КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 517.9:519.3

В.Е. КАПУСТЯН, И.С. ЛАЗАРЕНКО

ОПТИМАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ СОСРЕДОТОЧЕННЫМ УПРАВЛЕНИЕМ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Рассмотрена задача оптимальной стабилизации сосредоточенным управлением для задачи Самарского – Ионкина в специальных нормах. Для разделенного управления найдено приближенное решение.

Введение. В работе [1] для одномерного уравнения теплопроводности с нелокальными краевыми условиями исследованы некоторые задачи с минимальной энергией, близкие по постановке к аналогичным задачам с локальными краевыми условиями [2]. При этом существенно используется представление классического решения краевой задачи в виде ряда по биортогональным системам Рисса и специальный вид нормы функций, эквивалентной L_2-норме. Последнее дало возможность в случае распределенного управления получить полное решение задачи с минимальной энергией. В работе [3] для вышеуказанных краевых задач для распределенного управления и специального критерия качества построено и обосновано решение задач оптимальной стабилизации.

В данной работе задача оптимальной стабилизации из [3] исследуется для разделенного управления, т. е. управления, зависящего только от времени.

Постановка задачи. Формальное решение. Пусть процесс описывается функцией $y(x,t)$, которая удовлетворяет краевой задаче

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+g(x)p(t), \quad (x,t)\in \Pi, \qquad (1)$$

$$y(x,t_0)=\varphi(x),\ 0\le x\le 1, \qquad (2)$$

$$y(0,t)=0,\ \frac{\partial y(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial y(1,t)}{\partial x}\ t>t_0, \tag{3}$$

где $g(x)$ – фиксированная функция, $p(t)$ – управление.

Для краевой задачи (1) – (3) рассмотрим задачу оптимальной стабилизации: найти такое управление $p^*[y^*]$ (по принципу обратной связи), которое доставляет наименьшее значение критерию качества

$$J(p) = 0.5\int_{t_0}^{\infty}\left(\|y(.,t)\|_D^2 + p^2(t)\right)dt, \qquad (4)$$

где
$$\|y(.,t)\|_D^2 = \sum_{k=0}^{\infty} y_k^2(t),\ y_j = \int_0^1 y(x,t)Y_j(x)dx,$$

$$y(x,t) = y_0(t)X_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty}(y_{2k-1}(t)X_{2k-1}(x) + y_{2k}(t)X_{2k}(x)),$$

системы функций W_0, R_0 являются биортогональными базисами Рисса в $L_2(0,1)$.

$$W_0 = \{X_0(x) = x,\ X_{2k-1}(x) = x\cos(2\pi kx),\ X_{2k}(x) = \sin(2\pi kx),\ k > 0\},$$

$$R_0 = \{Y_0(x) = 2, Y_{2k-1}(x) = 4\cos(2\pi kx), Y_{2k}(x) = 4(1-x)\sin(2\pi kx),\ k > 0\}.$$

Тогда критерий (4) представим в виде

$$J(p) = 0.5\int_{t_0}^{\infty}\left(y_0^2(t) + \sum_{k=1}^{\infty}(\Upsilon_k(t))'\Upsilon_k(t) + p^2(t)\right)dt, \qquad (5)$$

где функция $y_0(t)$ и вектор-функции $\left(\Upsilon_k(t)\right)' = \left(y_{2k-1}(t),\ y_{2k}(t)\right)$ определяются как решения задач Коши

$$\dot{y}_0(t) = g_0 p(t),\ y_0(t_0) = \phi_0; \qquad (6)$$

$$\dot{\Upsilon}_k(t) = \widehat{A}_k\Upsilon_k(t) + PG_k p(t),\ \Upsilon_k(t_0) = \Phi_k, \qquad (7)$$

причем,

$$\widehat{A}_k = \begin{pmatrix} -\lambda_k & 0 \\ -2\sqrt{\lambda_k} & -\lambda_k \end{pmatrix},\ \lambda_k = (2\pi k)^2,\ (\Phi_k)' = (\phi_{2k-1}, \phi_k).$$

