КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.854

В.А. МИХАЙЛЮК

О ПОРОГЕ ОТНОШЕНИЯ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ РЕОПТИМИЗАЦИИ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ О ВЫПОЛНИМОСТИ С ПРЕДИКАТОМ РАЗМЕРНОСТИ 3

При выполнении уникальной игровой гипотезы (UGC) для задачи $Ins-Max-E3CSP-EQUAL$ *(реоптимизация* $Max-E3CSP-EQUAL$ *при добавлении одного ограничения) существует полиномиальный оптимальный (пороговый)* $\phi(\alpha_{EQU})$ *-приближенный алгоритм, где* $\alpha_{EQU} \approx 0.796$ *пороговое отношение аппроксимации* $Max-E3CSP-EQUAL$ *и* $\phi(\alpha_{EQU}) = 1/(2-\alpha_{EQU}) \approx 0.831$.

Введение. Обобщенные задачи о выполнимости (Constraint Satisfaction Problems или CSP задачи) задаются множеством переменных и множеством ограничений (которые состоят из предикатов), каждое из которых зависит от некоторого числа переменных, и цель состоит в том, чтобы найти такие приписывания значений переменным, выполняющим (удовлетворяющим) максимальное число ограничений. Большое число фундаментальных оптимизационных проблем, таких как Max Cut и Max k-Sat, – примеры CSP задач.

Большинство CSP задач являются NP -трудными и поэтому решить их точно за приемлемое время вряд ли представляется возможным. Поэтому рассматриваются эффективные (полиномиальные) приближенные алгоритмы для решения таких задач. Для максимизационной задачи говорят, что алгоритм есть C -приближенным алгоритмом, если он для произвольного экземпляра дает решение со значением целевой функции не меньшим, чем $C \cdot OPT (0 < C < 1)$, где OPT – глобальный оптимум. При этом C называют отношением аппроксимации. Подобное определение можно дать для минимизационных задач.

Говорят, что для задачи Q установлена верхняя оценка отношения аппроксимации C, если существует полиномиальный C-при-ближенный алгоритм для решения Q.

Для задачи Q установлена нижняя оценка отношения аппроксимации c, если для произвольного $\varepsilon > 0$ не существует полиномиального приближенного алгоритма для Q на котором достигается отношение аппроксимации $c - \varepsilon$. Если $C = c$, то для задачи Q установлен *порог отношения аппроксимации* (равный $C = c$). Соответствующий алгоритм называется *пороговым* или *оптимальным* (и отношение аппроксимации – оптимально). Если для CSP задачи верхняя оценка C достигается случайными приписываниями и эта оценка совпадает с нижней c, то предикат соответствующий задаче (и задачу) называют аппроксимационно-устойчивой.

Для некоторых CSP задач удалось получить пороговые значения отношения аппроксимации. Например, для Max 3-Sat и Max 3-Lin это удалось сделать с использованием известной PCP теоремы [1]. Для некоторых (Vertex Cover, задача о минимальном вершинном покрытии графа) для этого привлекалась уникальная игровая гипотеза (Unique Games Conjecture, UGC), введенная Кхотом (Khot) [2, 3]. В работе [4] установлен факт существования порогового отношения аппроксимации для произвольных CSP константной размерности с привлечением техники полуопределенного программирования (Semidefinite Programming, SDP) и UGC.

Понятие реоптимизации [5, 6] состоит в следующем. Пусть Q – некоторая NP-трудная (возможно, NP-полная) проблема, I – начальный экземпляр проблемы Q, оптимальное решение которого известно. Предлагается новый экземпляр $I^{'}$ задачи Q, полученный некоторыми «незначительными» изменениями экземпляра I. Как можно эффективно использовать знания об оптимальном решении I для вычисления точного или приближенного решения экземпляра $I^{'}$? Цель реоптимизации при применении приближенных методов – использование знаний о решении начального экземпляра I для достижения лучшего качества приближения (аппроксимационного отношения) $I^{'}$.

Мало изучена и исследована проблема нахождения пороговых (оптимальных) приближенных алгоритмов для реоптимизации дискретных задач оптимизации. В [7] найден порог отношения аппроксимации для реоптимизации упорядоченных CSP задач (с использованием UGC). Для реоптимизации CSP задач с аппроксимационно-устойчивыми предикатами в [8] установлен порог отношения аппроксимации (с использованием PCP теоремы). В работе [9] найдены пороговые значения отношения аппроксимации (конкретные численные значения) для реоптимизации Max Cut и Max 2-Sat(с использованием UGC). В данной работе устанавливается порог отношения аппроксимации (конкретное численное значение) для реоптимизации CSP задачи с предикатом размерности 3, который не является аппроксимационно-устойчивым.

