КОМПЬЮТЕРНАЯ
МАТЕМАТИКА

УДК 517.9:519.6

А.В. ГЛАДКИЙ, Ю.А. ГЛАДКАЯ, Я.В. ЗАБАБУРИНА

О МОДЕЛИРОВАНИИ ЗВУКОВЫХ ПОЛЕЙ ЯВНЫМ РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ

Предлагается подход к численному моделированию акустических полей в подводных неоднородных волноводах, использующий явные разностные схемы для решения волнового параболического уравнения типа Шредингера с граничным условием треьего рода. Такой подход позволяет учесть преимущества явных разностных схем и повысить эффективность вычислительных процессов, используя методику параллельных вычислений. Рассмотрены вопросы построения и исследования устойчивости явной трехслойной разностной схемы с комплекснозначными несамосопряженными операторами. Получено условие устойчивости по начальным данным.

Введение. Актуальность развития методов математического моделирования процессов распространения звуковых волн в неоднородных волноводах в значительной мере обьясняется потребностями дистанционного зондирования и акустического мониторинга регионов Мирового океана [1–6].

С математической точки зрения расчет звукового поля описывается краевыми задачами для эллиптического волнового уравнения Гельмгольца, численное решение которых в случае неограниченных неоднородных областей связано с известными вычислительными трудностями. Использование параболических аппроксимаций оператора Гельмгольца позволяет свести решение краевых задач к решению задачи Коши для уравнений параболического типа с несамосопряженным комплекснозначным оператором.

В данной работе для численного решения волнового параболического уравнения типа Шредингера в волноводах с граничными условиями третьего рода предлагается подход к построению и исследованию устойчивости явной трехслойной разностной схемы с комплекснозначными операторами.

Постановка задачи. Для описания акустического поля в осесимметричном волноводе $G=\{r_0<r<\infty, 0<z<H, r_0>0\}$, где (r,z) – цилиндрические кординаты и ось z направлена вертикально вниз, рассмотрим краевую задачу для волнового уравнения типа Шредингера с комплексными коэффициентами [2, 3]:

$$2ik_0\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+k_0^2(n^2(r,z)-1+i\upsilon(r,z))p=0. \tag{1}$$

Здесь $p(r,z)$ – комплекснозначная функция; $i=\sqrt{-1}$ – мнимая единица; $k_0=2\pi f/c_0$ – волновое число; c_0 – нормировочная скорость звука; $n(r,z)=c_0/c(r,z)$, $\upsilon(r,z)\ge 0$ – непрерывные достаточно гладкие функции (коэффициенты преломления и поглощения соответственно).

Дифференциальное уравнение (1) является базовым для определения дальнего комплекснозначного акустического давления $P(r,z)$, создаваемого гармоническим источником. Вне источника это давление удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\left(r\frac{\partial P}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}+k_0^2(n^2(r,z)+i\upsilon(r,z))P=0$$

и при $k_0 r>>1$ представляется в виде $P(r,z)=H_0^{(1)}(k_0 r)p(r,z)$, где $H_0^{(1)}(\cdot)$ – функция Ханкеля первого рода нулевого порядка.

Рассмотрим краевую задачу для уравнения (1), ограничиваясь средой без потерь и граничными условиями третьего рода на нижней границе волновода:

$$2ik_0\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+k_0^2(n^2(r,z)-1)p=0,\ (r,z)\in G, \tag{2}$$

$$p\big|_{z=0}=0,\ \left.\left(\frac{\partial p}{\partial z}+\sigma p\right)\right|_{z=H}=0,\ r_0\le r<\infty, \tag{3}$$

$$p\big|_{r=r_0}=u(z), \tag{4}$$

где $u(z)$ – заданная функция, $\sigma>0$.

Разностная схема. Для численного решения задачи (2)–(4) с комплексным несамосопряженным оператором на сетке

$$\bar\omega_{\tau h}=\bar\omega_\tau\times\bar\omega_h=\left\{(r,z),\ r\in\bar\omega_\tau,\ z\in\bar\omega_h\right\},\ \omega_{\tau h}=\omega_\tau\times\omega_h,$$

$$\bar\omega_h=\{z=z_k=kh,\ k=\overline{0,N},\ h=H/N\}=\omega_h\cup\{0\}\cup\{H\},$$

$$\bar\omega_\tau=\left\{r=r_m=r_0+m\tau,\ m=0,1,2,...,\right\}=\omega_\tau\cup\{r_0\},$$

$$\omega_h=\left\{z=z_k=kh,\ k=\overline{1,N-1}\right\},\ \omega_h^+=\left\{z=z_k=kh,\ k=\overline{1,N}\right\},$$

