлагаются средства определения оптимального как самого нелинейного преобразования из выбранного класса некоторой координаты $x_i(j)$, так и индекса i этой координаты. Предполагается также возможность сгенерировать суперпозицию оптимальных преобразований координат вектора признаков с целью достижения условий оптимальной полосной разделимости точек в новом пространстве признаков.

Естественно, наиболее целесообразно для решения практических задач использовать такие алгоритмы, которые бы в конечном итоге приводили к линейным алгоритмам разделимости точек на составные классы. Одной из подзадач, возникающих при этом, является задача поиска оптимальной линейной отделимости точек $x(j)$, $j = \overline{1, n}$ от начала координат гиперплоскостью $y = x^T a$, где вектор коэффициентов $a \in R^m$ определяется таким образом, чтобы на точках обучающего множества выполнялось условие

$$x^T(j)a = y_j, y_j \geq \Delta, j = \overline{1, n}, \quad (1)$$

при некоторых $\Delta > 0$ и y_j , которые определяют допустимую область поиска $D(\Delta) = \{y : y = (y_1, \dots, y_n)^T, y_j \geq \Delta, j = \overline{1, n}\}$. Это возможно, если выполняется критерий существования решения этой задачи

$$\min_{y \in D(\Delta)} y^T Z(X)y = y_*^T(\Delta)Z(X)y_*(\Delta) = 0, \quad (2)$$

где $y_*(\Delta)$ – оптимальное значение y . Тогда искомым вектор коэффициентов a принимает следующее значение:

$$a(\Delta) = (X^T)^+ y_*(\Delta). \quad (3)$$

Здесь X^+ – матрица, псевдообратная к X , $Z(X) = I_n - X^+ X$ – проекционный оператор (см. [4]).

Максимальная толщина полосы разделения δ достигается при условии минимизации квадратичной формы (см. [4, 5])

$$y_{opt} = \arg \min_{y \in D} y^T R(X) y, \text{ где } R(X) = X^+ (X^T)^+ \quad (4)$$

на области $D = \{y : y^T Z(X) y = y_*^T Z(X) y_* = 0, e_j^T y \geq 1, j = \overline{1, n}\}$.

Тогда

$$a_{opt} = (X^T)^+ y_{opt}. \quad (5)$$

На базе полученного результата строятся условия существования линейной полосной разделимости двух классов точек в пространстве признаков R^m , где точки $x(i_k), k = \overline{1, n_1}$ принадлежат первому классу, а $x(j_s), s = \overline{1, n_2}$ – второму классу и существует вектор $a \in R^m$, для которого

$$\begin{aligned} a^T x(i_k) &\geq 1, & k &= \overline{1, n_1}, \\ a^T x(j_s) &\leq -1, & s &= \overline{1, n_2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Условие отделимости в этом случае имеет вид

$$\min_{y \in D} y^T Z(X) y = 0, \quad D = \{y : e_{i_k}^T y \geq 1, e_{j_s}^T y \leq -1, k = \overline{1, n_1}, s = \overline{1, n_2}\}, \quad (7)$$

а оптимальный вектор a_{opt} определяется из условия максимальной ширины разделяющей полосы:

$$y_{opt} = \arg \min_{y \in D_1} y^T R(X) y, \quad (8)$$

$$a_{opt} = (X^T)^+ y_{opt}. \quad (9)$$

В области $D_1 = \{y : y^T Z(X) y = 0\} \cap D$.

В пространстве собственных векторов для матрицы X эти задачи будут иметь более простую математическую постановку.

