КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.6

О.Н. ЛИТВИН, Е.В. ЯРМОШ

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИИ $f(x,y)$ СУММАМИ ВИДА $\varphi_0(x)\psi_0(y)+\ldots+_N\ \varphi(x)\psi_N(y)$

Сформулированы и доказаны теоремы, касающиеся свойств операторов приближения функции $f(x,y)$ суммами вида $\varphi_0(x)\psi_0(y)+\ldots+\varphi_N(x)\psi_N(y)$ в норме $L_2[0,1]^2$. В частности, исследован случай, когда оператор приближения имеет вид $(A_1+A_2-A_1A_2)f(x,y)$, где $A_1f(x,y)$, $A_2f(x,y)$ — операторы приближения $f(x,y)$ в норме $L_2[0,1]$ по переменным x и y, соответственно.

Введение. Задача приближения функции двух переменных $f(x,y)$ суммами $\varphi_0(x)\psi_0(y)+\ldots+_N\ \varphi(x)\psi_N(y)$ возникает, например, при решении интегральных уравнений – замена ядра $G(x,y)$ интегрального уравнения $y(x)=\lambda\int_a^b G(x,t)y(t)dt+f(x)$ указанной суммой дает возможность найти решение уравнения в аналитической форме. В теории и практике решения краевых задач широко используется классический метод разделения переменных, представляющий решение предельной задачи в виде ряда

$$\varphi_0(x)\psi_0(y)+\ldots+\varphi_N(x)\psi_N(y)+\ldots.$$

В работах М.– Б.А. Бабаева [1], В.В. Поспелова [2], В.Н. Темлякова [3], М.Р. Шура-Бура [4] и других рассматривалось нахождение наилучшего приближения $f(x,y)$ из заданных классов с помощью сумм произведений функций одной переменной.

Постановка задачи. В работе [5] получены формулы для нахождения функций $\varphi_k(x)$, $\psi_l(y)$, $k,l=\overline{0,N}$ и неизвестных постоянных $C_{k,l}$, где B_N – класс функций вида

$$Z(x,y)=\sum_{k=0}^{N}\varphi_k(y)h_{1,k}(x)+$$

$$+\sum_{l=0}^{N}\psi_l(x)h_{2,l}(y)-\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}C_{k,l}h_{1,k}(x)h_{2,l}(y), \quad (1)$$

$$J(Z)=\| f(x,y)-Z(x,y)\|_{L_2[0,1]^2}\to\min_{Z\in B_N}. \quad (2)$$

При этом считается, что $h_{1,k}$ и $h_{2,l}$ – заданная система линейно независимых функций; функции $\varphi_k(y)$, $\psi_l(x)$ и постоянные $C_{k,l}$ считаются неизвестными.

То есть, эти неизвестные должны находиться путем решения следующей минимизационной задачи:

$$J(Z)=\int_0^1\int_0^1[f(x,y)-Z(x,y)]^2\,dxdy\to\min_{\varphi_k,\psi_l,C_{k,l}}. \qquad (3)$$

В результате доказана теорема.

Теорема 1. (О.Н. Литвин, [5]). Единственное решение задачи (3) имеет вид:

$$Z^*(x,y)=h_1(x)B_1^{-1}F_1^T(y)+F_2(x)B_2^{-1}h_2^T(y)-h_1(x)B_1^{-1}FB_2^{-1}h_2^T(y), \qquad (4)$$

где

$$h_1(x)=\left[h_{1,0}(x),...,h_{1,N}(x)\right],\ h_2(y)=\left[h_{2,0}(y),...,h_{2,N}(y)\right],$$

$$F=\iint_G h_1^T(x)f(x,y)h_2(y)dx;\ F_1^T(y)=\int_0^1 h_1^T(x)f(x,y)dx,$$

$$F_2(x)=\int_0^1 f(x,y)h_2(y)dy,\ B_1=\int_0^1 h_1^T(x)h_1(x)dx,\ B_2=\int_0^1 h_2^T(y)h_2(y)dy.$$

Изложение основного материала. В данной работе сформулировано и доказано ряд теорем относительно иного представления $Z^*(x,y)$, которые разрешают оценить погрешность приближения $f(x,y)$ с помощью $Z^*(x,y)$.

