КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

Математическое моделирование

УДК 519.6:539.3

В.С. ДЕЙНЕКА, А.А. АРАЛОВА

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ДЛИННОГО ТОЛСТОГО ПОЛОГО ЦИЛИНДРА

Рассмотрены вопросы решения с помощью градиентных методов обратных краевых задач для упруго деформированного полого толстого цилиндра. Представлены результаты решения некоторых модельных обратных краевых задач.

© В.С. Дейнека, А.А. Аралова, 2011

Введение. В работах [1–3] на основе результатов теории оптимального управления состояниями различных многокомпонентных распределенных систем [4, 5] предложена технология построения явных выражений градиентов функционалов-невязок для идентификации градиентными методами [6] различных параметров различных многокомпонентных распределенных систем. В работах [7–9] эта технология распространена на задачи упругого, термоупругого деформирования многокомпонентных тел.

В данной статье рассмотрены вопросы решения с помощью градиентных методов обратных краевых задач для упруго деформированного полого толстого цилиндра. Представлены результаты решения некоторых модельных обратных краевых задач.

1. Идентификация внешнего давления полого цилиндра при известных значениях давления и смещения на внутренней его поверхности.

Рассмотрим длинный толстый полый изотропный круговой цилиндр. С учетом симметрии, следуя [10], напряженно-деформированное состояние описывается уравнением равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr}+\frac{\sigma_r-\sigma_\varphi}{r}=0, r\in(r_1,r_2), \qquad (1)$$

где r_1, r_2 = const > 0 – радиусы, соответственно, внутренней и внешней круговых поверхностей; r – радиальная координата цилиндрической системы координат (r, φ, z), ось z совпадает с осью вращения рассматриваемого тела; σ_r, σ_φ – составляющие тензора напряжений:

$$\sigma_r = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_r, \quad \sigma_\varphi = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_\varphi,$$

$$\theta = \varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z, \quad \varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{dw}{dz} = 0, \tag{2}$$

$\lambda 0$, μ – постоянные Ляме; u, w – смещения, соответственно, в направлениях Оr, Оz, $w \equiv 0$; ε_r, ε_φ, ε_z – составляющие тензора деформации.

С учетом (2), уравнение равновесия (1) можем записать в виде

$$-\left\{(\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial y}{\partial r}\right) - (\lambda + 2\mu)\frac{y}{r}\right\} = 0, \ r \in \Omega, \tag{3}$$

где $\Omega = (r_1, r_2)$, $y = y(r) = u(r)$.

Пусть на внутренней и внешней поверхностях цилиндра заданы напряжения

$$\sigma_r\Big|_{r=r_i} = -p_i, \ i = 1, 2, \tag{4}$$

где p_2 считаем неизвестным, а p_1 – задано. При этом считаем, что на внутренней поверхности цилиндра известно смещение, т. е.

$$y(r_1) = f_0. \tag{5}$$

Полученная задача (3)–(5), состоит в определении элемента $u = p_2 \in U = R = (-\infty, +\infty)$, при котором решение $y = y(u) = y(u;r)$ задачи (3)–(4) удовлетворяет равенству (5).

Следуя [11], при каждом $u \in U$, вместо классического решения краевой задачи (3)–(4) будем рассматривать ее обобщенное решение, как функцию $y = y(r) \in H$, $H = W_2^1(r_1, r_2)$ – пространство Соболева, которая $\forall z(r) \in$ $\in H_0 = H$, удовлетворяет равенству

$$a(y;z) = l(u;z), \tag{6}$$

где

$$a(y;z) = \int_{r_1}^{r_2} r\left((\lambda + 2\mu)\frac{dy}{dr}\frac{dz}{dr} + \lambda\left(\frac{y}{r}\frac{dz}{dr} + \frac{dy}{dr}\frac{z}{r}\right) + (\lambda + 2\mu)\frac{y}{r}\frac{z}{r}\right)dr, \tag{6'}$$

$$l(u;z) = r_1 p_1 z(r_1) - r_2 p_2 z(r_2).$$

Для каждого $u \in U$ функционал энергии имеет вид

$$\Phi(u;z) = a(z;z) - 2l(u;z), \ z \in H. \tag{7}$$

Функция $y(r)$, минимизирующая на H этот функционал, называется решением задачи (7). Справедливо утверждение

Лемма 1. При каждом фиксированном $u \in U$ задачи (6), (7) эквивалентны и имеют единственное решение $y = y(u;r) \in H$.