Для линейной полосной отделимости от начала координат:

$$\begin{aligned} X &= \sum_{j=1}^r u_j v_j^T \lambda_j, & Z(X) &= I_n - \sum_{j=1}^r v_j v_j^T, \\ u_i^T u_j &= \delta_{ij}, & v_i^T v_j &= \delta_{ij}, & X X^T u_j &= \lambda_j^2 u_j, & X^T X v_j &= \lambda_j^2 v_j, \\ \lambda_1^2 &\geq \dots \geq \lambda_r^2, & i, j &= \overline{1, n} \end{aligned}$$

и учитывая, что $y^T Z(X) y = 0$ для $y \in D$, можно записать следующие соотношения:

$$y = \sum_{i=1}^r \alpha_i v_i, \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i e_j^T v_i \geq 1, \quad \forall j = \overline{1, n}, \quad y^T R(X) y = \sum_{j=1}^r \alpha_j^2 \lambda_j^{-2}. \quad (10)$$

Таким образом, задача сводится к решению задачи оптимизации квадратичной функции на выпуклом множестве:

$$\alpha_{opt} = \arg \min_{\alpha \in \{ \alpha: e_j^T (v_1 \dots v_r) \alpha \geq 1, j = \overline{1, n} \}} \alpha^T \text{diag}(\lambda_1^{-2}, \dots, \lambda_r^{-2}) \alpha,$$

$$y_{opt} = (v_1 \dots v_r) \alpha_{opt},$$

$$a_{opt} = \sum_{j=1}^r u_j v_j^T \lambda_j^{-1} \cdot (v_1 \dots v_r) \alpha_{opt} = (\lambda_1^{-1} u_1 \dots \lambda_r^{-1} u_r) \alpha_{opt}, \quad (11)$$

$$\delta_{opt} = (\alpha_{opt}^T \text{diag}(\lambda_1^{-2}, \dots, \lambda_r^{-2}) \alpha_{opt})^{-\frac{1}{2}}.$$

Для линейной полосной разделимости двух классов точек, соответственно, решение задачи принимает вид

$$\alpha_{opt} = \arg \min_{\alpha \in \{ \alpha: e_{ik}^T (v_1 \dots v_r) \alpha \geq 1, e_{js}^T (v_1 \dots v_r) \alpha \leq -1, k = \overline{1, n_1}, s = \overline{1, n_2} \}} \alpha^T \text{diag}(\lambda_1^{-2}, \dots, \lambda_r^{-2}) \alpha, \quad (12)$$

$$y_{opt} = (v_1 \dots v_r) \alpha_{opt}, \quad (13)$$

$$a_{opt} = (u_1 \dots u_r) \text{diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_r^{-1}) \alpha_{opt}. \quad (14)$$

Весьма часто условие линейной полосной разделимости (7) в выбранном пространстве признаков не выполняется, т. е.

$$\min_{y \in D} y^T Z(X) y > 0. \quad (15)$$

В этом случае можно попытаться улучшить выбор информативных признаков либо использовать каскадное полосное линейное разделение двух классов [2] и, как нам представляется, весьма перспективно синтезировать оптимально суперпозицию нелинейных преобразований в пространстве признаков.

Алгоритм синтеза

Обучающая выборка – массив точек $x(j_1) \in \Omega_x(1), j_1 = \overline{1, n_1}, x(j_2) \in \Omega_x(2), j_2 = \overline{1, n_2}$, представляется соответственно матрицами $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$. Таким образом, массив входных данных обозначается как:

$$X = \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \end{pmatrix}, X = (x(1) \dots, x(n)) = \begin{pmatrix} x_{(1)}^T \\ \vdots \\ x_{(n)}^T \end{pmatrix}, n_1 + n_2 = n.$$

Тогда схему алгоритма можно представить следующим образом.

1. Вычислим значение $y^* = \operatorname{argmin}_{y \in D} y^T Z(X) y$, где $Z(X) = I_n - X^+ X$ – проекционный оператор, $D = \{y: e_{j_1}^T y \geq 1, e_{j_2}^T y \leq -1, j_1 = \overline{1, n_1}, j_2 = \overline{1, n_2}\}$.

2. Если $y^* = 0$, т. е., выполнено необходимое условие линейной полосной разделимости, то вычисляем оптимальное значение

$$y_{opt} = \operatorname{argmin}_{y \in D_1} y^T R(X) y$$

при ограничениях $D_1 = \{y : y^T Z(X) y = 0\} \cap D$.