Основные определения и постановка задачи. Пусть Q обозначает NP-полную (или NP-трудную) проблему. Для экземпляра I проблемы Q размерности n $OPT(I)$ является значение оптимального решения. Для полиномиально приближенного алгоритма $ALG(I)$ обозначает значение решения, находящее алгоритм (или его математическое ожидание, если алгоритм случайный). Пусть C параметр, который может быть и функцией от n.

Определение 1. Алгоритм достигает аппроксимационное отношение C, если для произвольного экземпляра I:
$ALG(I) \geq C \cdot OPT(I)$, $Q-$ максимизационная проблема, при этом $0 < C < 1$;
$ALG(I) \leq C \cdot OPT(I)$, $Q-$ минимизационная проблема, при этом $C > 1$.
При этом говорят, что алгоритм – C-приближенный.

Пусть задан алфавит $[q] = \{1,...,q\}$ и множество предикатов $\Pi : [q]^k \to \{0,1\}$, здесь k размерность предикатов.

Определение 2. Экземпляр задачи $Max - CSP - P$ (скажем I) задается n переменными $x_1,...,x_n$ и множеством ограничений Е таким, что каждое $e \in \mathrm{E}$ имеет вид $e = (S, P)$, где $S \in [n]^k$ и $P \in \Pi$. Рассмотрим отображение $L : [n] \to [q]$. Будем говорить, что ограничение $e = (S, P)$ выполняется (удовлетворяется), если $P(L(S_1),..., L(S_k)) = 1$, где S_i – i-й элемент S. Определим значение целевой функции $val_L(I) = E_{e \in \mathrm{E}} P(L(S_1),..., P(L(S_k)) = = \sum_{e \in \mathrm{E}} w_e P(L(S_1),..., L(S_k))$, где w_e задает распределение весов ограничений. Нужно найти такое отображение L, что $val_L(I)$ максимально, т. е. $val(I) = val_{L^*}(I) = \max_L val_L(I)$, при этом L^* – оптимальное решение. Если P зависит от не более чем k литералов $Max - CSP - P$ будем называть $Max - kCSP - P$, если в P ровно k литералов – то $Max - EkCSP - P$.

В дальнейшем будем считать $w_e = 1$ для произвольного $e \in \mathrm{E}$. В качестве реоптимизационной версии задачи $Max - EkCSP - P$ будем рассматривать задачу следующего вида.

Задача $Ins - Max - EkCSP - P$. **Входные данные.** Экземпляр I задачи $Max - EkCSP - P$, содержащий ограничение $e = (S, P)$, где $S \in [n]^k$ и $P \in \Pi$. Экземпляр I' получается из I добавлением некоторого $e' = (S', P)$, где $S' \in [n]^k$.

Результат. Найти оптимальное решение экземпляра I' задачи $Max - EkCSP - P$, используя оптимальное решение L^* экземпляра I.

Цель. Найти L, которое максимизирует число выполненных ограничений экземпляра I'.

Будем рассматривать случай $k = 3$ и положим $P = EQUAL$ (булевский предикат $EQUAL$ выполняется тогда и только тогда, когда все его переменные либо единицы, либо нули). Известно, что задача $Max - E3CSP - EQUAL$ не является аппроксимационно-устойчивой [10].

Оптимальный приближенный алгоритм для задачи *Max – E3CSP – EQUAL*. Используем результаты работы [11]. Верхняя оценка отношения аппроксимации для задачи $Max-E3CSP-EQUAL$ получена с помощью полу-определенной (Semidefinite, SDP) релаксации.

Теорема 1 [11]. Для задачи $Max-E3CSP-EQUAL$ существует полиномиальный приближенный алгоритм со следующим отношением аппроксимации:

$$\alpha_{EQU}=\min_{\delta\in(0,1]}\frac{1-\dfrac{3\cos^{-1}(1-\delta)}{2\pi}}{1-\dfrac{3\delta}{4}}\approx 0.796\,.$$

