КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.854

В.А. МИХАЙЛЮК

РЕОПТИМИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ О МИНИМАЛЬНОМ ВЕРШИННОМ ПОКРЫТИИ *K*-РАВНОМЕРНОГО ГИПЕРГРАФА

Для реоптимизации задачи о минимальном вершинном покрытии k-равномерного гиперграфа при добавлении h вершин ($h = O(\log n)$, *n – общее число вершин) и некоторого числа гиперребер приводится полиномиальный* (2–1/*k*) *– приближенный алгоритм. При выполнении уникальной игровой гипотезы* (*UGC*) *аппроксимационное отношение* 2–1/*k* *является пороговым в семействе параметрических полиномиальных реоптимизационных алгоритмов.*

Введение. Задача о минимальном вершинном покрытии – проблема нахождения наименьшего множества вершин, которые касаются всех ребер в данном графе. Это одна из основных NP-полных проблем и поэтому решить ее точно за приемлемое время вряд ли представляется возможным. Поэтому рассматриваются эффективные (полиномиальные) приближенные алгоритмы для решения таких задач. Для минимизационной (максимизационной) проблемы говорят, что алгоритм есть *C* – приближенный алгоритм, если он для произвольного экземпляра дает решение со значением целевой функции не большим, чем *C OPT* (не меньшим, чем $\frac{1}{C} \cdot OPT$), где *OPT* – глобальный оптимум. При этом *C* называют отношением аппроксимации.

Говорят, что для проблемы Q установлена верхняя оценка отношения аппроксимации *C*, если существует полиномиальный *C* – приближенный алгоритм для решения Q. Для проблемы Q установлена нижняя оценка отношения аппроксимации c, если для произвольного $\varepsilon > 0$ не существует полиномиального приближенного алгоритма для Q, на котором достигается отношение аппроксимации $c - \varepsilon$ (или строго меньше *c*). Если *C* = *c*, то для проблемы Q установлен *порог отношения аппроксимации* (равный $C = c$). Соответствующий алгоритм называется *по-*

роговым или *оптимальным* (и отношение аппроксимации – оптимально).

Для задачи о минимальном вершинном покрытии известен простой 2-приближенный алгоритм, основанный на применении паросочетаний. Несмотря на многочисленные попытки существенно улучшить эту оценку удалось достичь лишь аппроксимационного отношения $2-o(1)$ [1, 2].

Проблема установления нижних оценок отношения аппроксимации (как и любая проблема получения нижних оценок сложности) является очень трудной задачей. Для такой проблемы существует название неаппроксимируемость (inapproximability) или трудность аппроксимации (hardness of approximation). Большое влияние на развитие методов получения нижних оценок оказала знаменитая PCP теорема [3].

Используя эти достижения Хастад (Hastad) [4] получил нижнюю оценку $\frac{7}{6}$ для задачи о минимальном вершинном покрытии. Динур (Dinur) и Сафра (Safra) улучшили эту оценку до 1.36 [5].

Совсем недавно Кхот (Khot) [6] получил оценку $2-\varepsilon$, используя в своих построениях так называемую уникальную игровую гипотезу (Unique Games Conjecture, UGC). С помощью UGC удалось установить ряд других пороговых результатов в аппроксимации.

Понятие реоптимизации [7–9] состоит в следующем. Пусть $Q-$ некоторая NP-трудная (возможно, NP-полная) проблема, $I-$ начальный экземпляр проблемы Q, оптимальное решение которого известно. Предлагается новый экземпляр $I^{'}$ задачи Q, полученный некоторыми «незначительными» изменениями экземпляра I. Как можно эффективно использовать знания об оптимальном решении I для вычисления точного или приближенного решения экземпляра $I^{'}$?

Мало изученной и исследованной есть проблема нахождения пороговых (оптимальных) приближенных алгоритмов для реоптимизации дискретных задач оптимизации. Данная работа посвящена изучению этого вопроса для задачи о минимальном вершинном покрытии графа.

Постановка задачи. Рассмотрим общую задачу вершинного покрытия *k*-равномерного гиперграфа.

Определение 1. *k*-равномерный гиперграф $H=(V,E)$ состоит из множества вершин V и множества E *k*-элементных подмножеств V, называемых гиперребрами (или просто ребрами). *Вершинное покрытие* H состоит из подмножества вершин $S\subseteq V$ такого, что каждое гиперребро из E пересекается с S, т. е. $e\cap S\neq \text{o}$ для любого $e\in E$. *Независимое множество* в H есть подмножество, дополнение которого есть вершинное покрытие, или, иными словами, подмножество вершин, которое полностью не содержит в себе никакого гиперребра. Проблема $Ek-Vertex-Cover$ – проблема нахождения вершинного покрытия минимального размера в *k*-равномерном гиперграфе.