Теорема 2. Если система функций $\varphi_k(y)$, $k=\overline{0,N}$, $\varphi(y)=[\varphi_0(y),...,\varphi_N(y)]$ находится из условия:

$$JX(\varphi)=\int_0^1\left[f(x,y)-\sum_{k=0}^N\varphi_k(y)h_{1,k}(x)\right]^2dx\to\min_{\varphi_k(y)}, \qquad (5)$$

т. е. $\varphi^T(y)=B_1^{-1}F_1(y)$ и система функций $\psi_l(x)$, $l=\overline{0,N}$, $\psi(x)=[\psi_0(x),...,\psi_N(x)]$ находятся из условия:

$$JY(\psi)=\int_0^1\left[f(x,y)-\sum_{l=0}^N\psi_l(x)h_{2,l}(y)\right]^2dy\to\min_{\psi_l(x)}, \qquad (6)$$

т. е. $\psi(x)=F_2(x)B_2^{-1}$, то формула для $Z^*(x,y)$ может быть представлена в виде:

$$Z^*(x,y)=A_1f(x,y)+A_2f(x,y)-A_1A_2f(x,y), \qquad (7)$$

где операторы A_1, A_2 определяются формулами:

$$A_1f(x,y)=h_1(x)\varphi^T(y)=h_1(x)B_1^{-1}F_1^T(y),$$

$$A_2f(x,y)=\psi(x)h_2^T(y)=F_2(x)B_2^{-1}h_2^T(y),\ A_1A_2f(x,y)=h_1(x)B_1^{-1}FB_2^{-1}h_2^T(y).$$

Доказательство. Из этого вытекает, что операторы $A_1 f(x,y)$ и $A_2 f(x,y)$ являются перестановочными один с другим $A_1A_2 f(x,y) = A_2A_1 f(x,y)$:

$$A_1 f(x,y) = h_1(x)B_1^{-1}\int_0^1 h_1^T(x) f(x,y)dx\,,\;\; A_2 f(x,y) = \int_0^1 f(x,y)h_2(y)dyB_2^{-1}h_2^T(y)\,,$$

$$A_1A_2 f(x,y) = h_1(x)B_1^{-1}\int_0^1 h_1^T(x)\left[A_2 f(x,y)\right]dx =$$

$$= h_1(x)B_1^{-1}\left[\int_0^1\int_0^1 h_1^T(x) f(x,y)h_2(y)dxdy\right]B_2^{-1}h_2^T(y) = h_1(x)B_1^{-1}FB_2^{-1}h_2^T(y).$$

Теорема 2 доказана.

Замечание. Таким образом, в теореме 2 утверждается, что решение минимизационной задачи (3) можно свести к решению двух одномерных минимизационных задач (5) и (6). То есть формула (4) – формула смешанной аппроксимации функции $f(x,y)$ с использованием метода наименьших квадратов.

Для сравнения приведем формулу для наилучшего приближения в $L_2[0,1]^2$ функции $f(x,y)$ конструкциями вида:

$$Z0(x,y;C) = Z0(x,y) = \sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N} C_{k,l}h_{1,k}(x)h_{2,l}(y) = h_1(x)Ch_2^T(y)\,. \tag{8}$$

Теорема 3. Если в формуле (8) неизвестные постоянные $C_{k,l}$ находить из условия:

$$JXY(Z0) = \int_0^1\int_0^1 \left[f(x,y) - Z0(x,y)\right]^2 dxdy \to \min_{C_{k,l}}\,, \tag{9}$$

то для $Z0(x,y)$ выполняется следующее равенство:

$$Z0(x,y) = Z0f(x,y) = A_1A_2 f(x,y).$$

Доказательство. Для нахождения $C_{k,l}$ из условия (9) получим следующую СЛАУ:

$$\frac{\partial JXY(Z0)}{\partial C_{p,q}} = 0 \Rightarrow$$

$$\int_0^1\int_0^1\left[f(x,y) - \sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N} C_{k,l}h_{1,k}(x)h_{2,l}(y)\right]h_{1,p}(x)h_{2,q}(y)dxdy = 0,\;\; p,q = \overline{0,N}\,.$$