Стандартно [2] определим функционал Белмана для задачи (5) – (7):

$$B[y(.,t)] = 0.5\min_{p(\tau)}\left(\int_t^{\infty}\left(y_0^2(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty}\Upsilon_k'(\tau)\Upsilon_k(\tau) + p^2(\tau)\right)d\tau\right). \qquad (8)$$

Функционал (8) удовлетворяет уравнению

$$y_0^2(t) + \sum_{k=1}^{\infty}\Upsilon_k'(t)\Upsilon_k(t) - \left(\frac{\partial B[y(.,t)]}{\partial y_0}g_0 + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\nabla_{\Upsilon_k}B[y(.,t)]\right)'G_k\right)^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\nabla_{\Upsilon_k}B[y(.,t)]\right)'\widehat{A}_k\Upsilon_k(t) = 0, \qquad (9)$$

а оптимальное управление имеет вид

$$p[y(.,t)] = -\frac{\partial B[y(.,t)]}{\partial y_0} g_0 - \sum_{l=1}^{\infty} (\nabla_{\Upsilon_l} B[y(.,t)])' G_l. \tag{10}$$

Решение уравнения (9) будем искать в виде квадратичной формы

$$B[y(.,t)] = 0.5\, K_0 y_0^2(t) + y_0(t) \sum_{k=1}^{\infty} K'_{0,k} \Upsilon_k(t) + 0.5 \sum_{k,j=1}^{\infty} \Upsilon'_k(t) K_{k,j} \Upsilon_j(t).$$

$$K'_{0,k} = (K_{0,2k-1}, K_{0,2k});$$

$$K_{k,j} = \begin{pmatrix} K_{2k-1,2j-1} & K_{2k-1,2j} \\ K_{2k,2j-1} & K_{2k,2j} \end{pmatrix}, \quad K_{k,j} = K'_{j,k},\ j \neq k;\ K_{k,k} = K'_{k,k}.$$

Тогда оптимальное управление (10) принимает вид

$$p[y(.,t)] = -g_0(\,K_0 y_0(t) + y_0(t) \sum_{k=1}^{\infty} K'_{0,k} \Upsilon_k(t)) -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} (y_0 K'_{0,k} + \sum_{k=1}^{\infty} \Upsilon'_j(t) K_{j,k}) G_k, \tag{11}$$

где число K_0, векторы $K_{0,k}$ и матрицы $K_{j,k}$ определяются из системы:

$$1 - K_0^2 g_0^2 - 2 g_0 K_0 \sum_{j=1}^{\infty} K'_{0,j} G_j - \left(\sum_{j=1}^{\infty} K'_{0,j} G_j \right)^2 = 0, \tag{12}$$

$$g_0^2 K_0 K_{0,k} + g_0 K_{0,k} \sum_{j=1}^{\infty} K'_{0,j} G_j + g_0 K_0 \sum_{j=1}^{\infty} K_{k,j} G_j +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} K_{k,j} G_j \sum_{j=1}^{\infty} K'_{0,j} G_j \hat{-} \widehat{\hat{A}}'_k K_{0,k} = 0, \tag{13}$$

$$E\delta_{k,j} - g_0^2 K_{0,k} K'_{0,j} - 2 g_0 K_{0,k} \sum_{i=1}^{\infty} G'_i K_{i,j} - \sum_{i,l=1}^{\infty} K_{k,i} G_i G'_l K_{l,j} + K_{k,j} \widehat{\hat{A}}_j +$$

$$+ \widehat{\hat{A}}'_k K_{k,j} = 0, \tag{14}$$

где E – двумерная единичная матрица.