дифференциальному уравнению (2) поставим в соответствие разностное уравнение

$$2ik_0\, y_{\overset{\circ}{r}} + y_{\bar{z}\,z} + b(z,r)y = 0,\ (z,r) \in \omega_{\tau h}, \tag{5}$$

где $b(r,z) = k_0^2\left(n(r,z) - 1\right)$ и приняты следующие обозначения теории разностных схем [7]:

$$y = y_k = y^m = y_k^m = y(r_m, z_k),\quad \hat{y} \quad = y_k^{m+1},\ \breve{y} = y_k^{m-1},\ y_{\overset{\circ}{r}} = (\hat{y} - \breve{y})/\tau,$$

$$y_z = (y_{k+1} - y_k)/h,\ y_{\bar{z}} = (y_k - y_{k-1})/h,$$

$$y_{\bar{z}\,z} = \frac{1}{h}(y_z - y_{\bar{z}}) = \frac{1}{h^2}\left(y_{k+1}^m - 2y_k^m + y_k^m\right).$$

Граничное условие третьего рода (3) в узлах $(r,z) = (r, z_N),\ r \in \omega_\tau$ аппроксимируем уравнением

$$2ik_0 y_{\overset{\circ}{r}} - \frac{2}{h} y_{\bar{z}} - \frac{2\alpha}{h} y + b(r,z)y = 0,\ (r,z) = (r, z_N),\ r \in \omega_\tau. \tag{6}$$

Пользуясь разложением в ряд Тейлора, легко показать, что для погрешности аппроксимации уравнений (5),(6) справедливо соотношение

$$\Psi = \begin{cases} 2ik_0\, p_{\overset{\circ}{r}} + p_{\bar{z}\,z} + b(z,r)p = O(\tau^2 + h^2),\ \ (r,z) \in \omega_\tau \times \omega_h, \\ 2ik_0 h y_{\overset{\circ}{r}} - 2y_{\bar{z}} - (2\sigma - hb(r,z))y = O(h^2 + \tau^2),\ z = z_N,\ \ r \in \omega_\tau. \end{cases}$$

Для исследования свойств разностной аппроксимации дифференциальной задачи введем гильбертово пространство $\mathcal{H}$ комплекснозначных функций, заданных на сетке ω_h^+. Сеточная функция $y = y(r)$ определена на ω_h^+ со значениями в $\mathcal{H}$: $y(r) = \{\,y(r,z),\ z \in \omega_h^+\},\ y^m = y(r_m)$. Скалярное произведение и норму в $\mathcal{H}$ определим по формулам

$$(y,v) = (y,v)_{\omega_h} + 0{,}5 h y_N \bar{v}_N,\ \ \|y\| = (y,y)^{1/2},$$

$$(y,v)_{\omega_h} = \sum_{z \in \omega_h} h y \bar{v},$$

где черта означает комплексное сопряжение.

Тогда разностную схему, аппроксимирующую дифференциальную задачу (2)–(4), можно записать в операторном виде

$$-2ik_0 y_{\overset{\circ}{r}} + Ay = 0,\ r \in \omega_\tau, \tag{7}$$

где оператор A определяется выражениями

$$Ay = \begin{cases} -\dfrac{1}{h} y_z + \dfrac{1}{h^2} y - b(r,z) \quad y,\ z = h, \\ -y_{\bar{z}\,z} - b(r,z) \quad y,\ z = z_k, k = \overline{2, N-1}, \\ \dfrac{2}{h}\left(y_{\bar{z}} + \sigma y\right) - b(r,z) y,\ z = H. \end{cases}$$

Таким образом, задача (7) является явной трехслойной разностной схемой. Отметим, что при расчетах, кроме решения при r_0, необходимо иметь значение решения $y^1 = y(\tau, z)$, которое можно получить каким-либо другим методом.

Пользуясь разностной формулой Грина для комплекснозначных функций [7]

$$(y,(av_{\bar{z}})_z)_{\omega_h} - ((ay_{\bar{z}})_z, v)_{\omega_h} = -((a-\bar{a})y_{\bar{z}}, v_{\bar{z}}\,] +$$

$$+[y\bar{a}\bar{v}_{\bar{z}} - \bar{v}ay_{\bar{z}}\,]_N - [y\bar{a}_1\bar{v}_z - \bar{v}a_1 y_z]_0,\ (y,v] = \sum_{z\in\omega_h^+} hy\bar{v},$$