Преобразуем эту систему и запишем в виде

$$\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N} B_{1,p,k}C_{k,l}B_{2,l,q} = F_{p,q},\;\; p,q = \overline{0,N}\,, \tag{10}$$

$$B_{1,p,k} = \int_0^1 h_{1,k}(x) h_{1,p}(x)dx , \qquad B_{2,l,q} = \int_0^1 h_{2,l}(y) h_{2,q}(y)dy,$$

$$F_{p,q} = \int_0^1 \int_0^1 h_{1,p}(x) f(x,y) h_{2,q}(y)dxdy.$$

Таким образом, систему (10) можно записать в виде

$$B_1 C B_2 = F.$$

Отсюда для неизвестной матрицы C получаем

$$C = B_1^{-1} F B_2^{-1}. \tag{11}$$

Таким образом, решение C минимизационной задачи (9) представляется в виде формулы (11), т. е. для функции $Z0(x,y)$ получаем

$$Z0(x,y) = h_1(x) C h_2^T(y) = h_1(x) B_1^{-1} F B_2^{-1} h_2^T(y) = h_1(x) B_1^{-1} F B_2^{-1} h_2^T(y).$$

Учитывая приведенные утверждения теоремы 2, можем записать, что $Z0(x,y) = A_1 A_2 f(x,y)$.

Теорема 3 доказана.

Теорема 4. Погрешность приближения функции $f(x,y)$ с помощью $Z0 f(x,y)$ имеет вид

$$Rf(x,y) = f(x,y) - Z0 f(x,y) = \left(R_1 + R_2 - R_1 R_2\right) f(x,y),$$

где $R_1 f(x,y) = f(x,y) - A_1 f(x,y)$, $R_2 f(x,y) = f(x,y) - A_2 f(x,y)$.

Доказательство. Запишем следующий ряд равенств (I – тождественный оператор):

$$f(x,y) - Z0 f(x,y) = f(x,y) - A_1 A_2 f(x,y) = (I - A_1 A_2) f(x,y) =$$
$$= \left[(I - A_1) + (I - A_2) - (I - A_1)(I - A_2)\right] f(x,y) = (R_1 + R_1 - R_1 R_2) f(x,y) .$$

Теорема 4 доказана.

Теорема 5. Погрешность приближения функции $f(x,y)$ с помощью $Zf(x,y)$, где $Zf(x,y) = Z^*(x,y)$ определяется формулой (4), имеет вид:

$$Rf(x,y) = f(x,y) - Zf(x,y) = R_1 R_2 f(x,y) .$$

Доказательство. Перепишем погрешность приближения так:

$$f(x,y) - Zf(x,y) = (I - (A_1 + A_2 - A_1 A_2)) f(x,y) = \left[(I - A_1) + (I - A_2) - \right.$$
$$\left. - (I - A_1 A_2)\right] f(x,y) = \left\{(I - A_1) + (I - A_2) - \left[(I - A_1) + (I - A_2) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - (I - A_1)(I - A_2)\right]\right\} f(x,y) = \left(I - A_1\right)\left(I - A_2\right) f(x,y) = R_1 R_2 f(x,y).$$

Теорема 5 доказана.

Следствие 1. Предположим, что

$$\max_{0 \le y \le 1} \left| f(x,y) - A_1 f(x,y) \right| = O(\varepsilon) , \; 0 \le x \le 1 ,$$

$$\max_{0 \le x \le 1} \left| f(x,y) - A_2 f(x,y) \right| = O(\varepsilon) , \; 0 \le y \le 1.$$

Тогда для оценки остатка $f(x,y)-Zf(x,y)$ справедлива оценка $\left|f(x,y)-Zf(x,y)\right|=O(\varepsilon^2)\forall(x,y)\in[0,1]^2$.

Исследуем, для каких классов функций предложенный метод будет давать точный ответ.