Заметим, что при $k=2$ это обычная задача о минимальном вершинном покрытии графа.

Определение 2. Гиперребро $e \in E$ *инцидентно* вершине $v \in V$, если $v \in e$. *Паросочетание* – подмножество гиперребер графа, такое, что никакие два гиперребра из этого подмножества не инцидентны какой-либо одной вершине.

Теорема 1. Существует полиномиальный k-приближенный алгоритм для задачи $Ek - Vertex - Cover$.

Доказательство основано на построении множества паросочетаний гиперграфа, вершины которого составляют приближенное покрытие.

В качестве реоптимизационной версии задачи о минимальном вершинном покрытии k-равномерного гиперграфа рассмотрим задачу с добавлением некоторого числа h вершин с некоторыми инцидентными им гиперребрами. Более точно.

Проблема. $Insh - Ek - Vertex - Cover$. **Входные данные.** Экземпляр I проблемы $Ek - Vertex - Cover$ (граф $H = (V, E)$) и его оптимальное решение $V_{\min}^{I} \subseteq V$.

Результат. Найти оптимальное решение экземпляра I' проблемы $Ek - Vertex - Cover$ (граф $H = (V', E')$, где $V' = V \cup \{v_i\}, i = 1,...,h$; $E' = E \cup \{e_j\}$, $j = 1,...,l$, вместе с вершинами v_i добавляются некоторые инцидентные им гиперребра e_j), используя при этом $V_{\min}^{I}$.

Цель. Минимизировать число вершин в I'.

Проблема $Insh - Ek - Vertex - Cover$ является реоптимизацией $Ek - Vertex - Cover$ при добавлении h вершин.

Нижние оценки отношения аппроксимации и уникальная игровая гипотеза (UGC). Полезен и интересен вопрос об установлении NP-трудности реоптимизационных вариантов задач оптимизации. Можно показать, что проблема $Insh - Ek - Vertex - Cover$ является NP-трудной даже для $h = 1$.

Будем пользоваться результатами работы [6]. Типичную технику получения результатов по нижним оценкам отношения аппроксимации (неаппроксимируемости) можно описать следующим образом. Источником является следующее рассуждение. Пусть $P-$ произвольная оптимизационная (для определенности на максимум) проблема. Под $(c.s) - gap$ версией проблемы P (обозначение $Gap - P_{c,s}$) будем понимать проблему, для которой либо $OPT(I) \geq c$, либо $OPT(I) \leq s$ для произвольного экземпляра $I \in P$. Рассмотрим NP-полную проблему 3-Sat (3-выполнимость). Произвольная 3-Sat формула ($E3 - CNF$ формула) – это конъюнкция множества скобок, где каждая скобка является дизъюнкцией трех булевских переменных или их отрицанием. Цель состоит в определении приписывания булевским переменным таких значений истинности, что формула становится логически истинной (выполнимой). Допустим, что существует полиномиальная сводимость от 3-Sat к $Gap - P_{c,s}$ для некоторых $0 < s < c$, т. е. сводимость, которая отображает 3-Sat формулу ψ на экземпляр I проблемы P такой, что:

случай-да: если ψ имеет приписывание, которое делает ее выполнимой, то $OPT(I) \geq c$;

случай-нет: если ψ не имеет приписываний, которые делают ее выполнимой, то $OPT(I) \leq s$.

Такая сводимость предполагает, что если существует полиномиальный алгоритм с отношением аппроксимации строго меньшим, чем $\frac{c}{s}$ для проблемы P, т. е. возможность эффективно определить выполнима ли 3-Sat формула и, следовательно, $P = NP$. Таким образом, при стандартном предположении $P \neq NP$ эта сводимость – источник получения результатов по неаппроксимируемости для проблемы P. Будем исходить из PCP (Prababilistically Checkable Proof) теоремы [3] в той или иной форме для некоторого *NP*-полного языка (например 3-Sat). Конструируется PCP система или вероятностно проверяемая система доказательств (Probabilistically Checkable Proof system, PCPs) для данной проблемы P, которая осуществляет сводимость к проблеме (языку), неаппроксимируемость которой нужно установить (например, $Gap - P_{c,s}$).