легко показать, что оператор A является самосопряженным в $\mathcal{H}$. Действительно, учитывая, что $a - \bar{a} = 0, v_0 = y_0 = 0$, имеем

$$(Ay,w) = (-y_{\bar{z}\,z}, w)_{\omega_h} - (by,w)_{\omega_h} + \frac{h}{2}\left(\frac{2}{h}\left(y_{\bar{z},N} + \sigma y_N\right) - b_N y_N\right)\bar{w}_N =$$

$$= (y, -w_{\bar{z}\,z})_{\omega_h} - (y, bw)_{\omega_h} + \frac{h}{2} y_N \left(\frac{2}{h}\left(\bar{w}_{\bar{z},N} + \sigma \bar{w}_N\right) - b_N \bar{w}_N\right) = (y, Aw).$$

Кроме того, применяя первую разностную формулу Грина получаем, что $(Ay,y) = (y_{\bar{z}}, y_{\bar{z}}\,] - (by,y) + \sigma\left|y_N\right|^2$.

Перейдем к анализу устойчивости разностной схемы (7) по начальным данным. Введем гильбертово пространство $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ как прямую сумму, т. е. элементами пространства $\mathcal{H}^2$ являются векторы вида $Y_m = \{y^m, y^{m+1}\}$, $y^m, y^{m+1} \in \mathcal{H}$ с покординатными операциями сложения и умножения. Устойчивость трехслойной схемы (7) будем изучать в энергетическом пространстве $\mathcal{H}_D^2$ с метрикой, порожденной некоторым (возможно зависящим от r) самосопряженным положительным оператором $D = D_m = D(r_m)$, действующим в $\mathcal{H}^2$:

$$(y,v)_D = (Dy,v),\ \|y\|_D = (y,y)_D^{1/2},\ y,v\in \mathcal{H}^2.$$

Следуя [7], под устойчивостью по начальным данным будем понимать выполнение оценки

$$(D_{m+1}y_{m+1},\ y_{m+1}) \le \rho^2(D_m y_m, y_m), m = 0, 1, 2, ...,$$

где величина ρ^m равномерно ограничена константой, не зависящей от параметров сетки.

Обозначим $\varepsilon(r,z) = n^2(r,z) - 1,\ -\varepsilon_0 \le \varepsilon(r,z) \le \varepsilon_1,\ \varepsilon_0 \ge 0, \varepsilon_1 \ge 0, \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \ne 0.$

Имеет место

Теорема. Разностная схема (7) устойчива по начальным данным при выполнении условия

$$\tau \le \frac{2k_0h^2}{4+\varepsilon_0 k_0^2 h^2 + 2\sigma h}. \tag{8}$$

Для доказательства перепишем задачу (7) в операторной форме:

$$\alpha\hat{y} + \bar{\alpha}\breve{y} + Ay = 0,\ r\in\omega_r, \tag{9}$$

где y^0, y^1 заданы, $y^m = y(r_m)\in \mathcal{H}$, а комплексный параметр $\alpha = -ik_0/\tau$.

Запишем уравнение (9) в виде

$$\alpha\hat{y} + \frac{1}{2}Ay = -\bar{\alpha}\breve{y} - \frac{1}{2}Ay$$

и возведем скалярно обе части равенства в квадрат. Тогда получим тождество

$$|\alpha|^2\|\hat{y}\|^2 + \mathrm{Re}(\alpha\hat{y}, Ay) = |\alpha|^2\|\breve{y}\|^2 + \frac{1}{2}(\bar{\alpha}\breve{y}, Ay) + \frac{1}{2}(Ay, \bar{\alpha}\breve{y}),$$

в правой части которого прибавим и вычтем величину $|\alpha|^2\|y\|^2$. Отсюда, учитывая самосопряженность оператора A, получаем соотношение

$$|\alpha|^2\|\hat{y}\|^2 + \mathrm{Re}(\alpha\hat{y}, Ay) + |\alpha|^2\|y\|^2 = |\alpha|^2\|\breve{y}\|^2 + \mathrm{Re}(\alpha y, A\breve{y}) + |\alpha|^2\|y\|^2,$$

которое можно переписать так:

$$\left\|\alpha\hat{y} + \frac{1}{2}Ay\right\|^2 + \left(\left(|\alpha|^2E - \frac{1}{4}A^2\right)y, y\right) = \left\|\alpha y + \frac{1}{2}A\breve{y}\right\|^2 + \left(\left(|\alpha|^2E - \frac{1}{4}A^2\right)\breve{y}, \breve{y}\right).$$

Это означает, что квадратичная форма

$$\Xi_m = \left\| \alpha\hat{y} + \frac{1}{2}Ay \right\|^2 + \left(\left(|\alpha|^2 E - \frac{1}{4}A^2 \right) y, y \right) \tag{10}$$

