

Рассмотрены особенности метода исчерпывания и реализующего его алгоритма, использованные при разработке подсистемы триангуляции специализированных слоистых областей программного комплекса Надра-3D.

© М.В. Белоус, В.С. Дейнека,
2011

УДК 004.021

М.В. БЕЛОУС, В.С. ДЕЙНЕКА

ПОДСИСТЕМА ТРИАНГУЛЯЦИИ СЛОИСТЫХ ТЕЛ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА НАДРА-3D

Введение. Одним из подготовительных этапов при проведении расчетов методом конечных элементов является построение сетки триангуляции исследуемой области, т. е. представления области в виде совокупности треугольников в двумерном случае и в виде совокупности тетраэдров в трехмерном.

Исследования и разработка алгоритмов триангуляции ведутся на протяжении длительного времени и по-прежнему являются актуальными, о чем свидетельствует значительное количество публикаций по вопросам генерирования и оптимизации сетки. Причем, если для двумерного случая вопрос триангуляции произвольной области практически решен [1–4], то для произвольной трехмерной области этот вопрос все еще остается открытым.

Сетки триангуляции различают двух видов: регулярные сетки (для построения элемента которых достаточно знать его номер в некоторой системе, определяемой используемым шаблоном) и нерегулярные. Методы построения сеток первого типа не требуют больших ресурсов памяти и достаточно быстры, однако они применимы к построению сеток для ограниченного количества областей. Для триангуляции областей произвольной формы, со сложной границей или какими либо особенностями, требующими сгущения сетки, используются методы построения нерегулярных сеток.

В данной работе рассматривается метод исчерпывания, использованный при реализации подсистемы триангуляции программного комплекса Надра-3D.

Методы исчерпывания (advancing front) основаны на концепции использования «фронта» – динамически изменяемого набора элементов разбиения границы области (отрезков для двумерного случая и треугольников для трехмерного), которые возможно использовать при построении элементов сетки триангуляции (треугольников в двумерном случае и тетраэдров в трехмерном). Общая последовательность шагов методов исчерпывания имеет следующий вид:

1. Задание функции распределения размеров элементов сетки триангуляции.
2. Построение триангуляции для каждого фрагмента границы области (в двумерном случае – это аппроксимация кривых границы ломаными, сегменты которых удовлетворяют заданным пользователем ограничениям на длину). Особенностью методов исчерпывания является то, что это начальное разбиение в процессе работы алгоритма не изменяется.
3. Инициализация фронта сеткой триангуляции границы.
4. Выбор с помощью некоторого критерия элемента фронта, на котором, как на основании, будет построен элемент сетки триангуляции, расположенный внутри ограниченной фронтом области.
5. Вычисление положения «идеального узла» для выбранного элемента фронта.
6. Выбор из фронта узлов, которые возможно использовать вместо «идеального узла», генерация дополнительных точек в окрестности «идеального узла».
7. Сортировка полученных на этапах 5, 6 узлов в соответствии с некоторым критерием, построение элемента сетки триангуляции на выбранном элементе фронта и первом узле списка. Проверка непересечения созданным элементом сетки элементов фронта. Если с использованием имеющихся вершин не удалось построить такой элемент, переходим к п. 4.
8. Обновление фронта и сетки триангуляции. Из фронта удаляются все принадлежащие ему элементы (отрезки либо треугольники), использованные для построения элемента сетки, и во фронт добавляются элементы, образованные в сгенерированном элементе сетки и ранее не принадлежавшие фронту. В сетку триангуляции добавляется созданный на этапе 7 элемент.
9. Если фронт не пуст, переходим к п. 4.
10. Оптимизация полученной сетки триангуляции.

Задание распределения размеров генерируемых элементов может быть выполнено явно либо неявно. При явном задании на всем пространстве должна быть аналитически задана функция $f(x, y, z)$, определяющая размеры элементов сетки в любой точке области. При неявном задании размер генерируемого элемента либо вычисляется исходя из дискретизации границы области, либо путем интерполяции значений, заданных в узлах контрольного пространства, представляющего собой покрывающую область дополнительную сетку (часто упоминается в публикациях как background mesh – «фоновая сетка»), в каждом узле которой определены значения, задающие размер. Сетка контрольного пространства может быть регулярной либо произвольной, сконструированной пользователем. Для построения в окрестности некоторой точки сетки равносторонних элементов пользователю необходимо задать в этой точке желаемую длину

стороны. Для построения сетки элементов, размеры которых различаются в зависимости от направления, необходимо задать n взаимно ортогональных направлений и значения размеров по этим направлениям (n – размерность пространства).