Введем в рассмотрение функционал-невязку

$$J(u)=\tfrac{1}{2}(y(u;r_1)-f_0)^2\,. \tag{8}$$

Вместо задачи (3)–(5) решаем задачу (6), (8), состоящую в определении элемента u, минимизирующего на U функционал (8) при ограничении (6).

Задачу (6), (8) будем решать с помощью градиентных методов [6], где $(n+1)$-е приближение u_{n+1} решения $u\in U$ находится по формуле

$$u_{n+1}=u_n-\beta_n p_n \tag{9}$$

начиная с некоторого приближения $u_0\in U$, а направление спуска p_n и коэффициент β_n для метода минимальных ошибок находим по формулам [6]

$$p_n=J'_{u_n}\,,\quad \beta_n=\frac{\left\|e_n\right\|^2}{\left\|J'_{u_n}\right\|^2}. \tag{10}$$

Здесь J'_{u_n} – градиент функционала $J(u)$ в точке $u=u_n$, $e_n=Au_n-f_0$, $Au_n=y(u_n;r_1)$.

Введем обозначения

$$\begin{gathered}\pi(u,v)=\big(\Upsilon(u)-\Upsilon(0),\Upsilon(v)-\Upsilon(0)\big),\\ L(v)=\big(f_0-\Upsilon(0),\Upsilon(v)-\Upsilon(0)\big),\end{gathered} \tag{10'}$$

где $\Upsilon(v)=Av$.

Так как

$$2J(v)=\pi(v,v)-2L(v)+\big(f_0-\Upsilon(0),f_0-\Upsilon(0)\big)\,,$$

то

$$\begin{gathered}\lim_{\lambda\to 0}\frac{J\big(u+\lambda(v-u)\big)-J(u)}{\lambda}=\pi(u,v-u)-L(v-u)=\\ =\big(\Upsilon(u)-f_0,\Upsilon(v)-\Upsilon(u)\big)=\langle J'_u,v-u\rangle.\end{gathered} \tag{11}$$

Следуя [8, 9, 11] для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u\in U$ задачи (6), (8) введем в рассмотрение сопряженную задачу

$$\begin{gathered}-r\frac{d}{dr}\sigma_r(\Psi)-\big(\sigma_r(\Psi)-\sigma_\varphi(\Psi)\big)=0,\quad r\in\Omega,\\ \sigma_r(\Psi)\Big|_{r=r_1}=\frac{1}{r_1}e_n,\qquad \sigma_r(\Psi)\Big|_{r=r_2}=0.\end{gathered} \tag{12}$$

Определение 1. Обобщенным решением краевой задачи (12) называется функция $\Psi(r)\in H$, которая $\forall z\in H$ удовлетворяет тождеству

$$a(\Psi,z)=e_n z(r_1). \tag{13}$$

Выбирая в тождестве (13) вместо функции z разность $y(u_{n+1})-y(u_n)$, с учетом (6), (11) получаем

$$\left\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \right\rangle = e_n\left(y\left(u_{n+1};r_1\right)-y\left(u_n;r_1\right)\right)=a\left(\Psi;y(u_{n+1})-y(u_n)\right)=$$
$$=a\left(y(u_{n+1});\Psi\right)-a\left(y(u_n);\Psi\right)=l\left(u_{n+1};\Psi\right)-l\left(u_n;\Psi\right)=-r_2\Delta u_n\Psi(r_2).$$

Следовательно,

$$J'_{u_n}=\tilde{\Psi}_n, \tag{14}$$

где $\tilde{\Psi}_n=-r_2\Psi(r_2)$.