Значение критерия качества на управлении (5) принимает вид

$$J(p) = B[\phi(.)]. \tag{15}$$

Рассмотрим упрощенный вариант рассматриваемой задачи, полагая, что

$$g_0 = 2 \int_0^1 g(x) dx = 0, \quad \phi_0 = 2 \int_0^1 \phi(x) dx = 0. \tag{16}$$

Тогда блочная бесконечномерная система нелинейных уравнений типа Риккати (12) – (14) принимает вид

$$E\delta_{k,j} - \sum_{i,l=1}^{\infty} K_{k,i} G_i G_l' K_{l,j} + K_{k,j}\,\hat{A}_j + \hat{A}_k'\,K_{k,j} = 0. \tag{17}$$

Положим $\Re_k = \sum_{i=1}^{\infty} K_{k,i} G_i$, где $\Re_k' = (R_{2k-1}, R_k)$ – двумерный числовой вектор. Решая уравнение (17) как линейное уравнение Ляпунова. Находим

$$K_{k,j} = \int_0^{\infty} [\exp(\hat{A}_k' t)(E\delta_{k,j} - \Re_k \Re_j')\exp(\hat{A}_j' t)]dt, \tag{18}$$

где

$$\exp(\hat{A}_j t) = \exp(-\lambda_j t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2\sqrt{\lambda_j}t & 1 \end{pmatrix}, \exp(\hat{A}_k' t) = \exp(-\lambda_k t)\begin{pmatrix} 1 & -2\sqrt{\lambda_j}t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя интегралы в правой части уравнения (18), получаем

$$K_{k,j} = \delta_{k,j}\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_k+\lambda_j} + \frac{8\lambda_k^{1/2}\lambda_j^{1/2}}{(\lambda_k+\lambda_j)^3} & -\frac{2\lambda_k^{1/2}}{(\lambda_k+\lambda_j)^2} \\ -\frac{2\lambda_j^{1/2}}{(\lambda_k+\lambda_j)^2} & \frac{1}{\lambda_k+\lambda_j} \end{pmatrix} -$$

$$-\begin{pmatrix} \frac{R_{2k-1}R_{2j-1}}{\lambda_k+\lambda_j} - \frac{2\lambda_j^{1/2}R_{2k-1}R_{2j}}{(\lambda_k+\lambda_j)^2} - \frac{2R_{2k}R_{2j-1}\lambda_k^{1/2}}{(\lambda_k+\lambda_j)^2} + \frac{8R_{2k}R_{2j}\lambda_k^{1/2}\lambda_j^{1/2}}{(\lambda_k+\lambda_j)^3} & \frac{R_{2k-1}R_{2j}}{\lambda_k+\lambda_j} - \frac{2\lambda_k^{1/2}R_{2j}R_{2k}}{(\lambda_k+\lambda_j)^2} \\ \frac{R_{2j-1}R_{2k}}{\lambda_k+\lambda_j} - \frac{2\lambda_j^{1/2}R_{2j}R_{2k}}{(\lambda_k+\lambda_j)^2} & \frac{R_{2k}R_{2j}}{\lambda_k+\lambda_j} \end{pmatrix}.$$

Умножая последние уравнения справа на вектор G_j и суммируя результат, определим компоненты векторов $\Re_k$ и числовые последовательности

$$R_{2k-1} = \left(\frac{1}{2\lambda_k} + \frac{1}{\lambda_k^2}\right)g_{2k-1} - \frac{1}{2\lambda_k^{3/2}}g_{2k} - \sum_{j=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{R_{2k-1}R_{2j-1}}{\lambda_k+\lambda_j} - \frac{2\lambda_j^{1/2}R_{2k-1}R_{2j}}{(\lambda_k+\lambda_j)^2} - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{2R_{2k}R_{2j-1}\lambda_k^{1/2}}{(\lambda_k+\lambda_j)^2} + \frac{8R_{2k}R_{2j}\lambda_k^{1/2}\lambda_j^{1/2}}{(\lambda_k+\lambda_j)^3}\right]g_{2j-1} +$$

$$\left. + \left[\frac{R_{2k-1}R_{2j}}{\lambda_k+\lambda_j} - \frac{2\lambda_k^{1/2}R_{2j}R_{2k}}{(\lambda_k+\lambda_j)^2}\right]g_{2j}\right\}. \tag{19}$$

$$R_{2k} = -\frac{1}{2\lambda_k^{3/2}} g_{2k-1} + \frac{1}{2\lambda_k} g_{2k} - R_{2k} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(\frac{R_{2j-1}}{\lambda_k + \lambda_j} - \frac{2\lambda_j^{1/2} R_{2j}}{(\lambda_k + \lambda_j)^2} \right) g_{2j-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{R_{2j}}{\lambda_k + \lambda_j} g_{2j} \right].$$