Нижняя оценка отношения аппроксимации получена с помощью уникальной игровой гипотезы (UGC). Типичную технику получения результатов по нижним оценкам отношения аппроксимации (неаппроксимируемости) можно описать следующим образом. Пусть $Q-$произвольная оптимизационная (для определенности на максимум) проблема. Под $(c.s)-gap$ версией проблемы Q (обозначение $Gap-Q_{c,s}$) будем понимать проблему, для которой либо $OPT(I)\geq c$, либо $OPT(I)\leq s$ для произвольного экземпляра $I\in Q$. Рассмотрим NP-полную проблему 3-Sat (3-выполнимость). Произвольная 3-Sat формула ($E3-CNF$ формула) – это конъюнкция множества скобок, где каждая скобка это дизъюнкция трех булевских переменных или их отрицаний. Цель состоит в определении приписывания булевским переменным таких значений истинности, что формула становится логически истинной (выполнимой). Допустим, что существует полиномиальная сводимость от $3-Sat$ к $Gap-Q_{c,s}$ для некоторых $0<s<c$, т. е. сводимость, отображающая 3-Sat формулу ψ на экземпляр I проблемы Q такой, что:

(Случай-да): Если ψ имеет приписывание, которое делает ее выполнимой, то $OPT(I)\geq c$;

(Случай-нет): Если ψ не имеет приписываний, которые делают ее выполнимой, то $OPT(I)\leq s$.

Такая сводимость предполагает, что если существует полиномиальный алгоритм с отношением аппроксимации большим, чем s/c для проблемы Q, то есть возможность эффективно определить выполнима ли 3-Sat формула и, следовательно, $P=NP$. Таким образом, при стандартном предположении $P\neq NP$ эта сводимость – источник получения результатов по неаппроксимируемости для проблемы Q. Если исходить из Probabilistically Checkable Proof (PCP) теоремы [12] в той или иной форме для некоторого NP-полного языка (например, 3-Sat) получим обычную неаппроксимируемость. Если же исходить не из PCP теоремы, а из уникальной игровой гипотезы (UGC) в вышеописанной сводимости, получим неаппроксимируемость, основанную на UGC или *условную неаппроксимируемость* (*conditional inapproximability*).

Уникальная игровая гипотеза рассматривалась в такой постановке.
Уникальная игровая гипотеза (*UGC*). Для любого $\delta > 0$ существует такое простое p, что для данной системы линейных уравнений $x_i - x_j = c_{ij} (\mathrm{mod}\, p)$ является NP-трудным определить, какое из этих двух утверждений истинно:

- существует приписывание x_i, выполняющее (удовлетворяющее) $(1-\delta)$ – часть всех ограничений (уравнений);
- все приписывания x_i могут выполнять не больше δ – часть всех ограничений.

Теорема 2[11]. Предполагая UGC для любого $0 < \delta < 1$ и $\varepsilon > 0$ является NP-трудным различить экземпляр задачи $Max - E3CSP - EQUAL$ со значением $1 - 3\delta / 4 - \varepsilon$ от экземпляра со значением $1 - \dfrac{3\cos^{-1}(1-\delta)}{2\pi} + \varepsilon$. Иными словами, предполагая UGC, для любого $\delta > 0$ не существует приближенного полиномиального алгоритма для $Max - E3CSP - EQUAL$ с отношением аппроксимации $\alpha_{EQU} + \delta$.

Используя теоремы 1 и 2, получаем результат.

Следствие. Для задачи $Max - E3CSP - EQUAL$ существует оптимальный (пороговый) α_{EQU}-приближенный алгоритм.

Порог отношения аппроксимации для задачи $Ins - Max - E3CSP - EQUAL$. Имеет место следующий результат.

Теорема 3. Если для задачи $Max - E3CSP - P$ существует полиномиальный ρ-приближенный алгоритм, то для задачи $Ins - Max - E3CSP - P$ (реоптимизация $Max - E3CSP - P$) существует полиномиальный $\phi(\rho)$-приближенный алгоритм, где $\phi(\rho) = \dfrac{1}{2-\rho}$.

0, с множеством ограничений E и L^* – оптимальное решение I $(val(I) = val_{L^*}(I))$. К системе добавляется ограничение $e' = (S', P)$, где $S' \in [n]^k$, в результате получаем экземпляр I' проблемы $Ins - Max - E3CSP - P$**,** пусть $L^*_{I'}$ его оптимальное решение $(val(I') = val_{L^*_{I'}}(I'))$. Если $L^*_{I'}$ не выполняет ограничение e', то L^* – оптимальное решение экземпляра I' задачи $Ins - Max - E3CSP - P$**,** отсюда

$$val(I) \geq val(I') - 1 \tag{1}$$

(в левой части записано условие, что L^* – оптимальное решение I', а в правой, что оптимальное решение $L^*_{I'}$ не выполняет ограничение e'). Пусть $L^*_{I'}$ выполняет ограничение e' и есть l вариантов, при которых будет выполнено ограничение e' (очевидно $l < 2^3 = 8$). Построим l приближенных решений $x^i (i \in [l])$ следующим образом. Берем i-е приписывание, выполняющее e'. Из системы ограничений удаляем e' и к ограничениям, оставшимся (учитывая результат приписывания) применяем некоторый полиномиальный ρ-приближенный алгоритм, получаем приближенное решение L^i. В результате получаем

$$val_{L^i}(I) \geq \rho(val(I') - 1) + 1 = \rho val(I') + 1 - \rho \qquad (2)$$

Умножая (1) на $1 - \rho$ и складывая с (2) получаем

$$(1-\rho) val(I) + val_{L^i}(I) \geq (1-\rho) val(I') - (1-\rho) + \rho val(I') + 1 - \rho = val(I')$$