Для сложных пространственных областей определение адекватной фоновой сетки вручную может оказаться достаточно затратной задачей. В этом случае целесообразней использовать механизм распределения источников (distribution of sources). В этом подходе пространственное распределение размеров элементов сетки задается как функция расстояния от рассматриваемой точки до некоторого «источника», причем в некоторой окрестности «источника» значение размера обычно постоянно, а за пределами этой окрестности начинает быстро расти, что дает возможность генерирования сетки с плавным переходом к областям ее сгущения.

Например, в [1] используются «источники» в виде точки, линии или треугольника, а функция определения размеров элемента имеет вид

$$\delta(x) = \delta_1, x \leq x_c, \quad \delta(x) = \delta_1 \exp\left(\frac{x - x_c}{D - x_c}\right), \quad x \geq x_c,$$

где x – расстояние от точки, где вычисляется значение, до источника, а значения δ_1 , D , x_c задаются пользователем.

Выбор активного элемента фронта, т. е. элемента, на котором будет построен элемент сетки триангуляции, может осуществляться с использованием различных критериев: выбор элемента, содержащего ребро минимальной длины; элемента с минимальной площадью; выбор элемента с учетом минимизации фронта (с целью уменьшения количества проверок и снижения общего времени триангуляции за счет использования локальной информации, вычисленной на предыдущих этапах). Также одной из стратегий является создание локально наилучших элементов сетки, опираясь на наихудший элемент фронта.

Следует отметить [2], что генерирование сетки триангуляции обычно происходит не локально, а скорее осуществляется случайным образом для разных элементов границы области. Это поведение имеет такие нежелательные эффекты как ненужное усложнение фронта, уменьшение возможностей использования полученной на предыдущих этапах локальной информации, общее уменьшение скорости работы алгоритма.

Вычисление положения «идеального узла» для выбранного элемента фронта включает в себя проверку на соответствие некоторым критериям следующих точек:

1. «Идеальный узел», вычисленный для активного элемента фронта. Положение узла вычисляется так, чтобы построенный на нем и активном элементе фронта элемент сетки триангуляции находился внутри ограниченной фронтом области и был как можно ближе по форме к «идеальному элементу» (равностороннему треугольнику, правильному тетраэдру).

2. Некоторые уже существующие узлы сетки триангуляции, принадлежащие элементам фронта и близкие к активному элементу. Критерием близости обычно является расстояние до идеального узла, которое должно быть меньшим, чем вычисленное в идеальном узле значение h длины стороны элемента сетки триангуляции. Кроме того, независимо от расстояния до идеального узла, рассматриваются узлы элементов фронта, соседних с активным, если углы между ними и активным элементом меньше некоторого порогового значения. Рассмотрение узлов этой группы вызвано тем, что предпочтительнее использовать уже существующий узел, а не создавать новый.

3. Точки, созданные на предопределенных позициях в окрестности идеального узла. Рассмотрение этих точек предлагается некоторыми авторами для решения задачи выбора оптимального узла при сложной конфигурации фронта.

Набор указанных выше узлов упорядочивается в соответствии с увеличением расстояния до идеального узла. Согласно этому упорядочению осуществляется генерирование и проверка возможных элементов сетки триангуляции.

Проверка корректности сгенерированного элемента. Сгенерированный элемент сетки является корректным, если ни один из элементов его границы не пересекает ни один элемент фронта и если он не содержит ни один элемент сетки. Таким образом, все проверки в итоге сводятся к проверкам пересечения. В работе [2] отмечено, что в случае неоптимальной реализации этих проверок они могут занимать до 80 % времени, затраченного на построение триангуляции. Тем не менее, использование таких механизмов как фильтры по координатам и квадратам (октодеревья) может снизить затраченное на проверку пересечений время до 25 % времени всего процесса триангуляции.

Следует также отметить, что элемент сетки триангуляции, удовлетворяющий указанным выше условиям, хотя и является корректным, может модифицировать фронт таким образом, что дальнейшее генерирование элементов сетки либо будет создавать элементы с плохими свойствами, либо вообще будет невозможным. Поэтому целесообразно проверять также расстояние между ребрами нового элемента сетки и элементами фронта, контролируя наличие свободного пространства.