Тогда значения коэффициентов линейной регрессии будут равны $a_{opt} = (X^T)^+ y_{opt}$, и, таким образом, обеспечивается линейное полосное разделение

$$a_{opt}^T x(i_k) \geq 1, \quad a_{opt}^T x(j_s) \leq -1, \quad k = \overline{1, n_1}, \quad s = \overline{1, n_2}$$

с оптимальной шириной разделяющей полосы

$$y_* = \delta = \frac{1}{(y_{opt}^T R(X) y_{opt})^{\frac{1}{2}}}$$

и осуществляется выход из алгоритма.

3. Если условие линейной полосной разделимости не выполняется и $y_* = \operatorname{Arg} \min_{y \in D} y^T Z(X) y > 0$, тогда находим приближенное значение линейной регрессии $a_* = (X^T)^+ y_*$.

4. Вычисляем:

а) вектор модельных значений $y_M = X \hat{a}$;

б) дискриминантную функцию для точек, условно отнесенных к первой и ко второй группам:

$$\begin{cases} y_M^{(1)} = X^{(1)} \hat{a} \\ y_M^{(2)} = X^{(2)} \hat{a} \end{cases}$$

в) невязку $\Delta y = y_M - y$.

5. В случае если выполняется условие $\begin{cases} y_M^{(1)} \geq \Delta \\ y_M^{(2)} \leq -\Delta \end{cases}$, осуществляется выход из

алгоритма.

6. Иначе находим наименее информативную координату i_{opt} , подлежащую нелинейному преобразованию, из условия:

$$y^T Z \begin{pmatrix} x_{(1)}^T \\ \vdots \\ x_{(opt-1)}^T \\ \Psi^T(a_*^T x, \alpha_{opt}) \\ x_{(opt+1)}^T \\ \vdots \\ x_{(m)}^T \end{pmatrix} y = \min_{i=1..m-1} y^T Z \begin{pmatrix} x_{(1)}^T \\ \vdots \\ x_{(i-1)}^T \\ \Psi^T(a_*^T x, \alpha_i) \\ x_{(i+1)}^T \\ \vdots \\ x_{(m)}^T \end{pmatrix} y,$$

где $\psi(x(j), \alpha)$ – нелинейное преобразование, в качестве которого выберем $\psi(x, \alpha) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$ – сплайн Эрмита ($\alpha = (\alpha_0 \ \alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3)^T$).

При этом оптимальное значение α_{opt} вычисляем из условия:

$$\sum_{j=1}^n |\psi(x(j), \alpha) - \Delta y(j)|^2 \xrightarrow{\alpha} \min.$$

Таким образом, (см. [1]).

$$\alpha_{(i)} = \sum_{j=1}^n \begin{pmatrix} 1 \\ a_{(0)}^T x_i(j) \\ (a_{(0)}^T x_i(j))^2 \\ (a_{(0)}^T x_i(j))^3 \end{pmatrix} \left(1 \ a_{(0)}^T x_i(j) \ (a_{(0)}^T x_i(j))^2 \ (a_{(0)}^T x_i(j))^3 \right)^+ \sum_{j=1}^n \begin{pmatrix} 1 \\ a_{(0)}^T x_i(j) \\ (a_{(0)}^T x_i(j))^2 \\ (a_{(0)}^T x_i(j))^3 \end{pmatrix} \Delta y_i(j).$$

7. Осуществляем замену выбранной наименее информативной координаты:

$$X_\psi = \begin{pmatrix} x_{(1)}^T \\ \vdots \\ x_{(opt-1)}^T \\ \Psi^T(a_s^T x, \alpha_{opt}) \\ x_{(opt+1)}^T \\ \vdots \\ x_{(m)}^T \end{pmatrix}.$$

8. Если $y_M^T Z(X_\psi) y_M < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – некоторая заданная достаточно малая величина, то считаем, что выполняется условие линейной полосной разделимости в новом пространстве признаков, тогда необходимо найти

$$a_{opt} = (X_\psi^T)^+ y_M, \quad y = \arg \min_{y \in D_1} y^T R((X_\psi^T)^+) y,$$

где $D_1 = \{y : y^T Z(X_\psi) y = 0\} \cap D$. И, таким образом, построить оптимальную линейную разделяющую операцию

$$a_{opt}^T x(i_k) \geq 1, \quad a_{opt}^T x(j_s) \leq -1, \quad k = \overline{1, n_1}, \quad s = \overline{1, n_2}$$

для новых векторов признаков, которые получаются после нелинейного преобразования компонент.

