КОМПЬЮТЕРНАЯ
МАТЕМАТИКА

УДК 517.954:532.546

В.М. БУЛАВАЦКИЙ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ КОНСОЛИДАЦИИ ВОДОНАСЫЩЕННЫХ ПОРИСТЫХ СРЕД И НАГРУЖЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Построены новые математические модели процесса фильтрационной консолидации в условиях справедливости закона Дарси, либо закона релаксационной фильтрации. В рамках предложенных моделей изучение динамики процесса фильтрационной консолидации сводится к решению соответствующих краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа, а в случае насыщенности массивов солевыми растворами – системы дифференциального и интегро-дифференциального уравнений.

Введение. Актуальность исследования процессов фильтрационной консолидации в деформируемых насыщенных пористых средах обусловлена их многообразными применениями в различных областях научно-технического прогресса, в частности, при определении деформаций ядер и экранов земляных плотин, определении устойчивости откосов земляных сооружений, в гидротехническом, дорожном, промышленном, гражданском строительстве и др. [1– 4]. В частности, учитывая проблемы охраны окружающей среды важное значение приобретают исследования процессов уплотнения оснований поверхностных накопителей промышленных и бытовых стоков а также других гидротехнических сооружений. То обстоятельство, что на практике нередко указанные накопители заполняются концентрированными солевыми растворами, привело к необходимости поиска и разработки эффективных методик для математического моделирования динамики консолидационных процессов с учетом явления солепереноса и некоторых других факторов [5−10]. К указанным факторам, прежде всего, относятся релаксационные явления, имеющие место для ряда фильтрационных процессов в деформируемой среде и обусловленные различными причинами [6]. В частности, изучение релаксационных эффектов в математических моделях консолидационных процессов диктуется необходимостью учета влияния на процесс сложной внутренней структуры растворов и порового пространства [6–8].

Обоснование необходимости учета влияния массопереноса солей при фильтрационной консолидации в основаниях накопителей промышленных стоков приведено в работах [5, 6, 10]. При этом в цитированных работах построен ряд математических моделей процесса фильтрационной консолидации деформируемых пористых сред с учетом явлений химического осмоса, ползучести грунтового скелета, нелинейной зависимости коэффициента фильтрации среды от концентрации солей в растворе и др. Исследование влияния реологических свойств грунтового скелета на динамику процесса консолидации насыщенных солевыми растворами пористых сред выполнено в [6]. Следует отметить, что для растворов со сложной внутренней структурой (в частности, когда наполнителями шламо- и хвостохранилищ являются растворы с ярко выраженными свойствами неньютоновских жидкостей), важное значение имеет учет релаксационных свойств этих жидкостей [7]. Исследование процесса фильтрационного уплотнения, как процесса в системе с двойной релаксацией: релаксационная фильтрация поровой жидкости в деформируемой релаксационно-сжимаемой пористой среде (что особенно важно при резких и значительных изменениях давления) выполнено в [8]. В работах [10 – 12] исследовалось влияние свойств неизотермичности на динамику процесса фильтрационной консолидации пористого массива, насыщенного солевым раствором.

В настоящей работе реализован новый подход к математическому моделированию консолидационного процесса водонасыщенной пористой среды, базирующийся на отказе от некоторых упрощающих предпосылок, принятых в традиционных [1–5, 13] моделях, что создает условия для повышения степени адекватности моделирования особенностей динамики указанного процесса.

Неклассическая математическая модель процесса фильтрационной консолидации: случай консолидации водонасыщенного пористого массива в условиях закона фильтрации Дарси. В классической теории фильтрационной консолидации водонасыщенных пористых сред [1–4] для пористости $n=\dfrac{e}{1+e}$ (e – коэффициент пористости) имеем соотношение

$$\frac{\partial n}{\partial t}=\frac{1}{(1+e)^2}\frac{\partial e}{\partial t} \tag{1}$$

и принята следующая аппроксимация [1, 2]:

$$\frac{\partial n}{\partial t}\approx\frac{1}{1+\bar{\bar{e}}}\frac{\partial e}{\partial t}\ , \tag{2}$$

где $\bar{\bar{e}}$ – некоторое среднее значение коэффициента пористости.

С учетом соотношения (2) из уравнения неразрывности [2, 3]

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\partial u_x}{\partial x}=0 \tag{3}$$

и фильтрационного закона Дарси [3]:

$$u_x = -k\frac{\partial H}{\partial x}, \tag{4}$$

получаем уравнение классической теории фильтрационной консолидации в виде [1–5]:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = C_\upsilon \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}, \tag{5}$$

где u_x – скорость фильтрации, H – избыточный напор, k – коэффициент фильтрации, C_υ – коэффициент консолидации, определяемый соотношением [1–3]:

$$C_\upsilon = \frac{k\left(1+\bar{\bar{e}}\right)}{a\gamma}$$

(a – коэффициент уплотнения [2], γ – удельный вес жидкости).