Методы улучшения сетки. Поскольку конечной целью является создание качественной сетки, созданный элемент, даже если он прошел предварительные проверки, может быть отброшен в случае неудовлетворения критерию качества. Обзор возможных критериев оценки качества сетки приведен в [2, 3]. Например, мерой качества [2] может быть значение $Q = \alpha h_{\max} / \rho$, где h_{\max} – длина наибольшей стороны элемента, α – нормировочный коэффициент (такой, что $Q = 1$, когда элемент правильный), ρ – радиус вписанной сферы. Построенный элемент сетки отбрасывается, если мера Q превышает некоторое заданное пользователем пороговое значение.

Из методов улучшения сетки обычно применяются следующие [1–4]:

Диагональная перестановка: изменяет связи между узлами в сетке, не изменяя положения самих узлов. Этот процесс заключается в переборе всех сторон

сетки (за исключением лежащих на границе). Для каждой стороны АВ, общей для треугольников АВС и АDB, рассматривается возможность перестановки сторон АВ и CD, заменяя таким образом треугольники АВС и АDB на АDC и ВСD. Перестановка осуществляется, если в результате получившейся замены некий критерий удовлетворяется лучше, чем при текущей конфигурации сетки. Операция применима только, если область, ограниченная четырехугольником ABCD, выпуклая. Критериями перестановки могут быть оптимальная связность узлов и максимизация минимального угла. Оптимальная связность узлов представлена «идеальным» количеством ребер, входящих во внутренний узел. Это количество равно 6, поскольку совпадает с количеством ребер в сетке из равно-сторонних треугольников. Для узлов, лежащих на границе, идеальное число связности зависит от геометрии границы. Для каждого из четырех узлов текущей конфигурации вычисляется разность реальной и идеальной связности и перестановка выполняется, если она уменьшает сумму этих значений.

Сглаживание сетки: изменяет положение внутренних узлов без изменения топологии сетки. Стороны элементов рассматриваются как пружины, жесткость которых пропорциональна длине стороны. Узлы итеративно перемещают до тех пор, пока система не окажется в состоянии равновесия.

Сходимость. Для двумерного случая справедлива теорема, утверждающая, что любая произвольная область, определенная полигональным непересекающимся контуром, может быть триангулирована без добавления дополнительных узлов. Ее следствием является тот факт, что в двумерном случае метод исчерпывания всегда сходится за конечное число шагов. Для трехмерного случая это утверждение не выполняется, поскольку существуют примеры простых областей, триангуляция которых без добавления дополнительных узлов невозможна. Поэтому при реализации алгоритмов трехмерной триангуляции необходимо минимизировать вероятность получения тупиковых конфигураций, а в случае их возникновения – реализовать механизмы удаления некоторых элементов сетки и ее реконфигурации по другим алгоритмам.

Алгоритм триангуляции. Одна из возможных реализаций метода исчерпывания для построения триангуляции двумерной области, идеи которой использованы при разработке подсистемы триангуляции программного комплекса Надра-3D, описана в [1] (авторы – J. Peraire, J. Peiro, K. Morgan). Алгоритм состоит из следующих шагов:

1. Выбирается имеющая минимальную длину сторона АВ фронта, которая будет использоваться как основание генерируемого треугольника.
2. На основании значений, заданных в узлах фоновой сетки, и значений «источников» вычисляется преобразование T (отображает сетку в нормализованное пространство, в котором длина рассматриваемой стороны треугольника равна 1) в центре M выбранной стороны. Это преобразование применяется к узлам фронта, лежащим внутри окружности с центром в M и радиусом в три раза большим длины рассматриваемой стороны. Пусть A_1, B_1, M_1 – положение в нормализованном пространстве точек A, B, M .

3. В нормализованном пространстве вычисляется положение «идеального узла» P_1 . Точка P_1 расположена на расстояниях δ_1 от точек A_1 и B_1 на прямой, перпендикулярной стороне, проходящей через точку M_1 перпендикулярно стороне A_1B_1 . Направление, в котором расположена точка P_1 , зависит от ориентации стороны AB и выбирается так, чтобы генерируемый узел лежал внутри ограниченной фронтом области. Значение δ_1 выбирается в соответствии с критерием

$$\delta_1 = \begin{cases} 1.0, & 0.55 \times L < 1 < 2 \times L, \\ 0.55 \times L, & 1 < 0.55 \times L, \\ 2 \times L, & 2 \times L < 1, \end{cases}$$

где L – расстояние между точками A_1 и B_1 .