Экземпляр (взвешенной) проблемы о покрытии метками представляется как кортеж $\Phi = (X, Y, R, \Psi, W)$. Множества X и Y представляют переменные: будем обращаться к переменным в X как к левым переменным, а к переменным в Y – как к правым вершинам. Множество R – множество возможных меток. Для любых $x \in X, y \in Y, \Psi$ содержит одно отношение $\psi_{xy} \subseteq R \times R$ и W содержит веса $w_{xy} \geq 0$. Маркировка (расстановка меток) – функция $L: X \cup Y \to R$. Будем говорить, что ограничение ψ_{xy} удовлетворяет маркировке L, если $(L(x), L(y)) \in \psi_{xy}$.

Определим $w(\Phi, x) = \sum_{y \in Y} w_{xy}$ и $w(\Phi) = \sum_{x \in X, y \in Y} w_{xy}$, аналогично определяются $w_L(\Phi, x), w_L(\Phi)$ только суммы берутся по всем y и по всем x, y таким, что ψ_{xy} удовлетворяет L. PCP теорема [3, 6] показывает, что проблема о покрытии метками является в определенном смысле NP-трудной.

С помощью этой теоремы были установлены многие нижние оценки отношения аппроксимации [4], однако применить ее для доказательства неаппроксимированости $2 - \varepsilon$ задачи о минимальном вершинном покрытии не удавалось. Учитывая это Кхот ввел UGC [6].

В частности ограничения в Ψ имеют специальную форму: будем говорить, что $\psi_{xy} \in \Psi$ является *уникальным*, если для любого $a \in R$ существует уникальный $b \in R$, такой что $(a, b) \in \psi_{xy}$ и наоборот; иными словами, ψ_{xy} можно считать как паросочетание между метками x и метками y. Будем говорить, что экземпляр Φ уникален, если все ограничения уникальны.

Гипотеза (Взвешенная Уникальная Игровая Гипотеза) [6]. Для произвольных $\varsigma, \gamma > 0$ существует $|R|$ такой, что следующее является NP-трудным. Для данного взвешенного уникального экземпляра Φ проблемы о покрытии метками с множеством меток R и с $w(\Phi) = 1$ отличить данные два случая:

случай-да: существует маркировка L такая, что $w_L(\Phi) \geq 1 - \varsigma$;

случай-нет: для произвольной маркировки $L, w_L(\Phi) \leq \gamma$.

Исходя из сформулированной гипотезы в [6] выводится так называемая сильная форма уникальной игровой гипотезы после чего устанавливается сводимость к проблеме $Ek-Vertex-Cover$. В случае-да гиперграф, полученный в результате сводимости содержит независимое множество веса $1 - \frac{1}{k} - 2\varepsilon$ и в случае-нет гиперграф содержит независимое множество веса δ. Поскольку дополнение независимого множества является вершинным покрытием, то отсюда следует неаппроксимируемость $Ek-Vertex-Cover$ любой константой меньшей k. Этот результат можно сформулировать в виде такой теоремы.

Теорема 2 [6]. При выполнении уникальной игровой гипотезы (UGC) для произвольного $\varepsilon > 0$ является NP-трудным аппроксимировать $Ek-Vertex-Cover$ с отношением $k - \varepsilon$.

Порог отношения аппроксимации реоптимизации задачи о минимальном вершинном покрытии. Используя подход, предложенный в [8, 9] докажем теорему.

Теорема 3. Если $h = O(\log n)$ (n – число вершин в гиперграфе), то для проблемы $Insh-Ek-Vertex-Cover$ (реоптимизация $Ek-Vertex-Cover$) существует $(2 - \frac{1}{k})$ – приближенный (полиномиальный) алгоритм.

Доказательство. Пусть $V_{\min}^{I}$ – оптимальное решение экземпляра I проблемы $Ek-Vertex-Cover$ и $w(V_{\min}^{I})$ – вес решения (рассматриваем в общем случае взвешенный вариант). Пусть $v_i (i = 1,...,h)$ добавленные вершины вместе с некоторыми гиперребрами $e_j (j = 1,...,l)$ (экземпляр I') и $V_{\min}^{I'}$ – оптимальное решение I'. Ясно, что $V_{\min}^{I} \cup \{v_1,...,v_h\}$ – допустимое решение I'. Если $V_{\min}^{I'}$ содержит $\{v_1,...,v_h\}$, то $V_{\min}^{I} \cup \{v_1,...,v_h\}$ – оптимальное решение. Рассмотрим случай, когда $V_{\min}^{I'}$ не содержит $\{v_1,...,v_h\}$.