Теорема 6. Если система линейно-независимых функций $h_{1,k}(x)$, $h_{2,l}(y)$ является системой базисных сплайнов первой степени и является разложением единицы на $[0,1]$, т. е. $\sum_{k=0}^{N} h_{1,k}(x)=1$, $\sum_{l=0}^{N} h_{2,l}(y)=1$, $x\in E$, $y\in E$, то

$$A_1 f(x,y)=f(x,y)\forall f(x,y)=C \text{ и } A_2 f(x,y)=f(x,y)\forall f(x,y)=C, \qquad (12)$$

где C – постоянная.

Доказательство. Положим, не ограничивая общности, $C=1$. Заметим, что

$$A_1 f(x,y)=\sum_{k=1}^{N}\varphi_k(y)h_{1,k}(x)=h_1(x)\varphi^T(y)=h_1(x)B_1^{-1}F_1^T(y).$$

Пусть

$$h_{1,k}(x)=\begin{cases} 0,\ x\le \dfrac{k-1}{N}, \\ Nx-k+1,\ \dfrac{k-1}{N}<x<\dfrac{k}{N}, \\ k+1-Nx,\ \dfrac{k}{N}\le x<\dfrac{k+1}{N}, \\ 0,\ x\ge \dfrac{k+1}{N} \end{cases}. \qquad (13)$$

Если $f(x,y)\equiv 1$, то

$$F_1^T(y)=\left[\int_0^1 f(x,y)h_{1,k}(x)dx\right]_{k=0}^{N}=\left[\int_0^1 h_{1,k}(x)dx\right]_{k=0}^{N},$$

тогда из условия

$$J_1(\phi)=\int_0^1\left[f(x,y)-\sum_{k=0}^{N}\phi_k(y)h_{1,k}(x)\right]^2 dx\to\min_{\phi_k(y)}$$

получим, если $f(x,y)\equiv 1$, $\sum_{k=0}^{N} h_{1,k}(x)\equiv 1,\ 0\le x\le 1$:

$$J_1(\varphi)=\int_0^1\left[1-\sum_{k=0}^{N}\varphi_k(y)h_{1,k}(x)\right]^2 dx\to\min_{\varphi_k(y)}. \qquad (14)$$

Решая минимизационную задачу (14), получаем в матричной форме:

$$B_1\varphi(y)=F_1^T(y)=\left[\frac{1}{2N}\ \ \frac{1}{N}\ \ \ldots\ \ \frac{1}{N}\ \ \frac{1}{2N}\right]^T,$$

где

$$B_1 = \begin{cases} \dfrac{1}{3N}, i = j = 0\ f, \text{или } i = j = N \\ \dfrac{2}{3N}, i = j, i, j = \overline{1, N-1} \\ \dfrac{1}{6N}, |i-j| = 1, i, j = \overline{0, N} \\ 0, |i-j| \geq 2, i, j = \overline{0, N} \end{cases} .$$

Отсюда получаем $\varphi_k(y) = 1$, $k = \overline{0, N}$.

Последнее равенство получено с учетом следующих утверждений: если $\dfrac{k}{N} \leq x \leq \dfrac{k+1}{N}$, то $h_{1,k}(x) = k + 1 - Nx$, $h_{1,k+1}(x) = Nx - k$ и поэтому $h_{1,k}(x) + {}$ $+ h_{1,k+1}(x) \equiv 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{N} h_{1,k}(x) = 1$, $0 \leq x \leq 1$.

Тогда $\varphi_k(y) = 1 \forall k = \overline{0, N} \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{N} \varphi_k(y) h_{1,k}(x) \equiv 1$ и $J_1(\varphi) = 0$.

Теорема 6 доказана.

Следствие 1. $A_k C = C$, $k = 1,2 \Rightarrow (A_1 + A_2 - A_1 A_2) C = C \forall C \in R$.