Определим числовые последовательности

$$\gamma_k^{(1)} = \sum_{j=1}^{\infty} \left[R_{2j-1} \frac{g_{2j-1}}{\lambda_k + \lambda_j} + R_{2j} \left(\frac{g_{2j}}{\lambda_k + \lambda_j} - \frac{2\lambda_j^{1/2} g_{2j-1}}{(\lambda_k + \lambda_j)^2} \right) \right],$$

$$\gamma_k^{(2)} = \sum_{j=1}^{\infty} \left[R_{2j-1} \frac{g_{2j-1}}{(\lambda_k + \lambda_j)^2} + R_{2j} \left(\frac{g_{2j}}{(\lambda_k + \lambda_j)^2} - \frac{4 g_{2j-1} \lambda_j^{1/2}}{(\lambda_k + \lambda_j)^3} \right) \right].$$

Тогда система (19) принимает вид

$$R_{2k-1} = \frac{f_k^{(1)}}{1 + \gamma_k^{(1)}} + \frac{2\lambda_k^{1/2} f_k^{(2)} \gamma_k^{(2)}}{(1 + \gamma_k^{(1)})^2}, \quad R_{2k} = \frac{f_k^{(2)}}{1 + \gamma_k^{(1)}},$$

где

$$f_k^{(1)} = \left(\frac{1}{2\lambda_k} + \frac{1}{\lambda_k^2} \right) g_{2k-1} - \frac{1}{2\lambda_k^{3/2}} g_{2k}, \quad f_k^{(2)} = -\frac{1}{2\lambda_k^{3/2}} g_{2k-1} + \frac{1}{2\lambda_k} g_{2k},$$

а числа $\gamma_k^{(j)}, \quad j = \overline{1, 2}$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\gamma_k^{(1)} = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(\frac{f_j^{(1)}}{1 + \gamma_j^{(1)}} + \frac{2\lambda_j^{1/2} f_j^{(2)} \gamma_j^{(2)}}{(1 + \gamma_j^{(1)})^2} \frac{g_{2j-1}}{\lambda_k + \lambda_j} + \right) \right.$$

$$\left. + \frac{f_j^{(2)}}{1 + \gamma_j^{(1)}} \left(\frac{g_{2j}}{\lambda_k + \lambda_j} - \frac{2\lambda_j^{1/2} g_{2j-1}}{(\lambda_k + \lambda_j)^2} \right) \right],$$

$$\gamma_k^{(2)} = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(\frac{f_j^{(1)}}{1 + \gamma_j^{(1)}} + \frac{2\lambda_j^{1/2} f_j^{(2)} \gamma_j^{(2)}}{(1 + \gamma_j^{(1)})^2} \right) \frac{g_{2j-1}}{(\lambda_k + \lambda_j)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{f_j^{(2)}}{1 + \gamma_j^{(1)}} \left(\frac{g_{2j}}{(\lambda_k + \lambda_j)^2} - \frac{4\lambda_j^{1/2} g_{2j-1}}{(\lambda_k + \lambda_j)^3} \right) \right]. \tag{20}$$

В общем случае система (20) достаточно сложная для исследования. Поэтому далее рассмотрим ее упрощение. Положим, что функция $g(x)$ такова, что $g_{2k-1} = 0$, $k = \overline{1, \infty}$. В частности, это могут быть функции, нечетные относительно точки $x = 0.5$. Тогда система (20) распадается на две системы:

$$\gamma_k^{(1)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_{2j}^2}{2\lambda_j (1+\gamma_j^{(1)})(\lambda_k + \lambda_j)}, \tag{21}$$

$$\gamma_k^{(2)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_{2j}^2}{2\lambda_j (1+\gamma_j^{(1)})(\lambda_k + \lambda_j)^2}, \, k = 1, \dots . \tag{22}$$

