КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.8

И.И. РЯСНАЯ, А.Е. СЕНЬКО

# ОБ АДЕКВАТНОСТИ ОЦЕНОК КОНКУРЕНТОСПОСОБНОСТИ НА ОСНОВЕ МУЛЬТИМНОЖЕСТВ

*Проведен анализ адекватности оценок конкурентоспособности предприятий, полученных на базе метрики типа Хемминга, использующей только значения функций кратности мультимножеств. Показано, что с позиций репрезентативной теории измерений такие оценки неадекватны, что может приводить к ошибкам при сравнении предприятий по конкурентоспособности. Приведен пример адекватной оценки.*



**Введение**. Использование мультимножеств имеет сравнительно небольшую историю [1], поэтому проблемы допустимости или адекватности оценок на основе мультимножеств еще не исследованы в достаточной степени, что в некоторых случаях приводит к некорректным результатам.

В частности, в [2] рассмотрена задача сравнения (оценки) конкурентоспособности предприятий и приведена методика её решения на базе метрики типа Хемминга, в которой используются значения функций кратности.

В данной работе показано, что с позиций репрезентативной теории измерений [3] такие оценки неадекватны, что может приводить к ошибкам при сравнении предприятий по конкурентоспособности.

**Постановка и решение задачи** [2]. Пусть $\mathbf{A}=\{A_l\}_{l=1}^{p}$ – множество предприятий, $\mathbf{Q}=$ $=\{Q_s\}_{s=1}^{m}$ – множество критериев оценки конкурентоспособности. Каждый критерий $Q_S$ измеряется в количественной или качественной шкале со строго упорядоченным множеством значений:

$$Q_s=\left(q_s^{e_s}\right)_{e_{s=1}}^{h_s},\ q_s^1>q_s^2>\ldots>q_s^{h_s},\ s=\overline{1,m}.$$

Есть $n$ экспертов, дающих однозначную оценку предприятиям по каждому из этих критериев. Результат $a$ оценки множеством экспертов значений критериев конкурентоспособности предприятия $A$ можно представить как мультимножество над доменом

$$G = \{Q_1, ..., Q_m\},$$
$$a = \left\{k_a\left(q_1^1\right) \circ q_1^1, ..., k_a\left(q_1^{h_1}\right) \circ q_1^{h_1}, ..., k_a\left(q_m^1\right) \circ q_m^1, ..., k_a\left(q_m^{h_m}\right) \circ q_m^{h_m}\right\}, \tag{1}$$

где $k_a\left(q_s^{e_s}\right) \in \{0,1,...,n\}$; $k_a\left(q_s^{e_s}\right)$ – количество экспертов, давших предприятию $A$ оценку $q_s^{e_s}$ по критерию $Q_s$.

Максимальное и минимальное значения возможных экспертных оценок, соответственно, равны:

$$a_{\max} = \left\{n \circ q_1^1, ..., 0 \circ q_1^{h_1}, ..., n \circ q_m^1, ..., 0 \circ q_m^{h_m}\right\},$$
$$a_{\min} = \left\{0 \circ q_1^1, ..., n \circ q_1^{h_1}, ..., 0 \circ q_m^1, ..., n \circ q_m^{h_m}\right\}.$$

На базе экспертных оценок критериев $\{a_l\}_{l=1}^p$ на множестве предприятий **A** вводится отношение порядка по конкурентоспособности следующим образом.

На множестве экспертных оценок (1) вводится метрика типа Хемминга:

$$d_1(a,b) = \sum\nolimits_{s=1}^m \omega_s \sum\nolimits_{e_s=1}^{h_s} \left|k_a\left(q_s^{e_s}\right) - k_b\left(q_s^{e_s}\right)\right|, \tag{2}$$

где $\omega_s$ – коэффициент относительной важности критерия $Q_s$. Полагается, что предприятие $A$ лучше предприятия $B$ ($A \succ B$,), если $d_1(a_{\max}, a) < d_1(a_{\max}, b)$:

$$d_1(a_{\max}, a) < d_1(a_{\max}, b) \Rightarrow A \succ B, \tag{3}$$

если $d_1(a_{\max}, a) = d_1(a_{\max}, b)$, то предприятия эквивалентны либо несравнимы по конкурентоспособности.