Обозначим $W_i (i = 1,...,2^h - 1)$ все подмножества $\{v_1,...,v_h\}$ без пустого множества и $N(W_i)$ множество всех вершин гиперграфа соседних с W_i (т. е. соединенных с вершинами из W_i гиперребрами). Если $V_{\min}^{I'}$ не содержит W_i, то $V_{\min}^{I} \cup N(W_i)$ допустимое решение I'. В этом случае построим еще одно допустимое решение V_i:

- удалим все W_i и $N(W_i)$ из гиперграфа;

- к оставшемуся гиперграфу применим ρ-приближенный алгоритм нахождения вершинного покрытия;

- к полученному решению добавим $N(W_i)$.

Среди решений $V^{I}_{\min} \cup N(W_i)$ и V_i выберем наилучшее (т. е. с меньшим значением целевой функции w), которое в дальнейшем обозначим $\bar{V}_i$. Поскольку $w(V^{I}_{\min}) \le w(V^{I'}_{\min})$ получаем

$$w(V^{I}_{\min} \cup N(W_i)) \le w(V^{I'}_{\min}) + w(N(W_i)) \qquad (1)$$

и в силу построения V_i

$$w(V_i) \le \rho(w(V^{I'}_{\min}) - w(N(W_i)) + w(N(W_i)) = \rho w(V^{I'}_{\min}) - (\rho-1)w(N(W_i)). \qquad (2)$$

Взяв линейную комбинацию (1) с коэффициентом $(\rho-1)$ и (2) получаем

$$(\rho-1)w(V^{I}_{\min} \cup N(W_i)) + w(V_i) \le (\rho-1)w(V^{I'}_{\min}) + \rho w(V^{I'}_{\min}) = (2\rho-1)w(V^{I'}_{\min}).$$

Поскольку

$$(\rho-1)w(V^{I}_{\min} \cup N(W_i)) + w(V_i) \ge (\rho-1+1)\min\{w(V^{I}_{\min} \cup N(W_i)), w(V_i)\} = \rho w(\bar{V}_i),$$

имеем $\rho w(\bar{V}_i) \le (2\rho-1)w(V^{I'}_{\min})$. Таким образом, получены приближенные решения $\bar{V}_i$ экземпляра I', для которых $w(\bar{V}_i) \le \frac{2\rho-1}{\rho} w(V^{I'}_{\min}) = (2-\frac{1}{\rho})w(V^{I'}_{\min})$. Так как каждое решение $\bar{V}_i (i = 1,...,2^h - 1)$ является $(2-\frac{1}{\rho})$ – приближенным (одно из них будет задействовано), то получен $(2-\frac{1}{\rho})$ – приближенный алгоритм для $Insh - Ek - Vertex - Cover$. Для полиномиальности данного алгоритма достаточно потребовать, чтобы $2^h \le n^c$, где $c = \text{const}$, отсюда следует условие $h = O(\log n)$. Для завершения доказательства нужно положить $\rho = k$, т. е. применить приближенный алгоритм из теоремы 1.

Лемма 1. Если $h = O(\log n)$ (n – число вершин в гиперграфе), выполнена уникальная игровая гипотеза (UGC) и для проблемы $Insh - Ek - Vertex - Cover$ (реоптимизация $Ek - Vertex - Cover$) существует γ – приближенный (полиномиальный) алгоритм, то $\gamma \ge 2 - \frac{1}{k}$.

Доказательство. При доказательстве теоремы 4 для проблемы $Insh-Ek-Vertex-Cover$ разработано семейство приближенных (полиномиальных) параметрических (зависящих от ρ) алгоритмов с отношением аппроксимации $\phi(\rho)=2-\frac{1}{\rho}$, которые для решения произвольного экземпляра I' используют оптимальное решение $V_{\min}^{I}$ экземпляра I (в это семейство входит любой полиномиальный γ-приближенный алгоритм с таким свойством). В нашем случае $\gamma=\phi(\rho)$ и нужно доказать, что $\phi(\rho)\geq 2-\frac{1}{k}$. Доказательство проведем от противного. Пусть $\phi(\rho)<2-\frac{1}{k}=\phi(k)$, поскольку функция $\phi(\rho)$ как функция своего параметра ρ является возрастающей, то отсюда следует, что $\rho<k$. А это, поскольку выполняется UGC, противоречит теореме 2, так как такого *полиномиального* ρ-приближенного алгоритма просто не существует. Лемма доказана.

Теорема 4 . Если $h=O(\log n)$ (n – число вершин в гиперграфе) и выполнена уникальная игровая гипотеза (UGC), то для проблемы $Insh-Ek-Vertex-Cover$ (реоптимизация $Ek-Vertex-Cover$) существует оптимальный (пороговый) $(2-\frac{1}{k})$ – приближенный алгоритм.