Система (21) по форме совпадает с соответствующей системой для задач оптимальной стабилизации для параболических уравнений с локальными краевыми условиями [4]. Поэтому указанная система имеет единственное решение, для которого имеет место оценка

$$0 < \gamma_{k+1}^{(1)} < \gamma_k^{(1)} < \frac{\|g\|_{C(0,1)}^2}{2\pi^4 k^2}, \; k = 1, \dots . \tag{23}$$

Тогда для элементов последовательности $\left\{\gamma_k^{(2)}\right\}$ справедливы оценки

$$0 < \gamma_{k+1}^{(2)} < \gamma_k^{(2)} < \frac{\|g\|_{C(0,1)}^2}{8\pi^6 k^4}, \; k = 1, \dots . \tag{24}$$

При элементах вектора $\Re_k$ принимают вид

$$R_{2k-1} = \left(-\frac{1}{2\lambda_k^{3/2}(1+\gamma_k^{(1)})^2} + \frac{\gamma_k^{(2)}}{\lambda_k^{1/2}(1+\gamma_k^{(1)})^2} \right) g_{2k}, \quad R_{2k} = \frac{g_{2k}}{2\lambda_k (1+\gamma_k^{(1)})}.$$

Тогда для функционала $B[y(.,t)]$ имеет место представление

$$B[y(.,t)] = 0.5\sum_{i=1}^{4} W_i[y(.,t)] = 0.5\sum_{k,j}^{\infty} [K_{2k-1,2j-1} y_{2k-1}(t) y_{2j-1}(t) +$$

$$+ K_{2k-1,2j} y_{2k-1}(t) y_{2j}(t) + K_{2k,2j-1} y_{2k}(t) y_{2j-1}(t) + K_{2k,2j} y_{2k}(t) y_{2j}(t)].$$

Обоснование формальных решений. Покажем, что квадратичная форма $B[y(.,t)] : l_2 \times l_2 \to R$ является положительно определенной. Для этого нам необходимы следующие оценки:

$$W_4[y(.,t)] \geq \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_{2k}^2(t)}{\lambda_k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_{2k}^2(t)\gamma_k^{(1)}}{\lambda_k (1+\gamma_k^{(1)})} \right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_{2k}^2(t)}{\lambda_k (1+\gamma_k^{(1)})} > 0.$$

Потребуются вспомогательные оценки для элементов последовательностей $\{R_{2k-1}\}$ и $\{R_{2k}\}$. Из определения этих элементов следует, что $R_{2k-1} = w_k R_{2k}$, где

$$w_k = \frac{2\lambda_k \gamma_k^{(2)} - 1 - \gamma_k^{(1)}}{\lambda_k^{1/2}(1+\gamma_k^{(1)})}.$$

Так как $\gamma_k^{(2)} < \lambda_k^{-1}\gamma_k^{(1)}$, то $|w_k| = \dfrac{\left|2\lambda_k \gamma_k^{(2)} - 1 - \gamma_k^{(1)}\right|}{\lambda_k^{1/2}(1+\gamma_k^{(1)})} < \dfrac{\left|\gamma_k^{(1)} - 1\right|}{\lambda_k^{1/2}(1+\gamma_k^{(1)})} < \lambda_k^{-1/2}$.

$$W_3[y(.,t)] + W_2[y(.,t)] > -\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\lambda_k^{3/2}} + \frac{3}{2\lambda_k^{3/2}}\frac{\gamma_k^{(1)}}{(1+\gamma_k^{(1)})}\right) y_{2k-1}^2(t) -$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\lambda_k^{3/2}} + \frac{3}{2\lambda_1^{1/2}\lambda_k}\frac{\gamma_k^{(1)}}{(1+\gamma_k^{(1)})}\right) y_{2k}^2(t).$$