Для каждого критерия $Q_s$ выполняется условие:

$$\sum\nolimits_{e_s=1}^{h_s} k_a\left(q_s^{e_s}\right) = n, \tag{4}$$

т. е. $\sum\nolimits_{e_s=2}^{h_s} k_a\left(q_s^{e_s}\right) = n - k_a\left(q_s^1\right)$. С учетом этого

$$d_1(a_{\max}, a) = 2\sum\nolimits_{s=1}^m \omega_s \left(n - k_a\left(q_s^1\right)\right). \tag{5}$$

Из импликации (3) и равенств (4), (5) следует

$$\sum\nolimits_{s=1}^m \omega_s k_a\left(q_s^1\right) > \sum\nolimits_{s=1}^m \omega_s k_b\left(q_s^1\right) \Rightarrow A \succ B. \tag{6}$$

Таким образом, упорядочение предприятий по конкурентоспособности сводится к сравнению взвешенных сумм с учетом только кратности наилучших значений оценок по каждому из критериев.

На этом заканчиваем изложение методики получения оценок конкурентоспособности предприятий на основе метрики (2).

Отметим, что (6) совпадает с выражением (9.23) из [4], где рассматривается такая же формальная модель, но подробнее рассматривается случай равенства $\sum\nolimits_{s=1}^m \omega_s k_a\left(q_s^1\right) = \sum\nolimits_{s=1}^m \omega_s k_b\left(q_s^1\right)$. В этом случае предлагается продолжить упорядочение в группах предприятий с равным значением расстояния (2) на основе импликации $\sum\nolimits_{s=1}^m \omega_s k_a\left(q_s^2\right) > \sum\nolimits_{s=1}^m \omega_s k_b\left(q_s^2\right) \Rightarrow A \succ B$.

В случае равенства $\sum_{s=1}^{m} \omega_s k_a\left(q_s^2\right) = \sum_{s=1}^{m} \omega_s k_b\left(q_s^2\right)$ используется импликация $\sum_{s=1}^{m} \omega_s k_a\left(q_s^3\right) > \sum_{s=1}^{m} \omega_s k_b\left(q_s^3\right) \Rightarrow A \succ B$ и т. д.

Рассмотрим два примера расчетов по рассмотренной методике в случае, когда для сравнения предприятий используется только один критерий $Q_s$ ( $m = 1.$ ).

*Пример* 1. Пусть $h_s = 5,\ q_s^1 = 5,\ q_s^2 = 4,\ q_s^3 = 3,\ q_s^4 = 2,\ q_s^5 = 1;\ n = 3$, а экспертные оценки значений критерия $Q_s$ предприятий $A_1$, $A_2$, соответственно, равны:

$$a_1 = \left(k_{a_1}\left(q_s^1\right) \circ q_s^1, \ldots, k_{a_1}\left(q_s^5\right) \circ q_s^5\right) = \left(0 \circ 5, 3 \circ 4, 0 \circ 3, 0 \circ 2, 0 \circ 1\right),$$

$$a_2 = \left(k_{a_2}\left(q_s^1\right) \circ q_s^1, \ldots, k_{a_2}\left(q_s^5\right) \circ q_s^5\right) = \left(0 \circ 5, 0 \circ 4, 3 \circ 3, 0 \circ 2, 0 \circ 1\right).$$

Очевидно, что эксперты единодушны в своей оценке: предприятие $A_1$ лучше предприятия $A_2$ ($A_1 \succ A_2$), однако из расчетов по вышеприведенным формулам следует, что $d_1\left(a_{\max}, a_1\right) = d_1\left(a_{\max}, a_2\right)$, т. е. предприятия эквивалентны или несравнимы по конкурентоспособности. Наблюдается явное противоречие между экспертными оценками и выводами в рамках формальной модели.

Если воспользоваться методикой, изложенной в [4], то получим правильное решение: $A_1 \succ A_2$.

*Пример* 2. Пусть $h_s = 5;\ q_s^1 = 5,\ q_s^2 = 4,\ q_s^3 = 3,\ q_s^4 = 2,\ q_s^5 = 1;\ n = 100.$ Из 100 экспертов двое поставили высшую оценку предприятию $A_1 : k_{a_1}\left(q_s^1\right) = 2,$ а остальные низшую оценку $k_{a_1}\left(q_s^5\right) = 98,$ а для предприятия $A_2 : k_{a_2}\left(q_s^1\right) = 1,$ $k_{a_2}\left(q_s^2\right) = 99.$ Тогда из (6) следует, что $A_1 \succ A_2$. Однако подавляющее большинство (98) экспертов считает, что $A_2 \succ A_1$, т. е. мнение одного эксперта ($k_{a_1}\left(q_s^1\right) = 2,\ \ k_{a_2}\left(q_s^1\right) = 1$) имеет решающее влияние, что вряд ли может считаться удовлетворительным. Отметим, что в данном случае методика, изложенная в [4], дает тот же результат.