Только в ситуациях, когда сторона AB будет иметь характеристики, очень отличающиеся от характеристик, определяемых фоновой сеткой, значение δ_1 будет отличаться от единицы. Однако приведенное неравенство нужно учитывать для обеспечения геометрической совместимости.

4. Вычисляется положение других узлов, которые возможно использовать вместо идеального, и они упорядочиваются в виде списка. Рассматриваются два вида узлов: все узлы Q^1, Q^2, \dots текущего фронта, которые расположены в нормализованном пространстве внутри окружности с центром в P_1 и радиусом $r = \delta_1$, и набор точек P^1, P^2, \dots, P^5 , сгенерированных вдоль высоты P_1M_1 . Для каждой точки Q^i строится проходящая через узлы A_1, B_1, Q^i окружность с центром C^i на линии P_1M_1 . Узлы Q^i упорядочиваются в виде списка, в котором точка с наиболее удаленным от P_1 в направлении P_1M_1 центром находится в начале списка. Точки P^1, \dots, P^5 добавляются в конец этого списка.
5. Из списка выбирается наилучшая точка. Это первая точка, позволяющая построить корректный треугольник, т. е. такой, стороны которого не пересекают стороны фронта и который не содержит внутри элементы сетки триангуляции.
6. Если был добавлен новый узел, его координаты в физическом пространстве вычисляются с помощью обратного преобразования T^{-1} .
7. Сохраняется новый треугольник и обновляется фронт путем добавления / удаления соответствующих ребер.

Подсистема триангуляции программного комплекса Надра-3D. В программном комплексе Надра-3D реализован алгоритм построения сеток триангуляции для специализированных моделей геометрии трехмерных слоистых областей. В работе [5] приведена структура используемой геометрической модели и коротко описаны основные этапы построения трехмерной сетки конечно-элементного разбиения. Первым этапом этого алгоритма является построение методом исчерпывания двумерной сетки треугольников для основания дискретизируемой области. Программная реализация метода во многом основана на описанном выше алгоритме, адаптированном под внутреннее представление данных комплекса Надра-3D.

Заклучение. В работе рассмотрены особенности метода исчерпывания и реализующего его алгоритма, использованные при разработке подсистемы триангуляции слоистых областей программного комплекса Надра-3D.

М.В. Білоус, В.С. Дейнека

ПІДСИСТЕМА ТРИАНГУЛЯЦІЇ ШАРУВАТИХ ТІЛ
ПРОГРАМНОГО КОМПЛЕКСУ НАДРА-3D

Розглянуто особливості методу вичерпування та алгоритму, що його реалізує, використані при розробці підсистеми триангуляції спеціалізованих шаруватих областей програмного комплексу Надра-3D.

M.V. Bilous, V.S. Deineka

NADRA-3D MESH GENERATOR FOR LAYERED REGIONS

Peculiarities and algorithms of advancing-front technique used in Nadra-3D mesh generator for layered regions are considered.

1. *Joe F. Thompson, Bharat K. Sony, Nigel P. Weatherill, editors* Handbook of grid generation. – Boca Raton London, New York Washington: D.C.: CRC Press., 1999. – 1096 p.
2. *Frey P.J., George P.L.* Mesh Generation. Application to Finite Elements. – Oxford, Paris: Hermes Science Publishing, 2000. – 816 p.
3. *Галанин М.П., Щеглов И.А.* Разработка и реализация алгоритмов трехмерной триангуляции сложных пространственных областей: прямые методы. – М.: РАН, Ин-т прикладной математики им. М.В. Келдыша, 2006. – 32 с.
4. *Галанин М.П., Щеглов И.А.* Разработка и реализация алгоритмов трехмерной триангуляции сложных пространственных областей: итерационные методы. – М.: РАН, Ин-т прикладной математики им. М.В. Келдыша, 2006. – 32 с.
5. *Белоус М.В., Дейнека В.С.* Использование программного комплекса Надра-3D для моделирования регионального режима фильтрации воды // Компьютерная математика. – 2010. – № 1. – С. 35–42.

Получено 15.12.2010

Об авторах:

Дейнека Василий Степанович,

доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН Украины,
заведующий отделом Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины,
e-mail vdineka@ukr.net

Белоус Максим Владимирович,

научный сотрудник Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.
e-mail maksbilous@ukr.net