Среди решений L^* и L^i выбираем наилучшее (т. е. с наибольшим значением целевой функции val) и обозначаем $\overline{L}$. Имеем

$$val(I') \leq (1 - \rho + 1) \max\{val(I), val_{L^i}(I)\} = (2-\rho) val_{\overline{L}}(I),$$

откуда $val_{\overline{L}}(I) \geq \dfrac{1}{2-\rho} val(I')$. Таким образом, в результате выполнения описанного алгоритма получено приближенное решение $\overline{L}$ экземпляра I' с отношением аппроксимации $\phi(\rho) = \dfrac{1}{2-\rho}$. Ясно, что всегда $\dfrac{1}{2-\rho} > \rho (\rho < 1)$.

Теорема 4. Если для задачи $Max - E3CSP - P$ существует полиномиальный оптимальный (пороговый) ρ-приближенный алгоритм, а для задачи $Ins - Max - E3CSP - P$ (реоптимизация $Max - E3CSP - P$) существует полиномиальный γ-приближенный алгоритм, то $\gamma \leq \phi(\rho)$.

*Доказательство***.** Пусть I – экземпляр задачи $Max - E3CSP - P$, с множеством ограничений Е и L^* – оптимальное решение I $(val(I) = val_{L^*}(I))$. К системе добавляется ограничение $e' = (S', P)$, где $S' \in [n]^k$, в результате получаем экземпляр I' проблемы $Ins - Max - E3CSP - P$**,** пусть $L^*_{I'}$ его оптимальное решение $(val(I') = val_{L^*_{I'}}(I'))$. Пусть $\overline{L}$ решение проблемы $Ins - Max - E3CSP - P$, полученное в результате алгоритма из доказательства теоремы 3. Решение $\overline{L}$ – лучше (больше по значению целевой функции) из решений L^* и $L^i (i \in [l], l < 8)$, оно получается полиномиальным приближенным алгоритмом с отношением аппроксимации $\phi(\rho) = \dfrac{1}{2-\rho}$. Доказательство проведем от противного. Пусть $\gamma > \phi(\rho)$ и ρ^* – такое, что $\phi(\rho^*) = \gamma$. Поскольку функция $\phi(\rho)$ возрастающая по

ρ и $\phi(\rho^*) = \gamma > \phi(\rho)$, то отсюда следует, что $\rho^* > \rho$. А это противоречит тому факту, что для проблемы $Max - E3CSP - P$ существует полиномиальный оптимальный (пороговый) ρ-приближенный алгоритм (т. е. для получения решения L^i должен применяться полиномиальный алгоритм с отношением аппроксимации ρ^* большим чем ρ, что невозможно).

Теорема 5. Если для проблемы $Max - E3CSP - P$ существует полиномиальный оптимальный (пороговый) ρ-приближенный алгоритм, то для проблемы $Ins - Max - E3CSP - P$ (реоптимизация $Max - E3CSP - P$) существует полиномиальный оптимальный (пороговый) $\phi(\rho)$-приближенный алгоритм, где $\phi(\rho) = \dfrac{1}{2-\rho}$.

Доказательство следует из теорем 3 и 4.

Теорема 6. Предположим, что имеет место уникальная игровая гипотеза (UGC). Тогда для проблемы $Ins - Max - E3CSP - EQUAL$ (реоптимизация $Max - E3CSP - EQUAL$) существует полиномиальный оптимальный (пороговый) $\phi(\alpha_{EQU})$-приближенный алгоритм, где $\phi(\alpha_{EQU}) = \dfrac{1}{2-\alpha_{EQU}} \approx 0.831$.

Доказательство следует из теоремы 5 и следствия, если положить $\rho = \alpha_{EQU}$, т. е. применить для решения $Max - E3CSP - EQUAL$ алгоритм из теоремы 1.