Задача (6), (8) решается с помощью градиентных методов (9), (10), где прямая (6) и сопряженная (13) задачи решены с использованием метода конечных элементов (МКЭ) путем минимизации соответствующего функционала энергии. На примере задачи (7) его реализация состоит в следующем. Введем в рассмотрение подпространство $H_1^N\in H$ непрерывных на $[r_1,r_2]$, линейных, $V_1^N(r)=\alpha_1^i+\alpha_2^i r$, на каждом элементарном отрезке $\left[r^i,r^{i+1}\right]$, $r_1=$ $=r^0<r^1<\ldots<r^N=r_2$ функций. Имеем $\Phi(u_n;v_1^N)=a(v_1^N;v_1^N)-2l(u_n;v_1^N)$.

С учетом конечно-элементного разбиения получаем

$$\Phi(u_n;v_1^N)=\int_{r_1}^{r_2} r((\lambda+2\mu)\varepsilon_r(v_1^N)\varepsilon_r(v_1^N)+\lambda(\varepsilon_\varphi(v_1^N)\varepsilon_r(v_1^N)+\varepsilon_r(v_1^N)\varepsilon_\varphi(v_1^N))+$$

$$+(\lambda+2\mu)\varepsilon_\varphi(v_1^N)\varepsilon_\varphi(v_1^N))dr-2\left(r_1p_1v_1^N(r_1)-r_2u_nv_1^N(r_2)\right)=\int_{r_1}^{r_2}(\lambda+2\mu)\,r\left(\varepsilon_r(v_1^N)\right)^2dr+$$

$$+2\int_{r_1}^{r_2}\lambda r\varepsilon_\varphi(v_1^N)\varepsilon_r(v_1^N)dr+\int_{r_1}^{r_2}(\lambda+2\mu)\,r\left(\varepsilon_\varphi(v_1^N)\right)^2dr-2\left(r_1p_1v_1^N(r_1)-r_2u_nv_1^N(r_2)\right)=$$

$$=(\lambda+2\mu)\sum_{i=0}^{N-1}\left(\int_0^1(r_i+h_i\eta)\left(\frac{\beta_2^i}{h_i}\right)^2h_id\eta\right)+2\lambda\sum_{i=0}^{N-1}\left(\int_0^1\beta_1^i\beta_2^id\eta+\int_0^1\left(\beta_2^i\right)^2\eta d\eta\right)+$$

$$+(\lambda+2\mu)\sum_{i=0}^{N-1}\left(\int_0^1\frac{\left(\beta_1^i+\beta_2^i\eta\right)^2}{r_i+h_i\eta}h_id\eta\right)-2\left(r_1p_1v_1^N(r_1)-r_2u_nv_1^N(r_2)\right)=$$

$$=(\lambda+2\mu)\sum_{i=0}^{N-1}\left(\frac{r_i}{h_i}+1/2\right)\varpi_i^T\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\varpi_i+\lambda\sum_{i=0}^{N-1}\varpi_i^T\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\varpi_i+$$

$$+(\lambda+2\mu)\sum_{i=0}^{N-1}(\ln\left(\frac{r_i+h_i}{r_i}\right)\varpi_i^T\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\varpi_i+\left(1-\frac{r_i}{h_i}\ln\left(\frac{r_i+h_i}{r_i}\right)\right)\varpi_i^T\begin{pmatrix}-2&1\\1&0\end{pmatrix}\varpi_i+$$

$$+\left(\left(\frac{r_i}{h_i}\right)^2\ln\left(\frac{r_i+h_i}{r_i}\right)-\frac{r_i}{h_i}+\frac{1}{2}\right)\varpi_i^T\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\varpi_i-2\left(r_1p_1z(r_1)-r_2u_nz(r_2)\right)=$$

$$=V^TAV-V^TB, \tag{14'}$$

где $V^T=(V_0,V_1,\ldots,V_N)$ – значения решения $y_1^N(u_n;r)$ в узловых точках r_i, $i=\overline{0,N}$, A – симметричная положительно определенная матрица размерностью (N+1)×(N+1), $B=\{b_i\}_{i=0}^N$, $r_i=r^i$. С помощью преобразования $r=r_i+h_i\eta$, $h_i=r^{i+1}-r^i$, $V_1^N(r(\eta))=\beta_1^i+\beta_2^i\eta$, где β_1^i,β_2^i=const. На основании (14’) получаем систему линейных алгебраических уравнений $AV=B$.