9. Иначе возвращаемся к пункту 7 и повторяем для новых входных данных вышеописанный процесс нелинейного преобразования, реализуя, таким образом, суперпозицию нелинейных функциональных преобразований с целью минимизации невязки.

Примеры решения задач классификации

Рассмотрим работу алгоритма на примере распознавания объектов с помощью ультразвукового зондирования. Постановка задачи и соответствующие экспериментальные данные, использованные в рассматриваемом примере, подробно описаны в [6]. Приведем кратко постановку задачи. В качестве объекта распознавания выбраны монеты разного достоинства. Первичной информацией для распознавания некоторого k -го объекта из заданной совокупности $k = \overline{1, M}$ являются дискретные значения эхосигнала $x_k(t_j)$, $j = \overline{1, N_k}$ ультразвуковой волны, отраженной от объекта и принятой одним из приемников. Накопленная обучающая информация по каждому из распознаваемых объектов представляет собой определенное множество эхосигналов, полученных с разных точек наблюдения данного объекта. Обучающая выборка по каждому из объектов включает сотни эхосигналов, каждый из которых представлен дискретными значениями в довольно значительном числе точек (в данных экспериментах – 512 или 1024 точки). Рассматриваются 8 параметров-признаков: расстояние между первым и последним амплитудным скачком; первые четыре и последние три амплитудных значения. Количество информативных параметров-признаков существенно меньше числа дискретных значений эхосигнала.

В качестве первого примера выбраны данные для двух сторон одной и той же монеты (Nickel Heads и Nickel Tails). Графическое изображение эхосигналов от монеты для лицевой и тыльной стороны показано на рис. 1.

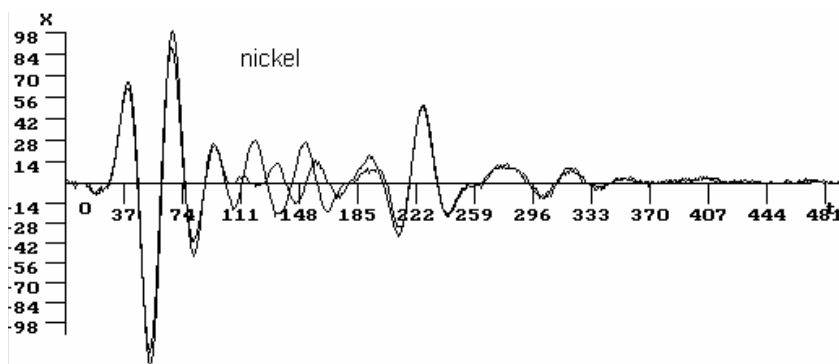


РИС. 1

Размерность вектора признаков, которым представлен каждый объект, равняется 8. Как и в алгоритме, предложенном в [6] с целью уменьшения размерности пространства признаков, осуществляется построение для центрированных экспериментальных точек пространства признаков собственного подпространства из первых собственных векторов и проектирования точек вектора признаков обучающей выборки объектов в собственные подпространства.

Для удобства графического отображения работы алгоритма при распознавании используются первые три компоненты вектора признаков.

На рис. 2, а представлены два обучающих множества точек – данные для Nickel Heads и Nickel Tails. Разделяющая плоскость, построенная согласно немодифицированному алгоритму, показана на рис. 2, б, где выделена точка из класса Nickel Tails, ошибочно отнесенная алгоритмом к классу Nickel Heads. Применение оптимизационного алгоритма позволяет уточнить положение разделяющей плоскости, которая корректно разделила данные множества на два класса (рис. 2, в).