неотрицательна при выполнении неравенства

$$\left(\left(|\alpha|^2 E - \frac{1}{4}A^2 \right) y, y \right) \ge 0, \;\; y \in \mathcal{H}. \tag{11}$$

В этом случае квадратичную форму (10) можно записать в виде скалярного произведения $\Xi_m = \left(D_m y_m, y_m\right)$, где $y_m = \{y^m, y^{m+1}\} \in \mathcal{H}^2$, а самосопряженный и неотрицательный оператор D_m, действующий в пространстве $\mathcal{H}^2$, является квадратной операторной матрицей второго порядка:

$$D_m = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 E & \frac{1}{2}\alpha A \\ \frac{1}{2}\bar{\alpha} A & |\alpha|^2 E \end{pmatrix}.$$

Тогда на каждом шаге выполняется энергетическое тождество

$$\left(D_m y_m, y_m\right) = \left(D_m y_{m-1}, y_{m-1}\right), \;\; y_m, y_{m-1} \in \mathcal{H}^2,$$

которое означает, что ошибка, допущенная на некотором шаге, не возрастает.

Если в (11) выполняется строгое неравенство, то выражение $\sqrt{\left(D_m y_m, y_m\right)}$ определяет норму в пространстве $\mathcal{H}^2$, что обеспечивает устойчивость разностной схемы (7) в этой норме. Легко видеть, что условие неотрицательности квадратичной формы (11) означает выполнение неравенства $\|A\| \le 2|\alpha|$. Учитывая, что $(y_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}] \le \frac{4}{h^2}(y, y)$, $|y_N|^2 \le \frac{2}{h}(y, y)$, $|\alpha| = \frac{k_0}{\tau}$, $\|A\| \le \frac{4}{h^2} + k_0^2\varepsilon_0 + \frac{2\sigma}{h}$, приходим к условию устойчивости (8).

Заключение. В работе рассматривается подход к численному моделированию акустических полей, использующий явные разностные схемы для волнового уравнения типа Шредингера с граничным условием третьего рода. Исследованы вопросы построения и устойчивости трехслойных явных разностных схем с комплекснозначными несамосопряженными операторами, получено условие устойчивости по начальным данным. Предложенная методика легко обобщается на случай разрывных коэффициентов преломления, других краевых условий и позволяет повысить эффективность вычислительных процессов, используя методику параллельных вычислений.

А.В. Гладкий, Ю.А. Гладка, Я.В. Забабуріна

ПРО МОДЕЛЮВАННЯ ЗВУКОВИХ ПОЛІВ ЯВНИМ РІЗНИЦЕВИМ МЕТОДОМ

Розглянуто підхід до побудови та дослідження явної різницевої схеми для розв’язання хвильового параболічного рівняння типу Шредінгера з граничною умовою третього роду. Запропонована явна тришарова різницева схема з комплексними несамоспряженими операторами, досліджена її стійкість та отримана умова стійкості за початковими даними.

A.V. Gladky, Yu.A .Gladka, Ya.V. Zababurina

ON MODELLING SOUND FIELDS WITH THE USE OF THE EXPLICIT DIFFERENCE METHOD

An approach for construction and investigation of the explicit difference scheme for solving wave parabolic equation of Shroedinger type with third type boundary condition is considered. The explicit three-level difference scheme with complex non-self-conjugate operator is proposed. The stability of this scheme is investigated. The stability condition on initial data is obtained.

1. *Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П.* Теоретические основы акустики океана. – Л.: Гидрометеоиздат, 1982. – 264 с.
2. *Распространение* волн и подводная акустика / Под ред. Дж. Б. Келлера и Дж. Пападакиса. – М.: Мир, 1980. – 230 с.
3. *Lee D., McDaniel S.T.* Ocean acoustic propagation by finite difference method // Comput. Math. Appl. – 1987. – **14**. – P. 305–423.
4. *Lee D., Pierse A.D., Shang E.C.* Parabolic equation development in the twentieth century // J. Comput. Acoust. – 2000. – **1**, N 4. – P. 527–637.
5. *Гладкий А.В., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В.* Численно-аналитические методы исследования волновых процессов. – Киев: Наук. думка, 2001. – 452 с.
6. *Завадский В.Ю.* Моделирование волновых процессов. – М.: Наука, 1991. – 248 с.
7. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Устойчивость разностных схем. – М.: Наука, 1973. – 416 с.

Получено 28.10.2010

Об авторах:

Гладкий Анатолий Васильевич,
доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины,

Гладкая Юлия Анатольевна,
доцент Киевского национального торгово-экономического университета,

Забабурина Ярослава Викторовна,
студентка Национального технического университета Украины «КПИ».