При каждом $u=u_n$ для приближения $y_1^N(u_n;r)\in H_1^N$ решения $y(u_n)\in H$ задачи (7) имеет место оценка

$$\left\|y(u_n)-y_1^N(u_n)\right\|_{W_2^1(r_1,\,r_2)}\le Ch, \tag{15}$$

где C = const, $h=\max\limits_i h_i$.

С помощью рассмотренного подхода решены некоторые модельные примеры.

Пример 1. При λ=2, μ=1, p_1= – 6, p_2= – 6, r_1=1, r_2=2, классическое решение краевой задачи(3)–(4) имеет вид $y=r$.

Считаем в этой задаче $p_2=u\in U$ неизвестным. Для приведенных исходных данных задача (6), (8) решена с помощью градиентных методов (9), (10), где на каждом шаге определения (n+1)-го приближения u_{n+1} решения $u\in U$ прямая (6) и сопряженная (13) задачи решены с помощью изложенного алгоритма МКЭ с использованием кусочно-линейных функций метода конечных элементов путем минимизации соответствующего функционала энергии. Для задачи (6) он имеет вид

$$\Phi(u_n;v_1^N)=a(v_1^N;v_1^N)-2l(u_n;v_1^N).$$

В табл. 1 приведены результаты вычислительного эксперимента, где u_0 – начальное приближение итерационного процесса; u_n – результирующее значение; e_n – погрешность; h – шаг разбиения; n – номер итерации, на котором завершается итерационный процесс.

2. Идентификация внутреннего давления полого цилиндра при известных значениях давления и смещения на внешней его поверхности.

Состояние системы описывается задачей (3), (4), где p_1 считается неизвестным, а p_2 задано, т. е. эквивалентными задачами (6), (7) где

$$l(u;z)=r_1uz(r_1)-r_2p_2z(r_2). \tag{16}$$

ТАБЛИЦА 1

$p_2 = -6$ $f_0 = 1$	u_0	– 10	10	1	– 10	10	– 1	1
	u_n	– 6	– 6	– 6	– 6	– 6	– 6	– 6
	e_n	0	0	0	0	0	0	0
	h	0,25	0,25	0,25	0,1	0,1	0,01	0,01
	n	2	2	2	2	2	2	2

Считаем, что на внешней поверхности цилиндра известно смещение:

$$y(r_2) = f_0. \tag{17}$$

Функционал-невязка имеет следующий вид:

$$J(u) = \tfrac{1}{2}(y(u;r_2) - f_0)^2. \tag{18}$$

Полученную задачу (6), (18), где билинейная форма $a(\cdot;\cdot)$ определенна выражением (6’), а функционал $l(\cdot;\cdot)$ – (16), решаем приближенно с помощью итерационного процесса (9), (10), где $e_n = Au_n - f_0$, $Au_n = y(u_n;r_2)$. Справедливы выражения вида (10’), (11), где $\Upsilon(v) = Av$.

Для определения (n+1)-го приближения u_{n+1} решения $u \in U = R$ рассматриваемой задачи, следуя [8, 9, 11], сопряженная задача имеет вид

$$\begin{gathered} -\left\{(\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) - (\lambda+2\mu)\frac{\Psi}{r}\right\} = 0, \quad r \in \Omega, \\ \sigma_r(\Psi)\Big|_{r=r_2} = -\frac{1}{r_2}e_n, \quad \sigma_r(\Psi)\Big|_{r=r_1} = 0. \end{gathered} \tag{19}$$

Определение 2. Обобщенным решением краевой задачи (19) называется функция $\Psi(r) \in H$, которая $\forall z \in H$ удовлетворяет равенству

$$a(\Psi, z) = e_n z(r_2). \tag{20}$$

Теорема 1. Решение задачи (20) существует и единственное в H.