Заключение. В данной работе явно определено численное значение (0.831) порогового отношения аппроксимации для задачи $Ins - Max - E3CSP - EQUAL$, что стало возможным благодаря новым результатам по оптимальным разбиениям пространства Гаусса [11] . Также заметим, что предикат $EQUAL$ не является аппроксимационно-устойчивым [10] и поэтому результаты работы [8] к нему не применимы.

В.О. Михайлюк

ПРО ПОРІГ ВІДНОШЕННЯ АПРОКСИМАЦІЇ ДЛЯ РЕОПТИМІЗАЦІЇ ЗАДАЧІ
ПРО УЗАГАЛЬНЕНУ ВИКОНУВАНІСТЬ З ПРЕДИКАТОМ РОЗМІРНОСТІ 3

При виконанні унікальної ігрової гіпотези (UGC) для задачі $Ins - Max - E3CSP - EQUAL$ (реоптимізація $Max - E3CSP - EQUAL$ при добавленні одного обмеження) існує поліноміальний оптимальний (пороговий) $\phi(\alpha_{EQU})$-наближений алгоритм, де $\alpha_{EQU} \approx 0.796$

порогове відношення апроксимації $Max - E3CSP - EQUAL$ і $\phi(\alpha_{EQU}) = 1/(2 - \alpha_{EQU}) \approx 0.831$.

V.A. Mikhailyuk

ON THE THRESHOLD OF APPROXIMATION RATIO FOR REOPTIMIZATION
OF CONSTRAINT SATISFACTION PROBLEM WITH PREDICATE OF ARITY 3

If the unique games conjecture (UGC) is true, for the problem $Ins - Max - E3CSP - EQUAL$ (reoptimization of $Max - E3CSP - EQUAL$ under insertion of one constraint) polynomial optimal (threshold) $\phi(\alpha_{EQU})$ - approximation algorithm exists, where $\alpha_{EQU} \approx 0.796$ is the threshold approximation ratio of $Max - E3CSP - EQUAL$ and $\phi(\alpha_{EQU}) = 1/(2 - \alpha_{EQU}) \approx 0.831$.

1. *Hastad J.* Some optimal inapproximability results // J. of the ACM. – 2001. – 48, N 4.– P. 798–859.
2. *Khot S.* On the power of unique 2-prover 1-round games// In Proc. ACM Symposium on the Theory of Computing (STOC). – 2002. – P. 767–775.
3. *Khot S., Regev O.* Vertex cover might be hard to approximate to within $2 - \varepsilon$ // J. Comput. Syst. Sci. – 2008. – **74(3).** – P. 335–349.
4. *Raghavendra P.* Optimal algorithms and inapproximability results for every csp? // In STOC. – 2008. – P. 245 – 254.
5. *Bockenhauer H.J, Hromkovic J., Momke T. and Widmayer P.* On the hardness of reoptimization // Lect. Notes Comput. Sci. – 2008. – Springer: Berlin. – **4910**. – P. 50 – 65.
6. *Ausiello G., Bonifaci V. and Escoffier B.* Complexity and approximation in reoptimization // Computability in Context: Computation and Logic in the Real World (ed. S. Barry Cooper and Andrea Sorbi). – 2011. – London: Imperial College Press. – P. 101 – 130.
7. *Михайлюк В.А*. Реоптимизация упорядоченных обобщенных задач о выполнимости// Проблемы управления и информатики. – 2012. – № 3. – С. 56 – 65.
8. *Михайлюк В.А., Сергиенко И.В.* Реоптимизация обобщенных проблем о выполнимости с аппроксимационно-устойчивыми предикатами // Кибернетика и системный анализ. – 2012 . – № 1. – С. 89 – 104.
9. *Сергієнко І.В., Михайлюк В.О.* Реоптимізація проблем про узагальнену виконуваність з предикатами розмірності 2 // Доповіді НАН України. – 2012. – № 6 . – С. 39 – 46.
10. *Zwick U.* Approximation algorithms for constraint satisfaction problems involving at most three variables per constraint // In Proc. of the Ninth Annual ACM/SIGACT-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA). – 1998. – P. 201 – 210.
11. *De A., Mossel E.* Explicit optimal hardness via Gaussian stability results // Electronic Colloquium on Computational Complexity. – 2012. – Report N 16.
12. *Arora S., Lund C., Motwan R., Sudan M. and Szegedy M.* Proof verification and intractability of approximation problems // J. of the ACM. – 1998. – **45,** N 3. – P. 501 – 555.

Получено 19.09.2012

Об авторе:

Михайлюк Виктор Алексеевич,
кандидат физико-математических наук, доцент,
докторант Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.
e-mail: mikhailyukvictor2@gmail.com