**Анализ причин противоречий.** Используемые в (3), (6) оценки конкурентоспособности предприятий, полученные на основе метрики типа Хемминга (2), можно представить в виде отображения $\varphi : \mathbf{A} \to R^1$, где $R^1$ – множество вещественных чисел. Обозначим

$$\varphi_1(A) = d_1\left(a_{\max}, a\right), \tag{7}$$

$$\varphi_2(A) = \sum_{s=1}^{m} \omega_s k_a\left(q_s^1\right). \tag{8}$$

Тогда (3), (6) можно записать, соответственно, в виде: $\varphi_1(A) < \varphi_1(B) \Rightarrow A \succ B$, $\varphi_2(A) > \varphi_2(B) \Rightarrow A \succ B.$

Возникает вопрос, можно ли использовать оценки (7), (8) и импликации (3), (6) для сравнения предприятий по конкурентоспособности. Иначе говоря, какое *необходимое* условие должно выполняться, чтобы отображение $\varphi : \mathbf{A} \to R^1$ можно было рассматривать как оценку конкурентоспособности предприятий, поскольку *любое* отображение $\varphi$, которое не равным оценкам критериев конкурентоспособности предприятий ставит в соответствие неравные численные значения, может индуцировать отношение порядка во множестве $\mathbf{A}$. Такое необходимое условие можно получить, если рассмотреть оценки конкурентоспособности с позиций репрезентативной теории измерений (РТИ).

Результаты оценок множеством экспертов $X$ ($|X| = n$) значений критерия $Q_s$ конкурентоспособности множества предприятий $\mathbf{A}$ представим как множество функций $\left\{ f_A^s : X \to Q_s \middle| A \in \mathbf{A} \right\}$. Пусть эксперты единодушны в оценке каждого предприятия, т. е. $\forall A \in \mathbf{A} \;\; \forall Q_s \in \mathbf{Q} \;\; f_A^s(x) = \text{const}$. Очевидно, что предприятие $A$ лучше по конкурентоспособности предприятия $B$, если $\forall Q_s \in \mathbf{Q}$ $\forall x \in X \;\; f_A^s(x) \geq f_B^s(x)$ и существует хотя бы один критерий $Q_g \in \mathbf{Q}$, для которого $f_A^g(x) > f_B^g(x)$. Такие оценки порождают на $\mathbf{A}$ отношение строгого порядка ($\succ'$), которое будем называть *непротиворечивым отношением строгого доминирования*. Соответствующее отношение $\succsim'$, включающее в себя случай равенства $f_A^s(x) = f_B^s(x) \;\; \forall Q_s \in \mathbf{Q} \;\; \forall x \in X$, порождающий отношение эквивалентности $\sim'$ на множестве предприятий $\mathbf{A}$, будем называть *непротиворечивым отношением доминирования*.

В РТИ кортеж $\langle \mathbf{A}, \sim', \succ' \rangle$ рассматривается как эмпирическая система с отношениями (ЭСО) эквивалентности и строгого порядка, а множество оценок конкурентоспособности предприятий $\varphi : \mathbf{A} \to R^1$ – как отображение ЭСО в числовую систему с отношениями равенства и строгого порядка $\langle R^1, =, > \rangle$. Отображение $\varphi$, сохраняющее отношения, называется гомоморфизмом (либо изоморфизмом при взаимно однозначном отображении) или *шкалой* [3].