Выбирая в тождестве (20) вместо функции z разность $y(u_{n+1}) - y(u_n)$, с учетом (10’), (11) и задачи вида (6), имеем

$$\left\langle J'_{u_n}, \Delta u_n\right\rangle = e_n\left(y\left(u_{n+1};r_2\right) - y\left(u_n;r_2\right)\right) = l\left(\Delta u_n;\Psi\right) = r_1\Delta u_n\Psi(r_1).$$

Следовательно,

$$J'_{u_n} = \tilde{\Psi}_n, \tag{21}$$

где $\tilde{\Psi}_n = r_1\Psi(r_1)$.

Пример 2. Полагаем f_0 = 2, а все остальные исходные данные совпадают с теми, что приведены в примере 1.

Для приведенных исходных данных рассматриваемая модельная задача идентификации внутреннего давления p_1 решена с помощью метода минимальных ошибок (9), (10). На каждом шаге определения (n+1)-го приближения u_{n+1} решения $u \in U$ задача вида (6) и сопряженная – вида (20) решены с использованием кусочно-линейных функций МКЭ. Справедлива оценка вида (15). В табл. 2 приведены результаты вычислительного эксперимента, где использовались те же обозначения, что и в примере 1.

ТАБЛИЦА 2

$p_1 = -6$, $f_0 = 2$	u_0	– 10	10	1	– 10	10	– 1	1
	u_n	– 6	– 6	– 6	– 6	– 6	– 6	– 6
	e_n	0	0	0	0	0	0	0
	h	0,25	0,25	0,25	0,1	0,1	0,01	0,01
	n	2	2	2	2	2	2	2

3. Идентификация внешнего давления цилиндра при известном смещении внутренней его точки.

Состояние системы описывается краевой задачей (3), (4), где p_1 задано, а p_2 – неизвестно. При этом в некоторой точке $d_1 \in (r_1, r_2)$ известно значение смещения.

$$y(d_1) = f_0. \tag{22}$$

Функционал-невязка

$$J(u) = \tfrac{1}{2}(y(u; d_1) - f_0)^2. \tag{23}$$

Следовательно, получена задача (6), (23), состоящая в определении элемента u минимизирующего на $U = R$ функционал (23) при ограничении (6). Задачу (6), (23) решаем приближенно с помощью итерационного процесса (9), (10). Справедливы выражения (10’), (11), где $\Upsilon(v) = Av$, $Av = y(v; r_1)$.

Следуя [8, 9, 11] для определения (n+1)-го приближения u_{n+1} решения $u \in U$ задачи (6), (23), сопряженная задача имеет вид

$$\begin{gathered} -\left\{(\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) - (\lambda + 2\mu)\frac{\Psi}{r}\right\} = 0, \ \ r \in \Omega, \\ [\varphi]\big|_{r=d_1} = 0, \ \ [\sigma_r(\Psi)]\big|_{r=d_1} = -\frac{1}{d_1}e_n, \ \ \sigma_r(\Psi)\big|_{r=r_i} = 0, \ \ i = 1,2 \ , \end{gathered} \tag{24}$$

где $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 = (r_1, d_1)$, $\Omega_2 = (d_1, r_2)$, $[\varphi]\big|_{r=d_1} = \varphi(d_1 + 0) - \varphi(d_1 - 0)$ – скачок функции $\varphi(r)$ в точке $r = d_1 \in (r_1, r_2)$.

Вместо классического решения краевой задачи (24) с условиями сопряжения будем использовать ее обобщенное решение.