Доказательство следствия 1 вытекает из того, что из равенств $A_1 C = C$, $A_2 C = C$ получаем

$$A_1 A_2 C = A_1 (A_2 C) = A_1 C = C \Rightarrow (A_1 + A_2 - A_1 A_2) C = \ = C + C - C = C .$$

Теорема 7. В условиях теоремы 6, если $f(x, y) = x$, то $A_1 f(x, y) = f(x, y)$, т. е. $A_1 x = x$.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 6 находим решение минимизационной задачи:

$$J(\varphi) = \int_0^1 \left[x - \sum_{k=0}^{N} \varphi_k(y) h_{1,k}(x) \right]^2 dx \to \min_{\varphi_k(y)}. \qquad (15)$$

Получим

$$B_1 \varphi(y) = F_1^T(y) = \left[\int_0^1 x h_{1,k}(x) dx \right]_{k=\overline{0,N}} ; F_k(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{6N^2}, k = 0 \\ \dfrac{k}{N^2}, 1 \leq k \leq N-1 \\ \dfrac{1}{2N} - \dfrac{1}{6N^2}, k = N \end{cases} .$$

Завершение доказательства утверждения теоремы 7 вытекает из того, что на интервале $\left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right]$ имеем

$$f(x) - \sum_{k=0}^{N} f(x_k) h_{1,k}(x) = x - \sum_{k=0}^{N} \frac{k}{N} h_{1,k}(x) =$$

$$= h_{1,k}(x) \int_{\frac{k}{N}}^{x} f^{''}(t) \frac{\left(\frac{k}{N} - t\right)}{1!} dt + h_{1,k+1}(x) \int_{\frac{k+1}{N}}^{x} f^{''}(t) \frac{\left(\frac{k+1}{N} - t\right)}{1!} dt \equiv 0,$$

поскольку $f^{''}(x) = (x)^{''} = 0$, т. е. $\sum_{k=0}^{N} \frac{k}{N} h_{1,k}(x) \equiv x \;\; 0 \le x \le 1$.

В этом случае $J(\varphi) = 0$, т. е. теорема 7 доказана.

Лемма 1. Если выполняются условия $\sum_{k=0}^{N} h_{1,k}(x) \equiv 1$, $0 \le x \le 1$ и $f(x, y) = Cx$, то $A_1 Cf(x, y) = Cf(x, y)$, т. е. $A_1(Cx) = Cx$.

Доказательство вытекает из утверждений теоремы 7. Если система функций $\varphi_k(y)$, $k = \overline{0, N}$ находится из условия:

$$J = \int_0^1 \left[Cx - \sum_{k=0}^{N} \varphi_k(y) h_{1,k}(x) \right]^2 dx,$$

то получим $B_1 \varphi(y) = \left[\int_0^1 Cx h_{1,p}(x) dx \right]_{p=\overline{0,N}} = C \left[\int_0^1 x h_{1,p}(x) dx \right]_{p=\overline{0,N}}$.

То есть оператор $A_1 f(x, y)$ является линейным $A_1 Cf(x, y) = CA_1 f(x, y)$.

Получаем $\varphi(y) = B_1^{-1} \left[\int_0^1 Cx h_{1,p}(x) dx \right]_{p=\overline{0,N}} = CB_1^{-1} \left[\int_0^1 x h_{1,p}(x) dx \right]_{p=\overline{0,N}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi_k(y) = \frac{Ck}{N}$, $\sum_{k=0}^{N} \frac{Ck}{N} h_{1,k}(x) \equiv Cx$, $0 \le x \le 1$.

Теорема 8. Для двумерного случая получаем

$$(A_1 + A_2 - A_1 A_2)(a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy,$$

где $a_0, a_1, a_2, a_3 = \text{const}$.

Доказательство. Как известно из леммы 1 $A_1(a_0) = a_0$, $A_1(a_1 x) = a_1 x$, $A_1(a_2 y) = a_2 y$, $A_1(a_3 xy) = a_3 xy$. Аналогичные равенства справедливы для оператора A_2. Учитывая, что $A_1(A_2 C) = A_1 C = C$, получаем $A_1 A_2(a_0) = A_1(A_2 a_0) =$

$= A_1 a_0 = a_0$. Аналогично $A_1 A_2(a_1 x) = a_1 x$, $A_1 A_2(a_2 y) = a_2 y$, $(A_1 + A_2 - A_1 A_2) a_3 xy =$ $= a_3 xy + a_3 xy - a_3 xy = a_3 xy$. Поэтому

$$(A_1 + A_2 - A_1 A_2)(a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy) = A_1(a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy) +$$

$$+ A_2(a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy) - A_1 A_2(a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy) =$$

$$= (a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy) + (a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy) - (a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy) =$$

$$= a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy .$$

Теорема 8 доказана.