**Определение 1.** Отображение $\varphi : \mathbf{A} \to R^1$, сохраняющее непротиворечивое отношение доминирования в эмпирической системе, будем называть *адекватной в широком смысле* оценкой конкурентоспособности предприятий:

$$A \sim' B \Rightarrow \varphi(A) = \varphi(B), \tag{9}$$

для изотонного отображения

$$A \succ' B \Rightarrow \varphi(A) > \varphi(B), \qquad (10)$$

для антитонного отображения

$$A \succ' B \Rightarrow \varphi(A) < \varphi(B). \qquad (11)$$

**Определение 2.** Отображение $\varphi : \mathbf{A} \to R^1$ будем называть *адекватной в узком смысле* оценкой конкурентоспособности предприятий, если импликации (9), и (10) (или (9), (11)) остаются истинными при любых допустимых преобразованиях шкал измерения критериев конкурентоспособности $\mathbf{Q} = \{Q_s\}_{s=1}^m$.

**Определение 3.** Отображение $\varphi : \mathbf{A} \to R^1$ назовем *допустимой* или *адекватной* оценкой конкурентоспособности предприятий, если такая оценка адекватна как в широком, так и узком смысле.

**Определение 4.** Отображение $\varphi : \mathbf{A} \to R^1$ называется *инвариантной* оценкой конкурентоспособности предприятий, если $\varphi(A \,|\, A \in \mathbf{A}) = \mathrm{const}$ при любых допустимых преобразованиях шкал измерения критериев конкурентоспособности $\mathbf{Q} = \{Q_s\}_{s=1}^m$.

Очевидно, что инвариантные оценки являются адекватными в узком смысле, но могут не быть адекватными в широком смысле.

**Теорема 1.** Отображения $\varphi_1$ и $\varphi_2$ не являются шкалой.

*Доказательство*. Для отображения $\varphi_1$ должно выполняться (11). Пусть $A \succ' B$. Рассмотрим частный случай отношения $\succ'$, когда ни один из экспертов не дал предприятиям $A$ и $B$ высшей оценки $q_s^1$ $\forall Q_s \in \mathbf{Q}$. При этом согласно (5), (7) $\varphi_1(A) < \varphi_1(B)$ $\varphi_1(A) = \varphi_1(B) = 2n\sum_{s=1}^m \omega_s$. Следовательно, условие (11) не выполняется: из $A \succ' B$ не следует. Таким образом, отображение $\varphi_1$ не сохраняет отношение строгого доминирования при непротиворечивых экспертных оценках конкурентоспособности предприятий, то есть не является шкалой. Для отображения $\varphi_2$ доказательство проводится аналогично.

Теорема 1 показывает, что порождаемое оценкой (7) отношение порядка в рассмотренной формальной модели не связано с естественным порядком (предпочтением) объектов по конкурентоспособности в эмпирической системе. Отметим, что оценка (7) инвариантна к допустимым преобразованиям шкал используемых критериев, так как кратность измеряется в абсолютной шкале. Очевидно, что *необходимым* условием допустимости оценок является их адекватность в широком смысле. В РТИ доказательство справедливости выполнения необходимого условия проводится в рамках доказательства теоремы представления, а тип шкалы измерения исследуется при доказательстве теоремы единственности [3].

После доказательства выполнения необходимого условия допустимости оценок, требуются дальнейшие исследования для доказательства допустимости (адекватности) используемых оценок. Только допустимые оценки соответствуют понятию шкала, которое введено в РТИ.

Пусть $K = \{k : G \to N_n\}$ – решетка мультимножеств, $N_n = \{0,1,...,n\}$.

**Теорема 2.** Множество экспертных оценок $\{a_l\}_{l=1}^{p} \subset K$ представляет собой антицепь.

*Доказательство*. Пусть существуют две оценки $a, b,$ такие, что $a \succ b,$ где "$\succ$" – отношение строгого порядка, порождаемое доминированием функций $k \in K.$ Для любой возможной оценки (1) выполняется условие (4). Из посылки $a \succ b$ и $\sum_{e_s=1}^{h_s} k_b\left(q_s^{e_s}\right) = n$ следует, что существует критерий $Q_s \in \mathbf{Q}$, для которого $\sum_{e_s=1}^{h_s} k_a\left(q_s^{e_s}\right) > n.$ Это противоречит условию (4). То есть $\{a_l\}_{l=1}^{p}$ – множество, в котором отсутствует отношение порядка, или антицепь.

Из теоремы 2 следует, что оценки $\varphi_1$ и $\varphi_2$ не связаны с отношением порядка на решетке мультимножеств $K.$

Приведем пример адекватной оценки.