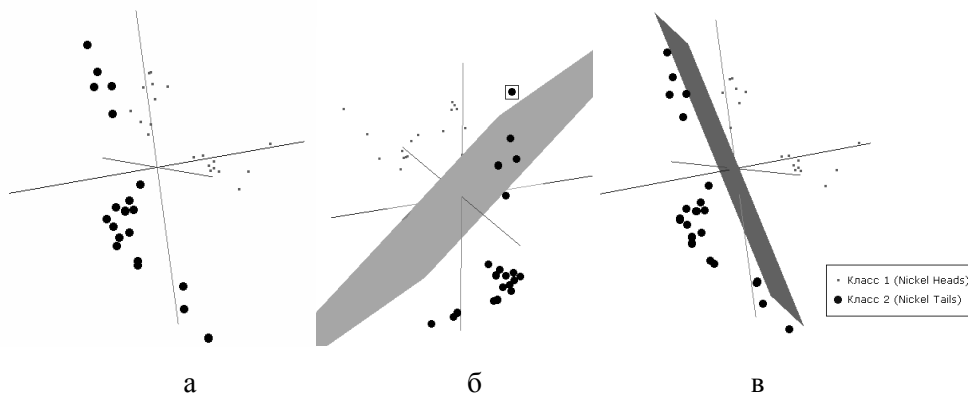


РИС. 2

Рассмотрим теперь другой пример из этой же задачи. Возьмем в качестве экспериментальных классов данные для лицевых сторон двух разных монет (Nickel Heads и Penny Heads), представленные графиками на рис. 3 и 4.

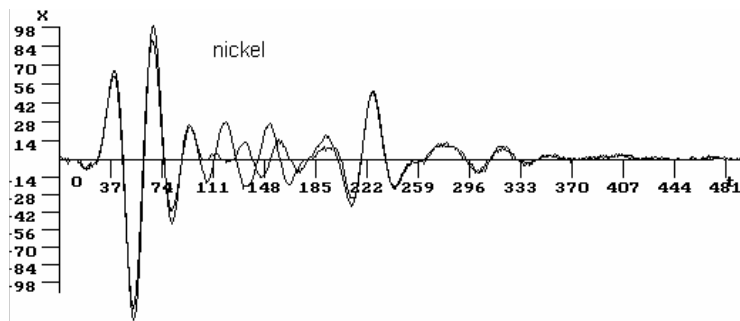


РИС. 3

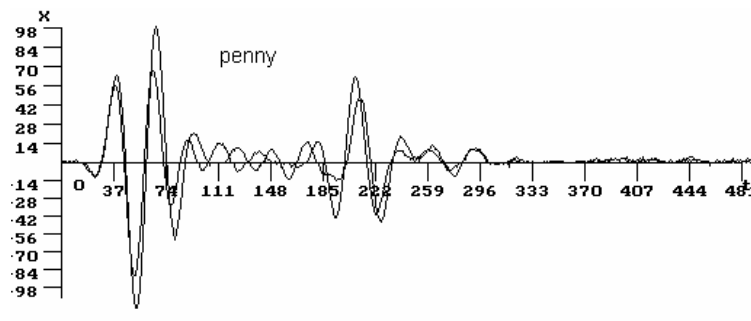


РИС. 4

Соответствующие точки в пространстве характерных признаков (данные для Nickel Heads и Penny Heads) показаны на рис. 5, а (на графике представлены первые три наиболее существенные компоненты). На рис. 5, б представлен результат работы немодифицированного алгоритма, которым некоторые точки (одна из которых выделена на рисунке), принадлежащие классу Nickel Heads, построенной разделяющей плоскостью ошибочно отнесены к классу Penny Heads. На рис. 5, в показаны разделяющие плоскости обычного (серым цветом) и оптимального (черным цветом) алгоритма, и выделены точки, класс которых определен неверно немодифицированным алгоритмом. Применение оптимального разделения позволило отнести эти точки к соответствующему им классу.