Определение 3. Обобщенным решением краевой задачи (24) называется функция $\Psi(r)\in H=\left\{v(r):v\big|_{\Omega_i}\in W_2^1(\Omega_i), i=1,2;[v]\big|_{r=d_1}=0\right\}$, которая $\forall z\in H$ удовлетворяет равенству

$$a(\Psi,z)=l_\Psi(y(u_n);z)\,, \tag{25}$$

где билинейная форма $a(\cdot;\cdot)$ имеет вид (6’),

$$l_\Psi(y(u_n);z)=\left(y(u_n;d_1)-f_0\right)z(d_1)\,. \tag{26}$$

Теорема 2. Решение задачи (25) существует и единственное в H.

Выбирая в тождестве (25) вместо функции *z* разность $y(u_{n+1})-y(u_n)$, с учетом выражений вида (10’), (11), где $\Upsilon(v)=Av$, $Av=y(v;r_1)$, $y(v;r)$ – решение обобщенной задачи (6), имеем

$$\left\langle J'_{u_n},\Delta u_n\right\rangle=\left(y\left(u_n;d_1\right)-f_0\right)\left(y\left(u_{n+1};d_1\right)-y\left(u_n;d_1\right)\right)=$$
$$=a\left(\Psi;y(u_{n+1})-y(u_n)\right)=l\left(u_{n+1};\Psi\right)-l\left(u_n;\Psi\right)=-r_2\Delta u_n\Psi(r_2).$$

Следовательно, $J'_{u_n}=\tilde{\Psi}_n$, где $\tilde{\Psi}_n=-r_2\Delta u_n\Psi(r_2)$.

Пример 3. Полагаем d_1=1/2, f_0=3/2, а все остальные исходные данные совпадают с теми, что приведены в примере 1.

Для приведенных исходных данных рассматриваемая модельная задача идентификации внешнего давления p_2 решена с помощью метода минимальных ошибок (9), (10). На каждом шаге определения (n+1)-го приближения u_{n+1} решения $u\in U=R$ рассматриваемой задачи прямая задача вида (6) и сопряженная вида (25) решены с использованием кусочно-линейных функций МКЭ. Справедлива оценка вида (15). В табл. 3 приведены результаты вычислительного эксперимента, где использовались те же обозначения, что и в примере 1.

ТАБЛИЦА 3

$p_2=-6$ $f_0=3/2$ $d_1=1/2$	u_0	–10	10	1	–10	10	–1	1
	u_n	–6	–6	–6	–6	–6	–6	–6
	e_n	0	0	0	0	0	0	0
	h	0,25	0,25	0,25	0,1	0,1	0,01	0,01
	n	2	2	2	2	2	2	2

4. Идентификация внутреннего давления цилиндра при известном смещении внутренней его точки.

Состояние системы описывается краевой задачей (3), (4), где p_1 неизвестно, а p_2 – задано. При этом в некоторой точке $d_1 \in (r_1, r_2)$ известно смещение, определенное равенством (22).

Функционал-невязка имеет вид (23).

Полученную задачу (6), (23), состоящую в определении элемента $u \in U$, минимизирующую на $U = R$ функционал (23), при ограничении (6), где билинейная форма $a(\cdot;\cdot)$ имеет вид (6’), а $l(\cdot;\cdot)$ определяется выражением (16), будем решать с помощью метода минимальных ошибок (9), (10).

Для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u \in U = R$ рассматриваемой задачи, сопряженная задача имеет вид (24), с соответствующим ей обобщением (25). На основе (25), с учетом (10’), (11), (6), (16) получаем

$$\left\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \right\rangle = r_1 \Delta u_n \Psi(r_1).$$

Следовательно, $J'_{u_n} = \tilde{\Psi}_n$, где $\tilde{\Psi}_n = r_1 \Psi(r_1)$.

Пример 4. Полагаем d_1=1/2, f_0=3/2, а все остальные исходные данные совпадают с приведенными в примере 2.