Оценку для $W_1[.]$ получим, выполняя следующее сравнение элементов:

$$W_{1,1}[y(.,t)] \ge \sum_{k=1}^{\infty}\frac{y_{2k-1}^2(t)}{\lambda_k^2} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{y_{2k-1}^2(t)\gamma_k^{(1)}}{\lambda_k^2(1+\gamma_k^{(1)})}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{y_{2k-1}^2(t)}{\lambda_k^2(1+\gamma_k^{(1)})} > 0;$$

$$W_{1,2}[y(.,t)] > \sum_{k=1}^{\infty}\frac{y_{2k-1}^2(t)}{2\lambda_k} - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_k} + \frac{3}{\lambda_k^2} + \frac{1}{\lambda_k^3}\right) y_{2k-1}^2(t)\frac{\gamma_k^{(1)}}{1+\gamma_k^{(1)}},$$

причем,

$$W_1[y(.,t)] = W_{1,1}[y(.,t)] + W_{1,2}[y(.,t)]$$

$$B[y(.,t)] > \sum_{k=1}^{\infty}\frac{y_{2k-1}^2(t)}{2}\left(\frac{1}{\lambda_k^2} + \frac{1}{2\lambda_k} - \frac{1}{2\lambda_k^{3/2}} - \left(\frac{1}{\lambda_k} + \frac{3}{\lambda_k^2} + \frac{1}{\lambda_k^3}\right)\frac{\gamma_k^{(1)}}{1+\gamma_k^{(1)}}\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{y_{2k}^2(t)}{2}\left(\frac{1}{2\lambda_k} - \frac{1}{2\lambda_k^{3/2}} - \left(\frac{1}{2\lambda_k} + \frac{3}{2\lambda_k^{1/2}\lambda_k}\right)\frac{\gamma_k^{(1)}}{1+\gamma_k^{(1)}}\right). \qquad (25)$$

Замечание. Оценка (25) не является наилучшей. Так как не обеспечивает положительной определенности функционала $B[.]$ при произвольной функции g, которая имеет нулевые коэффициенты Фурье по системе R_0. Это связано с методом оценивания квадратичной формы $B[.]$ в бесконечномерном пространстве •

Выделим условия на функцию g, при которых указанная положительная определенность функционала $B[.]$ имеет место. Из систем (25) и (23) получаем

$$B[y(.,t)] > \sum_{k=1}^{\infty}\frac{y_{2k-1}^2(t)}{2}\left(a_{k,1} - a_{k,2}\|g\|_{C(0,1)}^2\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{y_{2k}^2(t)}{2}\left(b_{k,1} - b_{k,2}\|g\|_{C(0,1)}^2\right),$$

где

$$a_{k,1} = \frac{1}{\lambda_k^2} + \frac{1}{2\lambda_k} - \frac{1}{2\lambda_k^{3/2}}, \quad a_{k,2} = \frac{1}{\lambda_k} + \frac{3}{\lambda_k^2} + \frac{1}{\lambda_k^3},$$

$$b_{k,1} = \frac{1}{2\lambda_k} - \frac{1}{2\lambda_k^{3/2}}, \quad b_{k,2} = \frac{1}{2\lambda_k} + \frac{3}{2\lambda_k^{1/2}\lambda_k}.$$

Вышеописанное неравенство будет справедливым, если

$$\|g\|^2_{C(0,1)} \le \min_{k\ge 1} \min\left\{\frac{a_{k,1}}{a_{k,2}}, \frac{b_{k,1}}{b_{k,2}}\right\}.$$

Так как функции $a_{k,1} / a_{k,2}$, $b_{k,1} / b_{k,2}$ монотонно возрастающие относительно λ_k, то неотрицательность правой части неравенства реализуется при $k = 1$, т. е.