Вместо соотношения (2) представляется более адекватной следующая аппроксимация производной пористости из (1):

$$\frac{\partial n}{\partial t} \approx \frac{1}{\left(1+\bar{\bar{e}}\right)\left(1+\bar{e}(t)\right)}\frac{\partial e}{\partial t}, \tag{6}$$

где $\bar{e}(t)$ – среднее значение $e(x, t)$ по геометрической переменной x.

Принимая соотношение (6) вместо (2), с учетом соотношений (3) и (4), получаем уравнение консолидации для избыточного напора в виде

$$\frac{\partial H}{\partial t} = C_\upsilon\left(1+\bar{e}(t)\right)\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}. \tag{7}$$

Пусть имеем случай простейшей компрессионной зависимости даваемый линейным соотношением [1– 4]:

$$e = e_0 - a\left(q-p\right) = e_0 - a\gamma\left(H_0 - H\right), \tag{8}$$

где e_0 – начальное значение коэффициента пористости, $H_0 = \dfrac{q}{\gamma}$ – начальное значение избыточных напоров в жидкости, $q = \text{const}$ – величина мгновенно приложенной к поверхности массива внешней нагрузки, $p = \gamma H$ – поровое давление.

Вычисляя $\bar{e}\left(t\right)$ имеем

$$\bar{e}(t) = \frac{1}{l}\int_0^l\left[e_0 - a\gamma H_0 + a\gamma H(x,t)\right]dx = e_0 - a\gamma H_0 + \frac{a\gamma}{l}\int_0^l H(x,t)dx. \tag{9}$$

Рассматривая грунтовый массив мощности l расположенный на проницаемом основании и деформирующийся под действием мгновенно приложенной к его поверхности нагрузки интенсивности q, имеем следующие краевые условия:

$$H(0,t) = 0, \qquad H(l,t) = 0, \qquad H(x,0) = H_0. \tag{10}$$

Аппроксимируя интеграл в соотношении (9) согласно квадратурной формуле Симпсона, с учетом условий (10), получаем

$$\overline{e}(t) = e_0 - a\gamma H_0 + \frac{2}{3} a\gamma H\left(\frac{l}{2}, t\right) = \kappa + \mu H(x^*, t)\,, \tag{11}$$

где $\kappa = e_0 - a\gamma H_0, \qquad \mu = \dfrac{2}{3} a\gamma, \qquad x^* = l/2.$

Подставляя соотношение (11) в уравнение (7) окончательно получаем

$$\frac{\partial H}{\partial t} = C_\upsilon \left(1 + \kappa + \mu H(x^*, t)\right) \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\,. \tag{12}$$

Нагруженное [14] дифференциальное уравнение (12) может служить основой новой (неклассической) модели процесса фильтрационной консолидации водонасыщенных грунтовых массивов. Соответствующая краевая задача о фильтрационной консолидации водонасыщенного грунтового массива конечной мощности l, расположенного на проницаемом основании и находящегося под действием мгновенно приложенной к его поверхности нагрузки постоянной интенсивности q, сводится в рамках рассматриваемой математической модели к решению в области $(0, l) \times (0, \infty)$ уравнения (12) при условиях (10). Решение этой задачи получим следующим образом.

Вводя обозначение

$$\beta(t) = C_\upsilon \left(1 + \kappa + \mu H(x^*, t)\right) \tag{13}$$

произведем замену переменной согласно соотношения

$$\theta(t) = \int_0^t \beta(\tau) d\tau\,. \tag{14}$$

Тогда краевая задача (12), (10) принимает в новых переменных (x, θ) следующий вид:

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = C_\upsilon \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\,, \tag{15}$$

$$H(0, \theta) = H(l, \theta) = 0, \qquad H(x, 0) = H_0\,. \tag{16}$$

Решая задачу (15), (16) и возвращаясь к переменным (x, t) получаем

$$H(x, t) = \frac{4H_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin\left[\frac{\pi x(2k-1)}{l}\right] \times$$

$$\times \exp\left\{ C_\upsilon \left[\frac{\pi(2k-1)}{l}\right]^2 \left[(1+\kappa)t + \mu u(t)\right] \right\}, \tag{17}$$

где введено обозначение

$$u(t) = \int_0^t H(x^*, \tau)\, d\tau. \tag{18}$$

Отметим, что из соотношения (17) при $\kappa = \mu = 0$ получаем решение рассматриваемой консолидационной задачи в рамках классической математической модели консолидации [1– 4].