Вывод. Таким образом, если $h_{1,k}(x)$, $h_{2,l}(y)$ – базисные сплайны первой степени, то $(A_1 + A_2 - A_1 A_2) f(x,y) = f(x,y) \forall f(x,y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy$, $a_0, a_1, a_2, a_3 \in R$.

Пример. Для функции $f(x,y) = \ln((x+a)^2 + (y+b)^2)$, $a = b = 1$, $N = 10$ погрешность приближения имеет порядок $\varepsilon = O(10^{-3})$.

Заключение. Таким образом, в данной статье рассмотрена новая форма представления операторов приближения функции двух переменных конструкциями вида (1), из которой следует, что этот оператор приближения является оператором смешанной аппроксимации. Это позволило доказать теоремы о представлении остатка приближения и сравнить его с классическим приближением двумерными сплайнами.

С использованием рассмотренной формы представления операторов приближения функции двух переменных можно найти эффективное использование при исследовании математических моделей зависимости спроса на образовательные услуги от цены.

Следующим шагом авторы планируют рассмотрение приближения функциями $\sum_{k=0}^{N} \varphi_k(x) \psi_k(y)$ функции $f(x,y)$, заданной в дискретном наборе точек.

О.М. Литвин, О.В. Ярмош

НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЇ $f(x,y)$
СУМАМИ ВИГЛЯДУ $\varphi_0(x)\psi_0(y) + \ldots + \varphi_N(x)\psi_N(y)$

Сформульовано та доведено теореми щодо властивостей операторів наближення функції $f(x,y)$ сумами вигляду $\varphi_0(x)\psi_0(y) + \ldots + \varphi_N(x)\psi_N(y)$ у нормі $L_2[0,1]^2$. Зокрема, досліджено випадок, коли оператор наближення має вигляд $(A_1 + A_2 - A_1 A_2) f(x,y)$, де $A_1 f(x,y)$, $A_2 f(x,y)$ – оператори наближення $f(x,y)$ в нормі $L_2[0,1]^2$ за змінними x та y відповідно.

O.N. Lytvyn, E.V. Iarmosh

AN APPROXIMATION OF THE FUNCTION $f(x, y)$ WITH THE SUMS $\varphi_0(x)\psi_0(y)+\ldots+\varphi_N(x)\psi_N(y)$

Theorems on the properties of operators of function $f(x,y)$ approximation with the sums $\varphi_0(x)\psi_0(y)+\ldots+\varphi_N(x)\psi_N(y)$ in the norm $L_2[0,1]^2$ are formulated and proved. In particular, the case when the approximation operator is of the form $(A_1+A_2-A_1A_2)f(x,y)$, where $A_1 f(x,y)$ and $A_2 f(x,y)$ are approximation operators for $f(x,y)$ in the norm $L_2[0,1]^2$ on variables x and y, respectively, is investigated.

1. *Бабаев М.-Б.А.* Наилучшее приближение функциями меньшего числа переменных // Докл. АН СССР. – 1984. – **279**, № 2. – С. 273–277.
2. *Поспелов В.В.* О приближении функций нескольких переменных произведениями функций одного переменного. – М.: 1978. – 40 с.
3. *Темляков В.Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАМ. – 1986. – **178**. – С. 1–112.
4. *Шура-Бура М.Р.* Аппроксимация функций многих переменных функциями, каждая из которых зависит от одного переменного // Вычислительная математика. – М.: 1957. – № 2. – С. 3–19.
5. *Литвин О.М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків: Основа, 2002. – 544 с.

Получено 15.11.2010

Об авторах:

Литвин Олег Николаевич,
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой
высшей и прикладной математики Украинской инженерно-педагогической академии,
academ@kharkov.ua

Ярмош Елена Витальевна,
аспирантка Украинской инженерно-педагогической академии.
yel_mag@mail.ru