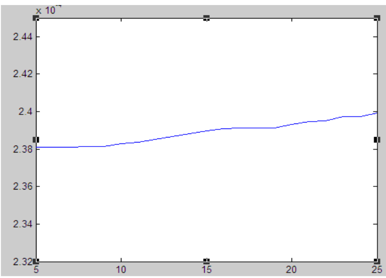
$$\|g\|^2_{C(0,1)} \le \min\left\{\frac{a_{1,1}}{a_{1,2}}, \frac{b_{1,1}}{b_{1,2}}\right\}.$$

Численные эксперименты. Вернемся к системе (20). Рассмотрим ее конечномерную аппроксимацию, т. е.

$$\gamma^{(1)}_{k,N} = \sum_{j=1}^{N}\left[\left(\frac{f_j^{(1)}}{1+\gamma^{(1)}_{j,N}} + \frac{2\lambda_j^{1/2} f_j^{(2)}\gamma^{(2)}_{j,N}}{(1+\gamma^{(1)}_{j,N})^2}\right)\frac{g_{2j-1}}{\lambda_k+\lambda_j} + \right.$$
$$\left. + \frac{f_j^{(2)}}{1+\gamma^{(1)}_{j,N}}\left(\frac{g_{2j}}{\lambda_k+\lambda_j} - \frac{2\lambda_j^{1/2} g_{2j-1}}{(\lambda_k+\lambda_j)^2}\right)\right],$$

$$\gamma^{(2)}_{k,N} = \sum_{j=1}^{N}\left[\left(\frac{f_j^{(1)}}{1+\gamma^{(1)}_{j,N}} + \frac{2\lambda_j^{1/2} f_j^{(2)}\gamma^{(2)}_{j,N}}{(1+\gamma^{(1)}_{j,N})^2}\right)\frac{g_{2j-1}}{(\lambda_k+\lambda_j)^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{f_j^{(2)}}{1+\gamma^{(1)}_{j,N}}\left(\frac{g_{2j}}{(\lambda_k+\lambda_j)^2} - \frac{4\lambda_j^{1/2} g_{2j-1}}{(\lambda_k+\lambda_j)^3}\right)\right],$$

$$k = \overline{1, N}. \tag{27}$$



РИСУНОК

Решение системы (27) будем искать методом простой итерации.

Для функции $g(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$ значения квадратичной формы $B[.]$ при $N = \overline{5, 25}$ графически показаны на рисунке.

В.О. Капустян, І.С. Лазаренко

ОПТИМАЛЬНА СТАБІЛІЗАЦІЯ ЗОСЕРЕДЖЕНИМ КЕРУВАННЯМ РОЗВ'ЯЗКІВ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З НЕЛОКАЛЬНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

Розглядається задача оптимальної стабілізації зосередженим керуванням для задачі Самарського – Іонкіна в спеціальних нормах. Для розділеного керування знайдено наближений розв'язок.

V.O. Kapustyan, I.S. Lazarenko

OPTIMAL STABILIZATION BY CONCENTRATED CONTROL OF SOLUTIONS OF PARABOLIC EQUATIONS WITH NONLOCAL BOUNDARY-VALUE CONDITIONS

A problem of optimal stabilization by concentrated control for the Samarsky–Ionkin problem in specific norms is considered. For separated control, an approximate solution was found.

1. *Капустян В.Е., Лазаренко И.С.* Задачи с минимальной энергией для параболических уравнений с нелокальными краевыми условиями // Вісн. Дніпропетровського ун-ту. Сер. Моделювання. – 2009. – Вип. 1. – **17**, № 8. – С. 47–60.
2. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. – М.: Наука, 1978. – С. 463.
3. *Капустян В.Е., Лазаренко И.С.* Оптимальная стабилизация распределенным управлением решении параболических уравнений с нелокальными краевыми условиями // Компьютерная математика. – 2010. – № 2. – С. 149–155.
4. *Белозеров В.Е., Капустян В.Е.* Геометрические методы модального управления. – Киев: Наук. думка, 1999. – 260 с.

Получено 07.04.2011

Об авторах:

Капустян Владимир Емельянович,
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического моделирования экономических систем НТУ Украины «КПИ»,
e-mail: kapustyanv@ukr.net

Лазаренко Ирина Сергеевна,
ассистент кафедры математического моделирования экономических систем НТУ Украины «КПИ».
e-mail: irynalazar@gmail.com