Введем следующее обозначение:

$$f(t,u) = \frac{4H_0}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}\exp\left\{C_\upsilon\left[\frac{\pi(2k-1)}{l}\right]^2\left[(1+\kappa)t+\mu u(t)\right]\right\}. \qquad (19)$$

Тогда, с учетом последнего соотношения и того, что $H(x^*, t) = u'(t)$ получаем, положив в (17) $x = x^*$, уравнение $u'(t) = f(t,u)$. Поскольку из (18) следует, что $u(0) = 0$, то рассматриваемая задача сводится к решению следующей задачи Коши:

$$u'(t) = f(t,u), \qquad u(0) = 0. \qquad (20)$$

После решения задачи Коши (20) – решение неклассической задачи консолидации определяется соотношением (17). Для отыскания решения задачи (20) можно воспользоваться, например, методом Пикара [15] согласно которого находим

$$u_k(t) = \int_0^t f(\tau, u_{k-1}(\tau))d\tau, \qquad (21)$$

где $k = 1, 2, \ldots$ – номер итерации.

Пусть $u_0(t) = 0$. Тогда легко подсчитать, что приближение $u_1(t)$ запишется в виде

$$u_1(t) = \int_0^t f(\tau, u_0(\tau))d\tau = \frac{4H_0 l^2}{\pi^3 C_\upsilon(1+\kappa)}\left[\frac{\pi^3}{32} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3}\exp\left(-C_\upsilon(1+\kappa)\left(\frac{\pi(2k-1)}{l}\right)^2 t\right)\right]. \qquad (22)$$

В общем случае решение задачи (20) может быть получено численными методами [16]. Анализ полученных соотношений показывает, что математическое моделирование процесса консолидации деформируемых водонасыщенных пористых сред в рамках неклассической модели приводит к уменьшению величин избыточных напоров в массиве по сравнению с моделированием этого процесса в рамках известной классической модели Терцаги – Флорина [2], что может трактоваться как опосредствованный учет сжимающих воздействий на грунтовый скелет и приводит к повышению степени адекватности предложенной модели реальному консолидационному процессу.

Неклассическая математическая модель процесса консолидации массивов, насыщенных солевыми растворами в условиях релаксационной фильтрации. В условиях релаксационной фильтрации поровой жидкости имеем следующее обобщение закона Дарси на случай фильтрации солевых растворов [7, 12]:

$$u_x + \lambda_1 \frac{\partial u_x}{\partial t} = -k \frac{\partial}{\partial x}\left(H + \lambda_2 \frac{\partial H}{\partial t} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial x}\left(C + \lambda_1 \frac{\partial C}{\partial t} \right), \tag{23}$$

где λ_1, λ_2 – параметры релаксации скорости и давления соответственно, H – избыточный напор, C – концентрация солей в растворе.

Уравнение неразрывности с учетом (3), (1), (6), (8) запишем в виде

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{k}{C_\upsilon} \frac{1}{1+\overline{e}(t)} \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \tag{24}$$

где $\overline{e}(t)$ определяется соотношением (11).

Дифференцируя (23) по переменной x а соотношение (24) – по t и исключая из полученных соотношений производную $\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial t}$, получаем уравнение для избыточного напора в виде

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \left(1 - \frac{\lambda_1 \mu H_t'(x^*, t)}{1+\kappa+\mu H(x^*, t)} \right) \frac{\partial H}{\partial t} = \left(1+\kappa+\mu H(x^*, t) \right) \left[C_\upsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(H + \lambda_2 \frac{\partial H}{\partial t} \right) - \right.$$

$$\left. -\mu_* \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(C + \lambda_1 \frac{\partial C}{\partial t} \right) \right], \tag{25}$$

где $\mu_* = \nu C_\upsilon k^{-1}$.

Уравнение для определения концентрации солей в растворе запишем в виде

$$n \frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - u_x \frac{\partial C}{\partial x}, \tag{26}$$

где D – коэффициент диффузии [13], n – среднее значение пористости среды. Принимая во внимание тот факт, что скорость фильтрации с учетом (23) определяется соотношением

$$u_x = -\frac{k}{\lambda_1} \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_2 H(x,t) + \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \int_0^t H(x,\tau) e^{-\frac{t-\tau}{\lambda_1}} d\tau \right] + \nu \frac{\partial C}{\partial x}, \tag{27}$$

и аппроксимируя пористость соотношением $n \approx \overline{e}/(1+\overline{e})$, получаем из (26) уравнение для определения поля концентраций в виде

$$\left(\kappa + \mu H(x^*, t) \right) \frac{\partial C}{\partial t} = \left(1+\kappa+\mu H(x^*, t) \right) \left[D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{k}{\lambda_1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_2 H(x,t) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \int_0^t H(x,\tau) e^{-\frac{t-\tau}{\lambda_1}} d\tau \right) \frac{\partial C}{\partial t} - \nu \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)^2 \right]. \tag{28}$$

Таким образом, неклассическая математическая модель процесса фильтрационной консолидации деформируемых пористых сред насыщенных солевыми растворами и находящихся в условиях релаксационной фильтрации поровой жидкости, базируется на системе уравнений (25), (28). Исследование динамики консолидационного процесса в рамках рассматриваемой модели сводится к решению соответствующей нелинейной краевой задачи для системы нагруженных дифференциальных уравнений (25), (28) относительно неизвестного вектора (H, C).