Доказательство. Теорема 3 устанавливает верхнюю оценку отношения аппроксимации для проблемы $Insh-Ek-Vertex-Cover$. Фактически лемма 1 устанавливает нижнюю оценку аппроксимации для этой проблемы. Поскольку верхняя оценка совпадает с нижней и равна $2-\frac{1}{k}$, то тем самым теорема доказана.

Заключение. В работе получен следующий результат. Для задачи $Insh-Ek-Vertex-Cover$ (реоптимизация $Ek-Vertex-Cover$ с добавлением h вершин с некоторыми гиперребрами) существует полиномиальный $(2-\frac{1}{k})$ – приближенный алгоритм, если $h=O(\log n)$. При выполнении уникальной игровой гипотезы (UGC) отношение аппроксимации $2-\frac{1}{k}$ является пороговым в семействе параметрических полиномиальных реоптимизационных алгоритмов. В частности для $k=2$ (задача о минимальном вершинном покрытии графа) получен оптимальный (пороговый) $\frac{3}{2}$ – приближенный реоптимизационный алгоритм при добавлении $h(h=O(\log n))$ вершин в граф. Справедливость полученного результата зависит от истинности уникальной игровой гипотезы (UGC), что является одной из основных открытых проблем современной теоретической информатики.

В.О. Михайлюк

РЕОПТИМІЗАЦІЯ ЗАДАЧІ ПРО МІНІМАЛЬНЕ ВЕРШИННЕ ПОКРИТТЯ *K*-РІВНОМІРНОГО ГІПЕРГРАФА

Для реоптимізації задачі про мінімальне покриття k-рівномірного гіперграфа при добавленні h вершин ($h = O(\log n)$, n – загальна кількість вершин) і деякого числа гіперребер наводиться поліноміальний $(2-1/k)$-наближений алгоритм. При виконанні унікальної ігрової гіпотези (UGC) апроксимаційне відношення $2-1/k$ є пороговим в сімействі параметричних поліноміальних реоптимізаційних алгоритмів.

V.A. Mikhailyuk

REOPTIMIZATION OF MINIMUM VERTEX COVER PROBLEM ON *K*-UNIFORM HYPERGRAPH

For reoptimization of the problem of minimum vertex cover on *k*-uniform hypergraph by adding of h vertices ($h = O(\log n)$, n is a total number of vertices) and a number of hyper-edges, the polynomial $(2-1/k)$ - approximation algorithm is presented. If the unique game conjecture (UGC) is true, then the approximation ratio $2-1/k$ is a threshold in the family of parametric polynomial reoptimization algorithms.

1. *Halperin E.* Improved approximation algorithms for the vertex cover problem in graphs and hypergraphs // SIAM J. on Computing. – 2002. – **31(5)**. – P. 1608 – 1623.
2. *Karakostas G.* A better approximation ratio for the vertex cover problem // In Proceedings of the 32nd International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP). – 2005. – Lisbon, Portugal. – P. 1043 – 1050.
3. *Arora S., Lund C., Motwani R., Sudan M. and Szegedy M.* Proof verification and intractability of approximation problems // J. of the ACM. – 1998. – **45**, N 3. – P. 501 – 555.
4. *Hastad J.* Some optimal inapproximability results // J. of the ACM. – 2001. – **48**, N 4. – P. 798 – 859.
5. *Dinur I. and Safra S.* On the hardness of approximating minimum vertex cover// Annals of Mathematics. – 2005. – **162(1)**. – P. 439 – 485.
6. *Khot S., Regev O.* Vertex cover might be hard to approximate to within $2-\varepsilon$ // J. Comput. Syst. Sci. – 2008. – **74(3)**. – P. 335 – 349.
7. *Bockenhauer H.J., Hromkovic J., Momke T. and Widmayer P.* On the hardness of reoptimization // Lect. Notes Comput. Sci. – 2008. – Springer: Berlin. – **4910**. – P. 50–65.
8. *Ausiello G., Bonifaci V. and Escoffier B.* Complexity and approximation in reoptimization // Computability in Context: Computation and Logic in the Real World (ed. S. Barry Cooper and Andrea Sorbi). – 2011. – London: Imperial College Press. – P. 101 – 130.
9. *Михайлюк В.А.* Реоптимизация задачи о покрытии множествами // Кибернетика и системный анализ. – 2010. – **46**, № 6. – С. 27–31.

Получено 21.10.2011

Об авторе:

Михайлюк Виктор Алексеевич,
кандидат физико-математических наук, доцент,
докторант Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.
e-mail: mikhailyukvictor2@gmail.com