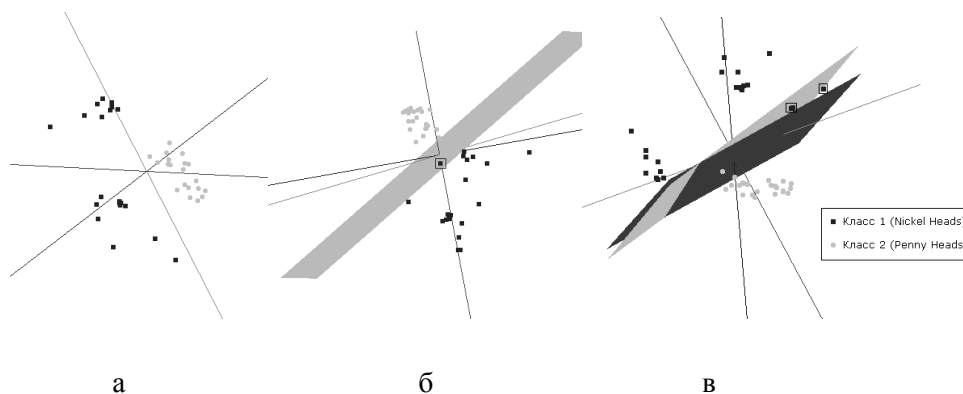


РИС. 5

Заключение. Представлены общая и подробная схемы построения оптимального алгоритма синтеза систем классификации. Проведено сравнение применения базового и оптимального алгоритмов для решения прикладной задачи, показывающее эффективность оптимального алгоритма в случаях, когда применение базового алгоритма уже на этапе обучающей выборки приводит к ошибочному результату, и базовый алгоритм, таким образом, не может быть использован для синтеза системы распознавания принадлежности к классу.

В настоящее время ведется работа по дальнейшему применению оптимизированного алгоритма для распознавания информации, содержащейся в речевых сигналах, а также в решении задачи распознавания и классификации элементов человеческих лиц на фотоснимках.

А.С. Гавриленко

ЗАСТОСУВАННЯ АЛГОРИТМІВ СИНТЕЗУ ОПТИМАЛЬНИХ СИСТЕМ КЛАСИФІКАЦІЇ
ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКУ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ РОЗПІЗНАВАННЯ СИГНАЛІВ

Коротко описані постановка задачі визначення приналежності сигналу до певного класу та схема оптимізованого алгоритму синтезу систем класифікації. Розглянуто порівняльні результати застосування базового та оптимального алгоритмів для розв'язку задачі розпізнавання сигналів на прикладі даних, отриманих в результаті ультразвукового зондування.

A.S. Gavrylenko

APPLYING OPTIMAL CLASSIFICATION SYSTEMS SYNTHESIS ALGORITHMS TO
SOLVING SIGNAL RECOGNITION PROBLEMS

A brief description for a problem of defining a class for signals and optimal algorithm for signal classification systems synthesis is given. The results of applying basic and optimal algorithms for signal classification systems for solving the problem of recognition signals on the example of data, obtained by ultrasonic sensing, are also presented and compared.

1. *Кириченко Н.Ф., Кривонос Ю.Г., Лепеха Н.П.* Синтез систем нейрофункциональных преобразователей в решении задач классификации // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 3. – С. 47–57.
2. *Кириченко Н.Ф., Кривонос Ю.Г., Лепеха Н.П.* Оптимизация синтеза гиперплоскостных кластеров и нейрофункциональных преобразований в системах классификации сигналов // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 6. – С. 50–58.
3. *Гавриленко А.С.* Разработка алгоритма синтеза систем для решения задач классификации сигналов // Компьютерная математика. – 2010. – № 1. – С. 13–23.
4. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
5. *Алберт А.* Регрессия, псевдоинверсия, рекуррентное оценивание. – М.: Наука, 1977. – 305 с.
6. *Кириченко Н.Ф., Куц Р., Лепеха Н.П.* Распознавание трехмерных объектов по ультразвуковым эхосигналам // Проблемы управления и информатики. – 1999. – № 5. – С. 110 – 122.

Получено 19.12.2010

Об авторе:

Гавриленко Анастасия Сергеевна,

младший научный сотрудник Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.

e-mail: anastasija.gavrylenko@gmail.com