Для приведенных исходных данных задача идентификации внутреннего давления p_1 решена с помощью метода минимальных ошибок (9), (10). На каждом шаге определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u \in U = R$ рассматриваемой задачи прямая задача вида (6) и сопряженная вида (25) решены с использованием кусочно-линейных функций МКЭ. Справедлива оценка вида (15). В табл. 4 приведены результаты вычислительного эксперимента, где использовались те же обозначения, что и в примере 1.

ТАБЛИЦА 4

<table>
<tr><td rowspan="5">$p1 = -6$
$f_0 = 3/2$
$d_1 = 1/2$</td><td>u_0</td><td>– 10</td><td>10</td><td>1</td><td>– 10</td><td>10</td><td>– 1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>u_n</td><td>–6</td><td>–6</td><td>–6</td><td>–6</td><td>–6</td><td>– 6</td><td>–6</td></tr>
<tr><td>e_n</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>h</td><td>0,25</td><td>0,25</td><td>0,25</td><td>0,1</td><td>0,1</td><td>0,01</td><td>0,01</td></tr>
<tr><td>n</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr>
</table>

Заключение. На основе теории оптимального управления построены явные выражения градиентов функционалов-невязок идентификации параметров упругого деформирования кругового цилиндра. Решены модельные примеры.

В.С. Дейнека, А.А. Аралова

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗВОРОТНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ОСЕСИМЕТРИЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ДОВГОГО ТОВСТОГО ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА

Розглянуто питання розв'язання, за допомогою градієнтних методів, зворотних крайових задач для пружно деформованого довгого товстого порожнистого циліндра. Представлені результати розв'язання деяких модельних зворотних крайових задач.

V.S. Deineka, A.A. Aralova

NUMERICAL SOLUTION TO INVERSE BOUNDARY PROBLEMS FOR LONG THICK HOLLOW CYLINDER AXISYMMETRIC DEFORMATION

The problem of solution to inverse problem for elastic deformation of thick hollow cylinder with the use of gradient methods is considered. The solutions to sample inverse boundary problems are presented.

1. *Сергиенко И.В., Дейнека В.С.* Решение коэффициентных обратных задач теплопроводности для составной пластины // Проблемы управления и информатики. – 2007. – № 3. – С. 21 – 48.
2. *Сергиенко И.В., Дейнека В.С.* Решение комбинированных обратных задач для параболических многокомпонентных распределенных систем // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 5. – С. 48 – 71.
3. *Сергиенко И.В., Дейнека В.С.* Системный анализ многокомпонентных распределенных систем. – Киев: Наук. думка, 2009. – 640 с.
4. *Дейнека В.С., Сергиенко И.В* Оптимальное управление неоднородными распределенными системами. – Киев: Наук. думка, 2003. – 506 с.
5. *Sergienko I.V., Deineka V.S.* Optimal control of distributed systems with conjugation conditions. – New York: Kluwer Academic Publishers, 2005. – 400 p.
6. *Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1988. – 288 с.
7. *Сергиенко И.В., Дейнека В.С.* Решение комплексных обратных задач термоупругости // Проблемы управления и информатики. – 2007. – № 5. – С. 64 –87.
8. *Сергиенко И.В., Дейнека В.С.* Идентификация параметров задачи о напряженно-деформированном состоянии многокомпонентного упругого тела с включением // Прикладная механика. – 2010. – **46**, № 4. – С. 14 – 24.
9. *Сергиенко И.В., Дейнека В.С.* Идентификация параметров задач упругого деформирования // Проблемы прочности. – 2010. – № 5. – С. 101 –126.
10. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
11. *Сергиенко И.В., Дейнека В.С.* Идентификация напряженно-деформированного состояний составного цилиндра по известным смещениям // Проблемы управления и информатики. – 2009. – № 3. – С. 42 –48.

Получено 16.12.2010

Об авторах:

Дейнека Василий Степанович,
доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН Украины,
заведующий отделом Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины,
e-mail vdeineka@ukr.net

Аралова Альбина Андреевна,
младший научный сотрудник Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.
e-mail aaasquirrel@ukr.net