В случае, когда значения всех критериев $Q_s,\ \ s = \overline{1,m},$ измеряются в *абсолютных* шкалах, адекватную оценку конкурентоспособности предприятия $A_l$ на базе экспертных оценок (1) можно представить в виде:

$$\varphi_3(A_l) = \sum_{s=1}^{m} \omega_s \sum_{e_s=1}^{h_s} q_s^{e_s} k_{a_l}\left(q_s^{e_s}\right).$$

Тогда при равнозначности критериев

$$\sum_{s=1}^{m} \sum_{e_s=1}^{h_s} q_s^{e_s} k_{a_l}\left(q_s^{e_s}\right) > \sum_{s=1}^{m} \sum_{e_s=1}^{h_s} q_s^{e_s} k_{a_r}\left(q_s^{e_s}\right) \Rightarrow A_l \succ A_r,$$

$$\sum_{s=1}^{m} \sum_{e_s=1}^{h_s} q_s^{e_s} k_{a_l}\left(q_s^{e_s}\right) = \sum_{s=1}^{m} \sum_{e_s=1}^{h_s} q_s^{e_s} k_{a_r}\left(q_s^{e_s}\right) \Rightarrow A_l \sim A_r. \qquad (12)$$

Используя данные из примера 1, получим $\varphi_3(A_1) = 12$ и $\varphi_3(A_2) = 9,$ т. е. согласно (12) $A_1 \succ A_2,$ что соответствует представлениям экспертов. Исходя из данных примера 2, получим $\varphi_3(A_1) = 108$ и $\varphi_3(A_2) = 401,$ т. е. $A_2 \succ A_1,$ что совпадает с мнением подавляющего большинства экспертов. Расчеты по данным в вышеприведенных примерах подтверждают адекватность оценки $\varphi_3$. Однако расчеты по тем же данным указывают на неадекватность оценок $\varphi_1$ и $\varphi_2$.

Таким образом, с позиций РТИ вышерассмотренная оценка конкурентоспособности предприятий (7) *инвариантна*, но *не адекватна*. Такая оценка не пригодна (не допустима) для сравнения предприятий по конкурентоспособности.

**Заключение.** Оценки конкурентоспособности предприятий на основе метрики типа Хемминга, использующей только значения функций кратности мультимножеств, неадекватны и могут приводить к ошибкам при сравнении предприятий по конкурентоспособности. Этот результат указывает на необходимость использования методов РТИ при исследованиях адекватности формальных моделей эмпирических систем.

*І.І. Рясна, О.Є. Сенько*

ПРО АДЕКВАТНІСТЬ ОЦІНОК КОНКУРЕНТОСПРОМОЖНОСТІ
НА ОСНОВІ МУЛЬТИМНОЖИН

Проведено аналіз адекватності оцінок конкурентоспроможності підприємств, які отримано на базі метрики типу Хеммінга, що використовує тільки значення функцій кратності. Показано, що з точки зору репрезентативної теорії вимірювань такі оцінки неадекватні, що може призводити до помилок при порівнянні підприємств за конкурентоспроможністю. Наведено приклад адекватної оцінки.

*I.I. Rjasnaja, A.E. Sen'ko*

ON ADEQUACY OF ESTIMATIONS OF THE COMPETITIVENESS BASED ON MULTISETS

Analysis of adequacy of estimations of the competitiveness of enterprises based on Hemming-type metric is made using only the values of multiplicity functions. It is shown that these estimations are not adequate in the sense of representation theory measurements and this fact leads to errors when enterprises are compared by competitiveness. An example of the adequate estimation is given.

1. *Буй Д.Б., Богатирьова Ю.О.* Сучасний стан теорії мультимножин // Вісн. Київського ун-ту. Серія: фізико-математичні науки. – 2010. – № 1. – С. 51–58.
2. *Вовк О.Л., Гайдукова О.А.* Математическая модель оценки конкурентоспособности предприятий на основе мультимножеств. – http://ea/donntu/edu/ua/handle/12345789/959.
3. *Суппес П., Зинес Дж.* Основы теории измерений // Психологические измерения. – М.: Мир, 1967. – С. 9–110.
4. *Петровский А.Б.* Пространства множеств и мультимножеств. – М.: Едиторал УРСС, 2003. – 248 с.

Получено 15.10.2011

***Об авторах:***

*Рясная Ирина Ивановна*,
научный сотрудник
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины,

*Сенько Александр Евгеньевич*,
ведущий инженер-программист
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.