Заключение. В работе построены новые (неклассические) математические модели процесса фильтрационной консолидации в условиях справедливости либо закона фильтрации Дарси, либо закона релаксационной фильтрации. В рамках предложенных математических моделей исследование процесса фильтрационной консолидации деформируемых водонасыщенных пористых массивов сводится к решению соответствующих краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа, а в случае насыщенности массивов солевыми растворами – системы дифференциального и интегро-дифференциального уравнений. Получено приближенное решение соответствующей краевой задачи для нагруженного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка, описывающее динамику процесса фильтрационной консолидации водонасыщенного грунтового массива конечной мощности расположенного на проницаемом основании.

В.М. Булавацький

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ КОНСОЛІДАЦІЇ ВОДОНАСИЧЕНИХ
ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩ ТА НАВАНТАЖЕНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Побудовано нові математичні моделі процесу фільтраційної консолідації за умов справедливості закону Дарсі, або закону релаксаційної фільтрації. У рамках запропонованих моделей вивчення динаміки процесу фільтраційної консолідації водонасичених пористих середовищ зводиться до розв'язування відповідних крайових задач для навантажених диференціальних рівнянь з частинними похідними параболічного типу, а у випадку насиченості масиву сольовими розчинами – системи диференціального та інтегро-диференціального рівнянь.

V.M. Bulavatsky

MATHEMATICAL MODELS OF CONSOLIDATION OF SATURATED POROUS MEDIA
AND LOADED DIFFERENTIAL EQUATIONS

New mathematical models of filtration consolidation process under the conditions of the Darcy law or relaxation filtration law are constructed. Within the framework of the models proposed, the study of dynamics of filtration consolidation process of saturated porous media is reduced to solving the appropriate boundary-value problems for the loaded partial differential equations of a parabolic type, and, in case of a saturation of body by salt solutions, it is reduced to the system of the differential and integral-differential equations.

1. *Иванов П.Л.* Грунты и основания гидротехнических сооружений. – М.: Высшая школа, 1991.– 447 с.
2. *Флорин В.А.* Основы механики грунтов: В 2-х т. – Л.; М.: Госстройиздат, 1961. – **2**. – 544 с.
3. *Барсегян Р.М.* Методы решения задач теории фильтрации в неоднородных средах. – Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1977. – 303 с.
4. *Ширинкулов Т.Ш., Зарецкий Ю.К.* Ползучесть и консолидация грунтов. – Ташкент: Фан, 1986. − 390 с.
5. *Власюк А.П., Мартинюк П.М.* Математичне моделювання консолідації грунтів в процесі фільтрації сольових розчинів. – Рівне: Вид-во УДУВГП, 2004. – 211 с.
6. *Булавацький В.М., Кривонос Ю.Г., Скопецький В.В.* Некласичні математичні моделі процесів тепло-та масопереносу. − К.: Наук. думка, 2005. − 283 с.
7. *Булавацкий В.М., Скопецкий В.В.* Математическое моделирование процесса фильтрационной консолидации с учетом релаксационных явлений // Проблемы управления и информатики. – 2006. – № 3. – С. 48 – 56.
8. *Булавацкий В.М.* Математическое моделирование фильтрационной консолидации с учетом солепереноса в рамках системы с двойной релаксацией // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 1. – С. 116–126.
9. *Булавацкий В.М., Скопецкий В.В.* Обобщенная математическая модель динамики консолидационных процессов с релаксацией // Там же. – 2008. – № 5. – С. 25–34.
10. *Булавацкий В.М., Скопецкий В.В.* Математическое моделирование динамики некоторых распределенных пространственно-временных консолидационных процессов // Проблемы управления и информатики. – 2009. – № 5. – С. 77 – 87.
11. *Власюк А.П., Мартинюк П.М.* Математичне моделювання консолідації грунтів при фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах. – Рівне: Вид-во НУВГП, 2008. – 416 с.
12. *Бомба А.Я., Булавацький В.М., Скопецький В.В.* Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки. – К.: Наук. думка, 2007. – 292 с.
13. *Ляшко И.И., Демченко Л.И., Мистецкий Г.Е.* Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах. – Киев: Наук. думка, 1991. – 264 с.
14. *Нахушев В.А.* Уравнения математической биологии. – М.: Высш. шк., 1995. – 301 с.
15. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1974. – 31 с.
16. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. – М.: Наука, 1987. – 600 с.

Получено 06.06.2010

Об авторе:

Булавацкий Владимир Михайлович,

доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.